Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 499–502
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique/Analyse numérique

Les polynômes orthogonaux de Bergman sur un archipel

Björn Gustafsson [a], Mihai Putinar [b], Edward B. Saff [c], Nikos Stylianopoulos [d]

[a] *Department of Mathematics, The Royal Institute of Technology, S-10044, Stockholm, Suède*
[b] *Department of Mathematics, University of California at Santa Barbara, Santa Barbara, CA 93106-3080, États-Unis*
[c] *Department of Mathematics, Vanderbilt University, 1326 Stevenson Center, Nashville, TN 37240, États-Unis*
[d] *Department of Mathematics and Statistics, University of Cyprus, P.O. Box 20537, 1678 Nicosia, Chypre*

Reçu le 28 janvier 2008 ; accepté le 21 février 2008

Disponible sur Internet le 11 avril 2008

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Des estimations de croissance pour la suite de polynômes orthogonaux se rapportant à la mesure d'aire sur une réunion finie de domaines de Jordan sont obtenues par une étude detaillée de la fonction de Green du complément et de la reflection de Schwarz dans les portions analytiques de la frontière. Deux applications en découlent : la distribution limite des zéros de la suite des polynômes orthogonaux de Bergman et un algorithme de reconstruction robuste de l'ouvert original à partir de données incomplètes (tomographiques par exemple). ***Pour citer cet article : B. Gustafsson et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Bergman orthogonal polynomials on an archipelago. Growth estimates for orthogonal polynomials with respect to area measure (Bergman polynomials) over the union of finitely many Jordan regions with piecewise smooth boundary are obtained by a careful investigation of the Green function of the complement, and of Schwarz reflection in analytic arcs of the boundary. As applications we obtain a detailed picture of the limiting zero distribution of Bergman's orthogonal polynomials, and also we propose a robust reconstruction algorithm of the original open set, starting from incomplete data (such as obtained by geometric tomography). ***To cite this article: B. Gustafsson et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

1. Les estimations

Soit $G \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné, avec frontière $\Gamma = \partial G$ analytique par morceaux. On suppose que G consiste en une réunion finie de domaines de Jordan G_i, $1 \leqslant i \leqslant N$. On appelle G un *archipel*. Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ le domaine complémentaire. Les polynômes orthogonaux de Bergman $P_n(z) = \lambda_n z^n + a_{n,n-1} z^{n-1} + \cdots + a_{n,0}$ sont normalisés par les conditions $\lambda_n > 0$, $n \geqslant 0$,

Adresses e-mail : gbjorn@kth.se (B. Gustafsson), mputinar@math.ucsb.edu (M. Putinar), Edward.B.Saff@Vanderbilt.Edu (E.B. Saff), nikos@ucy.ac.cy (N. Stylianopoulos).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.03.001

$$\|P_n\|_{2,G}^2 = \int_G \left|P_n(z)\right|^2 \mathrm{d}A(z) = 1, \quad n \geqslant 0,$$

et par l'orthogonalité dans l'espace de Lebesgue $L^2(G, \mathrm{d}A)$ où $\mathrm{d}A$ désigne la mesure de Lebesgue planaire.

Le contrôle de la croissance des coefficients λ_n, comme dans le cas classique sur la ligne réelle ou sur le cercle, est fondamental.

Théorème 1.1. *Soit G un archipel avec frontière Γ. Il existe une constante positive C_1 telle que*

$$\lambda_n \leqslant C_1 \frac{\sqrt{n}}{\mathrm{cap}(\Gamma)^n}, \quad n \geqslant 1.$$

Si Γ est lisse, alors il existe une constante $C_2 > 0$ avec la propriété :

$$\lambda_n \geqslant C_2 \frac{\sqrt{n}}{\mathrm{cap}(\Gamma)^n}, \quad n \geqslant 1.$$

On désigne par $\mathrm{cap}(\Gamma)$ la capacité logarithmique du contour Γ.

Si G consiste en un seul ouvert connexe et simple connexe, alors la limite $\lim_n \lambda_n \frac{\mathrm{cap}(\Gamma)^n}{\sqrt{n}}$ existe en vertu du résultat classique obtenu par Carleman [1] et améloiré par Suetin [10]. Si G a plusieurs composantes connexes et si l'on travaille avec des polynômes orthogonaux de Szegő (pour la mesure linéaire sur Γ), la limite précédente n'existe généralement pas. Ce cas a été analysé en détail par Widom [12].

La démonstration de la première partie du Théorème 1 consiste en une application d'une inégalité de type Bernstein obtenue par Suetin (plus précisément pour un polynôme p : $\|p\|_{2,\Gamma} \leqslant C\sqrt{1+\deg p}\,\|p\|_{2,G}$) et d'une réduction au cas des polynômes de Szegő. La borne inférieure est obtenue à l'aide de la propriété extrêmale :

$$\lambda_n^{-2} = \min_{a_0,\ldots,a_{n-1}} \int_G |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0|^2 \,\mathrm{d}A(z), \quad n \geqslant 0,$$

et d'une construction inspirée d'une suite d'interpolation découverte par Walsh [11] et perfectionnée par le troisième auteur [7].

L'asymptotique des polynômes de Bergman est étroitement liée à la fonction de Green du domaine extérieur avec un pôle à l'infini, soit $g(z) = g_\Omega(z, \infty)$.

Théorème 1.2. *Si la frontière de l'archipel est lisse, alors il existe une constante $C > 0$ telle que* :

$$\left|P_n(z)\right| \leqslant \frac{C\sqrt{n}}{\mathrm{dist}(z, \Gamma)} \mathrm{e}^{ng(z)}, \quad z \in \Omega, \ n \geqslant 1.$$

Pour chaque $\epsilon > 0$, il existe une constante $C_\epsilon > 0$ avec la propriété

$$\left|P_n(z)\right| \geqslant C_\epsilon \sqrt{n}\, \mathrm{e}^{ng(z)}, \quad \mathrm{dist}\big(z, \mathrm{co}(\overline{G})\big) \geqslant \epsilon, \quad n \geqslant 0.$$

On a noté $\mathrm{co}(A)$ l'enveloppe convexe de A.

2. La distribution des zéros

Soit $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{P_n(\lambda)=0} \delta_\lambda$ la mesure de probabilité d'énumération des zéros de polynômes de Bergman P_n associés à un archipel G. Il est bien connu depuis Fejér que les zéros de P_n sont contenus dans l'enveloppe convexe de $\overline{G}$; voir par exemple [2]. Aussi, pour chaque ensemble compact K de Ω, le nombre de zéros de P_n est fini, uniformément en n ; voir [8,9]. On note par $\tilde{\delta}_\lambda = \mathrm{Bal}(\delta_\lambda, \Gamma_j)$ le balayage de la mesure de Dirac sur la frontière qui entoure le point λ et l'on pose par définition $\tilde{\delta}_\lambda = 0$ si λ est extérieur à G. Une première observation sur la distribution asymptotique des zéros s'ensuit :

Théorème 2.1. *La limite $*$-faible*

$$w^* - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{P_n(\lambda)=0} \tilde{\delta}_\lambda$$

existe et est égale a la mesure d'équilibre μ_Γ portée sur Γ.

Une analyse plus détailée des mesures d'énumeration μ_n fait intervenir la géometrie de la frontière Γ et des courbes de niveau $L_r = \{z \in \Omega;\ g(z) = \log r\}$ où $r > 1$. Nous n'indiquons ici que quelques résultats representatifs.

Proposition 2.2. (a) *Si une composante connexe Γ_i de la frontière Γ a des points singuliers, au sens que la transformation conforme intérieure est singulière sur Γ_i, alors il existe une sous-suite (n_k) tel que $w^* - \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}|_{U_i} = \mu_\Gamma|_{\Gamma_i}$, où U_i est un voisinage tubulaire de Γ_i.*

(b) *Si la composante connexe de la frontière Γ_i est lisse, alors chaque point w^*-limite de la suite μ_n est porté sur un compact intérieur à G_i, lequel constitue une barrière d'extension de la reflection de Schwarz dans Γ_i, ou est délimité par la reflection dans Γ_i des courbes singulieres L_r.*

Par exemple, si l'archipel consiste en une réunion disjointe de disques, alors les réflections de Schwarz dans les frontières circulaires n'ont pas d'obstruction de continuation analytique. Les réflections des courbes singulières L_r determinent ainsi le lieu d'accumulation des zéros de polynômes de Bergman.

Notre travail portant sur la distribution des zéros est corroboré par des expérimentations numériques de haute précision et par quelques exemples de calculs détaillés (deux ellipses éloignées, une lemniscate non connexe avec des symétries axiales, un pentagone extérieur à un disque, trois disques dans une position générale et une réunion de lentilles). Le cas d'un seul ouvert G connexe et simplement connexe a été étudié et élucidé récemment par les troisième et quatrième auteurs [5,6]. L'analyse portant sur un archipel confirme notre intuition première : les zéros des polynômes de Bergman s'accumulent pour former un squelette qui focalise la mesure d'équilibre sur la frontière.

3. L'algorithme de reconstruction

Il est bien connu que l'information obtenue par la tomographie parallèle ou axiale d'une mesure planaire $\mathrm{d}\nu$, prise dans un nombre fini de directions, est equivalente à la matrice des moments

$$a_{mn} = \int z^m \bar{z}^n \,\mathrm{d}\nu(z), \quad m, n \leqslant d.$$

Il existe déja plusieurs méthodes fiables pour reconstruire approximativement (et parfois même exactement) l'original à partir des moments $(a_{mn})_{m,n=0}^d$; voir [4,3]. Le cas d'une masse uniforme portée sur un archipel $\mathrm{d}\nu = \chi_G \,\mathrm{d}A$ peut être traité grâce à la théorie des polynômes orthogonaux developpée ci-dessus.

Plus précisément, si l'on connaît la matrice $(a_{mn})_{m,n=0}^d$, on obtient les polynômes $P_j(z)$ avec $0 \leqslant j \leqslant d$, ce qui permet de définir la racine carrée de la fonction de Christoffel $\Lambda_d^G := [\sum_{j\leqslant d} |P_j(z)|^2]^{-1/2}$, laquelle donne une fonction de définition approximative de la frontière. On définit également $\Lambda^G(z) := [\sum_{j=0}^\infty |P_j(z)|^2]^{-1/2}$ pour $z \in G$ et $\Lambda^G(z) = 0$ si $z \notin G$; et, de même, pour $\Lambda_d^{G_j}$, Λ^{G_j}.

Théorème 3.1. *Si Γ est lisse, il existe des constantes $0 < \alpha < 1$ et $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, telles que pour chaque $0 \leqslant j \leqslant N$, on a $\frac{1-\alpha^n}{2} \Lambda_{mn}^G(z) \leqslant \Lambda_n^{G_j}(z) \leqslant \Lambda_n^G(z)$, $z \in \mathbb{C}$. De plus, il existe une constante positive C_1 telle que*

$$0 \leqslant \Lambda_n^{G_j}(z) - \Lambda^{G_j}(z) \leqslant C_1 |\Phi_j(z)|^n \left(\mathrm{dist}(z, \Gamma) + \frac{1}{n}\right), \quad n \geqslant 1,$$

pour z dans un voisinage de la frontière Γ_j intérieur à $\overline{G_j}$. On obtient en particulier $\lim_{n\to\infty} n\Lambda_n^{G_j}(z) = \sqrt{2\pi}/|\Phi_j'(z)|$, uniformement en $z \in \Gamma_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, ainsi que des constantes positives C_2, C_3 avec la propriété $C_2 \leqslant n\Lambda_n^G(z) \leqslant C_3$, $z \in \Gamma$, $n \geqslant 1$.

On a noté Φ_j la transformation conforme normalisée de l'extérieur de G_j ; voir [1,2].

Remerciements

Le premier auteur a été parrainé par le Conseil de Recherche Scientifique de Suède, la Fondation Göran Gustafsson, et le reseau Européen HCAA. Les deuxième et troisième auteurs ont été financés partiellement par les contracts DMS-0701094 et DMS-0603828 de la National Science Foundation des Etats-Unis. Le quatrième auteur a été parrainé par une bourse de recherche de l'Université de Chypre. Tous les auteurs remercient l'Institut de Recherche Mathématique de Oberwolfach (Allemagne) pour les conditions exceptionelles dans lequelles ce travail a pu être réalisé.

Références

[1] T. Carleman, Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen, Ark. Mat., Astr. Fys. 17 (1923) 215–244.

[2] D. Gaier, Lectures on Complex Approximation, Translated from the German by Renate McLaughlin, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1987.

[3] G. Golub, B. Gustafsson, P. Milanfar, M. Putinar, J. Varah, Shape reconstruction from moments: theory, algorithms, and applications, in: F.T. Luk (Ed.), Advanced Signal Processing, Algorithms, Architecture, and Implementations X, in: SPIE Proceedings, vol. 4116, 2000, pp. 406–416.

[4] B. Gustafsson, C. He, P. Milanfar, M. Putinar, Reconstructing planar domains from their moments, Inverse Problems 16 (2000) 1053–1070.

[5] A.L. Levin, E.B. Saff, N.S. Stylianopoulos, Zero distribution of Bergman orthogonal polynomials for certain planar domains, Constr. Approx. 19 (2003) 411–435.

[6] E. Miña-Díaz, E.B. Saff, N.S. Stylianopoulos, Zero distributions for polynomials orthogonal with weights over certain planar regions, Comput. Methods Funct. Theory 5 (2005) 185–221.

[7] E.B. Saff, Polynomials of interpolation and approximation to meromorphic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 143 (1969) 509–522.

[8] E.B. Saff, V. Totik, Logarithmic Potentials with External Fields, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[9] H. Stahl, V. Totik, General Orthogonal Polynomials, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[10] P.K. Suetin, Order comparison of various norms of polynomials in a complex region, Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. 5 (1966) 91–100.

[11] J.L. Walsh, A sequence of rational functions with application to approximation by bounded analytic functions, Duke Math. J. 30 (1963) 177–189.

[12] H. Widom, Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane, Adv. Math. 3 (1969) 127–232.