(b) $\tilde{Y}=Y$ σε μια γειτονιά U του p.

$\nabla_X(\tilde{Y}-Y)\big|_p \overset{?}{=} 0.$

Έστω ϕ τ.ω. $\phi(p)=1$ σε μια γειτονιά $U_0 \subset U$ του p (ανοικτή)

& $\phi\equiv 0$ στο U^c.

$\therefore\ \phi(\tilde{Y}-Y)\equiv 0$ στη M.

$$\left.\begin{aligned}&\nabla_X(\phi(\tilde{Y}-Y)) = \nabla_X\cdot 0 = 0\\ &\nabla_X(\phi(\tilde{Y}-Y))\big|_p \overset{(iii)}{=} X(\phi)\cdot(\tilde{Y}-Y)\big|_p + \phi\cdot\nabla_X(\tilde{Y}-Y)\big|_p = \nabla_X(\tilde{Y}-Y)\big|_p\end{aligned}\right\}.$$

$X(\phi)\big|_p=0$ αφού $\phi\equiv 1$ στο U_0 σε γειτονιά του p.

$\phi(p)=1$

• Αν $Y=\tilde{Y}$ στη γ. $\Rightarrow \tilde{Y}-Y=\sum f_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ με $f_i(\gamma(t))=0$

$f_i(\gamma(t))=0.$

$$\nabla_X\cdot(\tilde{Y}-Y)\big|_p = \nabla_{\dot\gamma(t)}\left(f_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum(\dot\gamma(t))(f_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p + \cancelto{0}{\sum f_i}\left(\nabla_{\dot\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Big|_p$$

$p,\ t=0$

$$=\sum\frac{d}{dt}\cancelto{0}{\left(f_i(\gamma(t))\right)}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \qquad \text{αφού } f_i(\gamma(t))=0.$$

• $\nabla_{fX}=f\nabla_X$ και για (b). $\nabla_X fY = X(f)\cdot Y + f\cdot\nabla_X Y.$

• Σημείωση: Όμοιο με τις ιδιότητες για κατευθυνόμενες παραγώγους ~~για~~ σε συναρτήσεις.

Όμως ∇_X παραγωγίζει διαν. πεδία τ.ω. $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Γενικά $\nabla_X Y \neq [X,Y]$ αφού $[X,Y]$ πρέπει να είναι αντισυμμετρικό. ενώ $\nabla_X Y \neq -\nabla_Y X$ γενικά.

Θα μπορούσε $\nabla_X Y := [X,Y]$ να δώσει σύνδεσμο;
Δηλαδή ισχύουν τα (i), (ii), (iii) για $[\ ,\ ]$;

- Άσκηση - Εργασία 3.

Υπολογισμός <u>ομοπαραλληλικών συνδέσμων</u>:

Σε γειτονιά συντεταγμένων με πλαίσιο συντεταγμένων $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$, είτε σε οποιοδήποτε άλλο <u>τοπικό πλαίσιο</u> $\{E_1, \ldots, E_n\}$ (δηλαδή $\{E_i\}_{i=1}^n$ με $E_i \in \mathfrak{X}(M)$ και $\{E_i\}_{i=1}^n$ βάση για το T_pM $\forall p \in U$) σε μια γειτονιά U της M.

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ έχουμε $X = \sum_{i=1}^n X_i E_i$ $\quad Y = \sum_{j=1}^n Y_j E_j$

Άρα $\nabla_X Y = \nabla_{(\sum_i X_i E_i)} (\sum_j Y_j E_j) = \sum_i X_i \nabla_{E_i} (\sum_j Y_j E_j) =$

$= \sum_i X_i \sum_j (E_i(Y_j) + \nabla_{E_i} E_j) = \sum_{i,j} (X_i E_i(Y_j) E_j + X_i Y_j \nabla_{E_i} E_j)$

<u>Ορισμός</u>: Για τοπικό πλαίσιο $\{E_1, \ldots, E_n\}$ τα <u>σύμβολα Christoffel</u> ορίζονται ως οι n^3 συναρτήσεις με την ιδιότητα $\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k E_k$.

• Η δράση του ∇ στη γειτονιά U καθορίζεται πλήρως από τα Γ_{ij}^k.

<u>Λήμμα</u>: $\nabla_X Y = \sum_k \left[X(Y_k) + \sum_{i,j} X_i Y_j \Gamma_{ij}^k \right] E_k$.

<u>Πρόταση</u> Σε κάθε πολλ/α ορίζεται ένας τουλάχιστον ομοπαραλληλικός σύνδεσμος.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}_\alpha$ άτλαντας και $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ διαμέριση της μονάδας.
Σε κάθε χάρτη (U_α, X_α) επιλέγουμε n^3 λείες συναρτήσεις ${}^\alpha\Gamma_{ij}^k$ και ορίζουμε

$${}^\alpha\nabla_X Y := \sum_k \Big[X(Y_k) + \sum_{i,j} X_i Y_j \, {}^\alpha\Gamma_{ij}^k\Big] \frac{\partial}{\partial x_k} . \qquad (*)$$

Τότε ${}^\alpha\nabla$ είναι ομοπαραλληλικός σύνδεσμος σε αυτή τη γειτονιά, και

$$\nabla := \sum_\alpha \varphi_\alpha \, {}^\alpha\nabla \quad \text{είναι σύνδεσμο στην } M.$$

(φ_α τ.ω. $\varphi_\alpha(x)=0 \;\; \forall x \notin U_\alpha$ και $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1 \;\; \forall x \in M$)

∇ ικανοποιεί (i), (ii) ✓

(iii) Leibniz: $\nabla_X(fY) = \sum_\alpha \varphi_\alpha \, {}^\alpha\nabla_X(fY) =$

$$= \underbrace{\sum_\alpha \varphi_\alpha}_{=1} \big[X(f)Y + f\, {}^\alpha\nabla_X Y\big] = X(f)Y + f \cdot \sum_\alpha \varphi_\alpha \, {}^\alpha\nabla_X Y =$$

$$= X(f)Y + f\nabla_X Y.$$

□

- Τα Γ_{ij}^k καθορίζουν μοναδικά το σύνδεσμο.
- Παρ: $\mathbb{R}^n$ $\nabla_X\big(\sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\big) = \sum_j X(Y_j) \frac{\partial}{\partial x_j}$ με $\Gamma_{ij}^k = 0 \;\; \forall i,j,k$ είναι ο ευκλείδιος σύνδεσμος.

Παρατήρηση: Αν ∇^1, ∇^2 σύνδεσμοι, τότε

$\frac{1}{2}\nabla^1$, $\nabla^1+\nabla^2$ γενικά δεν είναι σύνδεσμοι. -χάνεται η ιδιότητα (iii) - όμως $\alpha\nabla^1+\beta\nabla^2$ με $\alpha+\beta=1$ είναι σύνδεσμος.

Αν ∇^1, ∇^2 σύνδεσμοι με σύμβολα Christoffel

${}^1\Gamma_{ij}^k$, ${}^2\Gamma_{ij}^k$ αντίστοιχα, τότε ο ∇ με

σύμβολα Christoffel $\alpha\,{}^1\Gamma_{ij}^k+\beta\cdot{}^2\Gamma_{ij}^k$ όπου $\alpha,\beta\in C^\infty(M)$

είναι σύνδεσμος. - πρέπει να ικανοποιείται (*)

- Γι' αυτό ονομάζεται και αφφινικός

∇: επιτρέπει την παραγώγιση διαν. πεδίων σε μια καμπύλη.
Αυτό φαίνεται από την ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση: Έστω M διαφ. πολλ/τα με συμμετρικό σύνδεσμο ∇.
Τότε για κάθε διαν. πεδίο $V(t)$ ορισμένο σε καμπύλη $\gamma(t)$ ορίζεται μοναδικά η συναλλοίωτη παράγωγος του V στη γ, $\frac{DV}{dt}$, η οποία να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(a) $\frac{D}{dt}(aV+W)=a\frac{DV}{dt}+\frac{DW}{dt}$ όπου $a\in\mathbb{R}$, W διαν. πεδίο στη γ.

(b) $\frac{D}{dt}(fV)=\frac{df}{dt}V+f\cdot\frac{DV}{dt}$ όπου f συνάρτηση ορισμένη στη γ

(c) Αν το V προέρχεται από διαν. πεδίο $Y\in\mathfrak{X}(M)$, δηλαδή
$V(t)=Y(\gamma(t))$ τότε $\frac{DV}{dt}=\nabla_{\gamma'(t)}Y$.

Απόδειξη:

$$V(t)=\sum_{i=1}^{n} v_i(t)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)}$$ σε μια γειτονιά συντεταγμένων.

Αν το $\frac{D}{dt}$ ορίζεται και ισχύουν (a), (b), (c), τότε

$$\frac{D}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i(t)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)}\right) \overset{(a),(b)}{=} \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dv_i(t)}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)} + v_i(t)\,\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Big|_{\gamma(t)}\right]$$

$$\overset{(c)}{=} \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dv_i}{dt}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)} + v_i(t)\left(\nabla_{\gamma'(t)}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Big|_{\gamma(t)}\right]$$

Αφού $\gamma'(t)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i'(t)\,\frac{\partial}{\partial x_i}$ σε συντεταγμένες, τότε από γραμμικές ιδιότητες του ∇

$$\frac{DV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dv_i}{dt}\,\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} v_i(t)\,\gamma_j'(t)\,\nabla_{\partial/\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Big|_{\gamma(t)} \quad (*)$$

Άρα αν θέλουμε $\frac{D}{dt}$ τ.ω. να ικανοποιεί (a), (b), (c), τότε από (*) αυτό το $\frac{DV}{dt}$ ορίζεται μοναδικά για κάθε V στη γ.

Για την ύπαρξη λοιπόν του $\frac{DV}{dt}$ το ορίζουμε μέσω (*).
Τότε είναι ξεκάθαρο ότι η παράγωγος αυτή διασφαλίζει τα (a), (b), (c).

$\square$.

<u>Ορισμός:</u> Έστω M διαφ. πολ/τα με ομοπαραλληλικό σύνδεσμο ∇.
Ένα διανυσματικό πεδίο V σε καμπύλη γ ονομάζεται <u>παράλληλο</u> αν $\frac{DV}{dt}=0 \quad \forall t$.
(δηλαδή μηδενική μεταβολή πάνω στη γ.)

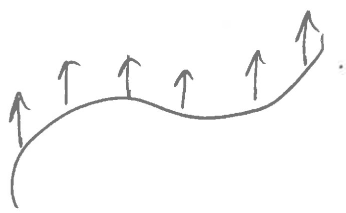
<u>Θεώρημα στο $\mathbb{R}^n$:</u> Έστω $\gamma(t)$ C^∞ καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$, και V_0 διάνυσμα στο $\gamma(t_0)$.
Τότε υπάρχει μοναδικό παράλληλο διαν. πεδίο $V(t)$ στη γ με $V(t_0)=V_0$ (∇: σύνδεσμος με $\Gamma_{ij}^{k}=0$).

<u>Απόδειξη:</u> $V(t)=(V_1(t),\dots,V_n(t))$

$$\frac{DV}{dt}=(V_1'(t),\dots,V_n'(t))=0 \Rightarrow V_i(t)=c_i \quad \forall t$$

$\therefore c_i=V_i(t)=V_{0,i}$

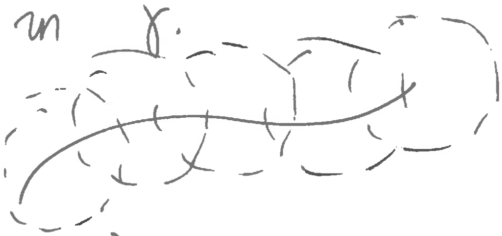
$\therefore V(t)=V_0 \quad \forall t$



<u>Πρόταση:</u> Έστω M διαφ. πολ/τα με ομοπαραλληλικό σύνδεσμο ∇, $\gamma: I \to M$ διαφ. καμπύλη και $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$.
Τότε υπάρχει μοναδικό παράλληλο C^∞ διαν. πεδίο $V(t)$ στη γ με $V(t_0)=V_0$.
Το $V(t)$ ονομάζεται <u>παράλληλη μετατόπιση</u> του V_0 στη γ.

• Μας δίνει το ανάλογο των παράλληλων διαν. πεδίων στο $\mathbb{R}^n$.

<u>Απόδειξη:</u> Σε μια γειτονιά U του $\gamma(t_0)$ έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα.
Μετά προχωράμε από γειτονιά σε γειτονιά μέχρι να καλύψουμε τη γ.



Στη γειτονιά U του $\gamma(t_0)$, θέλουμε $V(t)$ τ.ω. $V(t_0)=V_0$ και $\frac{DV}{dt}\equiv 0$.

Σε συντεταγμένες $V(t)=\sum_{i=1}^{n} v_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}$

και
$$\frac{DV}{dt}=\frac{D}{dt}\Big(\sum_i v_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)=\sum_i\Big[v_i'(t)\frac{\partial}{\partial x_i}+v_i(t)\cdot\frac{D}{dt}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)\Big]$$

$$=\sum_i v_i'(t)\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_i v_i(t)\,\nabla_{\sum_{j=1}^{n}\gamma_j'(t)\frac{\partial}{\partial x_j}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} v_k'(t)\frac{\partial}{\partial x_k}+\sum_{i,j,k=1}^{n} v_i(t)\,\gamma_j'(t).\,\Gamma_{ij}^{k}\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\equiv 0$$

$$\Longleftrightarrow\ v_k'(t)+\sum_{i,j=1}^{n} v_i(t)\,\gamma_j'(t)\,\Gamma_{ij}^{k}=0.\qquad \forall k.$$

με $v_k(t_0)=v_{0,k}$.

Σύστημα διαφ. εξισώσεων $1^{ης}$ τάξης για το $(v_1(t),\dots,v_n(t))$ με C^∞ συντελεστές $(\gamma_j'(t)\Gamma_{ij}^{k})$ το οποίο είναι γραμμικό, δηλαδή $\vec{v}\,'(t)=A\vec{v}$ $\quad A$: C^∞ $n\times n$ πίνακας.

Από Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας, έχουμε μοναδική λύση $\vec{V}(t)$ με ~~με~~ $\vec{V}(t_0)=\vec{V}_0$ σε συντεταγμένες για όλα τα $t \in I$ στο $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον $\vec{V}(t)$ είναι C^∞.

Θέτουμε $V(t) = \sum_{i=1}^{n} V_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)}$ C^∞ διαν. πεδίο.

$\square$

Παρατήρηση: Για $\gamma: I \to M$ $t_0, t_1 \in I$, η παράλληλη μεταφορά ενός $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ δίνει ένα τελεστή

$$P^{\gamma}_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M \quad \text{με} \quad P^{\gamma}_{t_0,t_1}(V_0) = V(t_1)$$

όπου $V(t)$ η παράλληλη μεταφορά του V_0 στη γ.

$P^{\gamma}_{t_0,t_1}$ είναι ισομορφισμός, γιατί η διαφορική εξίσωση που λύνουμε είναι γραμμική και θα παίρνει γραμμικά ανεξάρτητα διαν. σε γραμμικά ανεξάρτητα. Και επίσης λόγω $\exists!$ λύσεων $(P^{\gamma}_{t_0,t_1})(\alpha w + v) = \alpha (P^{\gamma}_{t_0,t_1})(w) + (P^{\gamma}_{t_0,t_1})(v)$, άρα γραμμ. απεικόνιση.

Πρόταση: $$\frac{DV}{dt}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{(P^{\gamma}_{t_0,t})^{-1}(V(t)) - V(t_0)}{t - t_0}$$

για κάθε C^∞ διαν. πεδίο στη γ.

Απόδειξη: Έστω $\{E_{i,0}\}$ βάση για το $T_{\gamma(t_0)}M$. και ορίζουμε $E_i(t)$ την παράλληλη μεταφορά του $E_{i,0}$ στη γ.

Τότε $\frac{DE_i(t)}{dt} = 0$ και $\{E_i(t)\}$ δίνει βάση για το $T_{\gamma(t)}M$ αφού παίρνει ΓΑ σε ΓΑ διανύσματα.

Άρα γράφουμε $V(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)\, E_i(t)$ $\forall t$

Από τον ορισμό $P^{\gamma}_{t_0,t}$ έχουμε ότι $P^{\gamma}_{t_0,t}(E_{i,0}) = E_i(t)$.

Τότε $\frac{DV}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(v_i'(t)\, E_i(t) + v_i(t)\, \underbrace{\cancel{\frac{DE_i(t)}{dt}}}_{0}\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i'(t)\, E_i(t)$

και $\frac{DV}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} v_i'(t_0)\cdot E_i(t_0) = \sum_{i=1}^{n} v_i'(t_0)\, E_{i,0}$.

Από τη γραμμικότητα του $P^{\gamma}_{t_0,t}$ ~~ισο~~ και ότι 1-1

άρα ισομορφισμός, έχουμε ότι

$$\left(P^{\gamma}_{t_0,t}\right)^{-1}(V(t)) - V(t_0) = \left(P^{\gamma}_{t_0,t}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i(t)\, E_i(t)\right) - V(t_0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[v_i(t)\cdot \underbrace{\left(P^{\gamma}_{t_0,t}\right)^{-1}(E_i(t))}_{\parallel\, E_{i,0}} - v_i(t_0)\cdot E_{i,0}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(v_i(t) - v_i(t_0)\right) E_{i,0}.$$

Άρα $$\lim_{t\to t_0} \frac{\left(P^{\gamma}_{t_0,t}\right)^{-1}(V(t)) - V(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{v_i(t) - v_i(t_0)}{t - t_0}\right) E_{i,0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i'(t_0)\cdot E_{i,0} \equiv \frac{DV}{dt}(v_0)$$

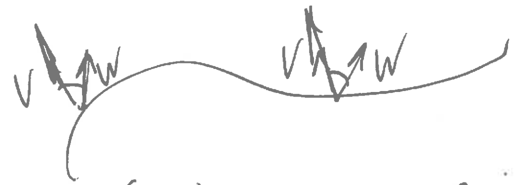
$\square$

Σημείωση: Μέχρι στιγμής, για τον ορισμό $\frac{D}{dt}$ και ∇ δεν έχουμε χρησιμοποιήσει τη μετρική.
Θα θέλαμε ∇, $\frac{D}{dt}$ να "σέβονται" τη μετρική

Συνδέσμοι Riemann:

Έστω $V(t), W(t)$ παράλληλα διαν. πεδία στη γ $\left(\frac{DV}{dt} = \frac{DW}{dt} = 0\right)$.
Όταν M πολλ/τα Riemann, τότε ορίζεται $\langle V(t), W(t)\rangle_{\gamma(t)}$

- Θα θέλαμε αυτό το εσωτερικό γινόμενο να παραμένει σταθερό όταν τα $V(t), W(t)$ είναι παράλληλα
-όπως στο $\mathbb{R}^n$



Αυτό συνεπάγεται και $\langle V(t), V(t)\rangle =$ σταθερό $\forall t$
άρα διατηρείται και η νόρμα παράλληλων διαν. πεδίων.

Ορισμός: Έστω (M, g) πολλ/τα Riemann με ομοπαραλληλικό σύνδεσμο ∇.
Ο σύνδεσμος ∇ είναι συμβατός με τη μετρική $g = \langle\, ,\, \rangle$ αν για κάθε λεία καμπύλη γ και για κάθε ζεύγος παράλληλων διαν. πεδίων V, W στη γ ισχύει ότι $\langle V(t), W(t)\rangle_{\gamma(t)} =$ σταθερά $\forall t$.

Πρόταση: Έστω M πολλ/τα Riemann.
Ένας σύνδεσμος ∇ στην M είναι συμβατός με τη μετρική της ανν για κάθε ζεύγος C^∞ διαν. πεδίων V, W σε διαφ. καμπύλη $\gamma: I \to M$ ισχύει ότι

$$\frac{d}{dt}(\langle V,W\rangle)=\left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle+\left\langle V,\frac{DW}{dt}\right\rangle \qquad \forall t\in I$$

Απόδειξη:

$(\Leftarrow)$ Αν ισχύει η πιο πάνω ισότητα και V,W παράλληλα στη γ τ.ω. $\frac{DV}{dt}=\frac{DW}{dt}=0$, τότε

$$\frac{d}{dt}(\langle V,W\rangle)=0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \langle V(t),W(t)\rangle = c \text{ σταθερά } \forall t.$$

Άρα ∇ συμβατός με τη μετρική.

$(\Rightarrow)$ Για $t_0\in I$ έστω $\{E_{1,0},\dots,E_{n,0}\}$ ο.κ. βάση για το $T_{\gamma(t_0)}M$.

Τότε για κάθε $E_{i,0}$ υπάρχει μοναδικό παράλληλο διαν. πεδίο $E_i(t)$ στη γ τ.ω. $E_i(t_0)=E_{i,0}$ και $\frac{DE_i}{dt}=0$ στο I.

Αφού ∇ συμβατός σύνδεσμος, τότε

$$\langle E_i(t),E_j(t)\rangle=\langle E_i(t_0),E_j(t_0)\rangle=\delta_{ij} \qquad \forall t\in I.$$

και άρα $\{E_1(t),\dots,E_n(t)\}$ ο.κ. βάση για το $T_{\gamma(t)}M$ $\forall t$.

Αν $V(t), W(t)$ C^∞ διαν. πεδία στη $\gamma(t)$, τότε

$V(t)=\sum_{i=1}^{n} v_i(t)E_i(t)$ και $W(t)=\sum_{j=1}^{n} w_j(t)E_j(t)$, με v_i, w_j C^∞ συναρτήσεις.

Άρα $\frac{d}{dt}\left(\langle V(t), W(t)\rangle\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \langle v_i(t) E_i(t), w_j(t) E_j(t)\rangle\right) =$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i(t) w_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(v_i'(t) w_i(t) + v_i(t) w_i'(t)\right) = (*)$$

Επίσης $\frac{DV}{dt} = \frac{D}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i(t) E_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(v_i'(t) E_i(t) + v_i(t) \frac{DE_i}{dt}\right) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i'(t) E_i(t)$$

και παρόμοια $\frac{DW}{dt} = \sum_{j=1}^{n} w_j'(t) E_j(t)$

Άρα $\langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle = \sum_{i,j}\left[\langle v_i'(t) E_i(t), w_j(t) E_j(t)\rangle + \langle v_i(t) E_i(t), w_j'(t) E_j(t)\rangle\right] =$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(v_i'(t) w_i(t) + v_i(t) w_i'(t)\right)$$ αφού $\{E_i\}$ o.κ.

$= (*)$

$\square$.

<u>Πόρισμα:</u> Ένα σύνδεσμος ∇ είναι συμβατός με τη μετρική μιας πολλαπλότητας Riemann ανν

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M).$$

<u>Απόδειξη:</u> Στο σημείο p $X\langle Y,Z\rangle$, $\nabla_X Y$ και $\nabla_X Z$ εξαρτώνται μόνο από την τιμή του X στο p, $X(p)$ και τις τιμές των Y, Z σε καμπύλη $\gamma(t)$ με $\gamma(0)=p$ και $\gamma'(0)=X(p)$.

Τότε $X\langle Y,Z\rangle = \frac{d}{dt}\langle Y,Z\rangle\Big|_{t=0}$

και $\nabla_X Y = \frac{DY}{dt}$, $\nabla_X Z = \frac{DZ}{dt}$.

Άρα $X\langle Y,Z\rangle\Big|_p = \langle \nabla_X Y, Z\rangle\Big|_p + \langle \nabla_X Z, Y\rangle\Big|_p$

$$\iff \frac{d}{dt}\langle Y,Z\rangle\Big|_{t=0} = \left\langle \frac{DY}{dt}, Z\right\rangle\Big|_{t=0} + \left\langle Y, \frac{DZ}{dt}\right\rangle\Big|_{t=0}$$

το οποίο ισχύει από την προηγούμενη πρόταση $\square$.

<u>Πρόταση:</u> Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο σύνδεσμος ∇ είναι συμβατός με τη μετρική

(ii) $\forall V,W$ C^∞ διαν. πεδία σε C^∞ καμπύλη γ

$$\frac{d}{dt}\langle V,W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle$$

(iii) $\forall V,W$ παράλληλα C^∞ διαν. πεδία σε C^∞ καμπύλη γ
$\langle V,W\rangle$ = σταθερά

(iv) $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ $\quad X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

(v) $\forall$ C^∞ καμπύλη γ η παράλληλη μεταφορά
$P^{\gamma}_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ είναι ισομετρία $\forall t_0, t_1$

* Άσκηση 632 - από την απόδειξη της πρότασης.

<u>Ορισμός:</u> Ένας σύνδεσμος ∇ σε C^∞ πολλ/τα M ονομάζεται <u>συμμετρικός</u> αν

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

<u>Παρατήρηση:</u> Σε χάρτη συντεταγμένων $(U,\mathbb{X})$ $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$.

άρα $$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i,j$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}^{k} - \Gamma_{ji}^{k}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = 0 \quad \forall i,j$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \quad \forall i,j,k.$$

∇ συμμετρικός ανν $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}$ $\forall i,j,k$

- συμμετρία για σύμβολα Christoffel στην κάτω θέση.

<u>Θεώρημα</u> (Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας Riemann/ Θεώρημα Levi-Civita).

Έστω (M,g) πολλ/τα Riemann.
Τότε υπάρχει ένας μοναδικός σύνδεσμος ∇ στην M ο οποίος είναι (a) συμμετρικός και
(b) συμβατός με τη μετρική.

Ο σύνδεσμος αυτός ονομάζεται σύνδεσμος Levi-Civita.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι υπάρχει για να τον υπολογίσουμε.

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$
$$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$
$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

$\therefore X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle =$

$= \langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\rangle =$

$= 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle [Y,X], Z\rangle + \langle [X,Z], Y\rangle + \langle [Y,Z], X\rangle =$

$$\Rightarrow \langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\Big[X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [Y,X],Z\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Z,Y],X\rangle\Big] = (*)$$

Παρατηρούμε ότι το Δ.Μ $(*)$ εξαρτάται μόνο από τη μετρική αφού $[\,,\,]$ δίνεται από την πολλά.

Άρα αν ∇ υπάρχει τότε είναι μοναδικός γιατί $\langle \nabla^1_X Y, Z\rangle = \langle \nabla^2_X Y, Z\rangle$ $\forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$ λόγω της ισότητας με $(*)$ πιο πάνω και των δύο.

Ταυτόχρονα αν ορίσουμε $\nabla_X Y$ τ.ω. $\langle \nabla_X Y, Z\rangle = (*)$ $\forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$ τότε μπορούμε να δείξουμε ότι ∇ είναι συνδεσμος (ικανοποιεί (i),(ii),(iii) του ορισμού συνδέσμου) και είναι συμμετρικός και συμβατός (632: Άσκηση).

$\square$

Υπολογισμός ∇ μέσω (*) σε χάρτη συντεταγμένων (U, X). Αρκεί να βρούμε τα Γ_{ij}^{k}.

Υπενθύμιση: $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0 \quad \forall i,j$

Άρα από (*):

$$\left\langle \nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle = \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^{m} \cdot g_{ml} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(g_{jl}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{il}) - \frac{\partial}{\partial x_l}(g_{ij})\right]$$

Έστω $(g^{lk})_{lk}$ ο αντίστροφος πίνακας του $(g_{ij})_{ij}$

τ.ω. $\sum_{j=1}^{n} g_{ij} \, g^{jk} = \delta_i^k$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με g^{lk} και προσθέτοντας ως προς l:

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^{m} \underbrace{g_{ml} \cdot g^{lk}}_{\delta_{km}} = \sum_{l=1}^{n} g^{lk} \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(g_{jl}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{il}) - \frac{\partial}{\partial x_l}(g_{ij})\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{lk}\left[g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}\right]}$$

όπου $g_{ij,l} := \frac{\partial}{\partial x_l}(g_{ij})$.

Παρατηρούμε ότι $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \quad \forall i,j$.

- Στον ευκλείδιο χώρο $\Gamma_{ij}^{k} \equiv 0 \to$ επίπεδος.