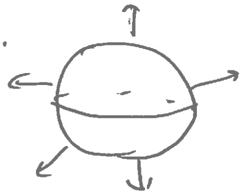
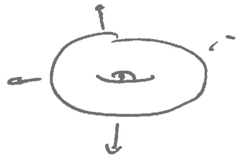
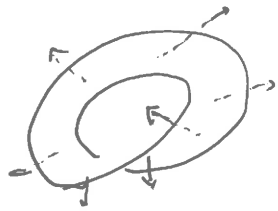
632: Προσανατολισμός:

Για επιφάνειες: M^2 προσανατολιζόμενη αν υπάρχει μη-μηδενικό κάθετο διανυσματικό πεδίο. $\vec{N}(p) \perp T_pM$ $\forall p \in M$.
$(M^2 \subset \mathbb{R}^3)$.





Στον ιμάντα του Moebius δεν ισχύει



Ορισμός: Έστω M διαφορίσιμη πολ/τα. Η M είναι προσανατολιζόμενη (προσανατολισμένη) αν επιδέχεται διαφ. δομή $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}_\alpha$ τ.ω. $\forall \alpha, \beta$ με $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ το διαφορικό της απεικόνισης $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ να έχει θετική ορίζουσα.

Δηλαδή $\det\left(D\left(X_\beta^{-1} \circ X_\alpha\right)\right) = \det\left(\frac{\partial y_j^\beta}{\partial x_i^\alpha}\right) > 0.$

Παράδειγμα: Αν η M μπορεί να καλυφθεί με δύο γειτονιές U_1, U_2 έτσι ώστε $U_1 \cap U_2$ συνεκτικό υποσύνολο της M, τότε η M είναι προσανατολισμένη.

- Στο $U_1 \cap U_2$ $\det\left(\frac{\partial y_j^\beta}{\partial x_i^\alpha}\right) \neq 0$ αφού διαφ. πολ/τα.
  και μπορούμε να κάνουμε αυτή την ορίζουσα θετική αν είναι αρνητική με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών π.χ. αλλάζοντας τη σειρά των μεταβλητών στην παραμέτρηση.
  π.χ. αντί $\phi(r, \theta) = (\phi_1, \phi_2)$
  να βάλουμε $\phi(\theta, r) = (\phi_1, \phi_2)$. - αλλάζουν οι στήλες θέση.

Διανυσματικά πεδία και διαφορικές εξισώσεις σε πολλές.

<u>Ορισμός:</u> Ένα <u>διανυσματικό πεδίο</u> στην M είναι μια απεικόνιση $V: M \to TM$ με $V(p) \in T_pM$.
Είναι διαφορίσιμο αν η απεικόνιση V είναι διαφορίσιμη.

Δηλαδή: $V(p) = \sum_{i=1}^{n} V_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$ στη γειτονιά (U, X)

V διαφορίσιμο ανν $V_i(p)$ διαφορίσιμη στις συντεταγμένες X ($\Leftrightarrow$ διαφ. $\forall$ χάρτη συντεταγμένων).

π.χ. $\mathbb{R}^n$: $V(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$

S^2: $V = V_1(u,v) \frac{\partial}{\partial u} + V_2(u,v) \frac{\partial}{\partial v}$: σε καρτεσιανές

$= W_1(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} + W_2(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \phi}$: σε σφαιρικές.

- Σε κάθε γειτονιά άλλες συντεταγμένες, αλλά αν έχουμε διαφορική δομή και οι συντελεστές είναι διαφορίσιμοι, τότε θα είναι διαφορίσιμη ως προς οποιουσδήποτε άλλους χάρτες.

<u>Εναλλακτικός ορισμός:</u> Ένα διανυσματικό πεδίο είναι ένας τελεστής στο χώρο διαφορίσιμων συναρτήσεων $\mathcal{D}$.

$V: \mathcal{D} \to \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$: οι συναρτήσεις στην M)

με $(Vf)(p) = \sum_{i=1}^{n} V_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ ($f \in \mathcal{D}$ γραμμένη ως προς X).

Vf: δεν εξαρτάται από χάρτη συντεταγμένων, αλλά μόνο από $V(p)$.
$V(p)$: δίνει μια κατευθυνόμενη παράγωγο στο p.

<u>Ορισμός</u>: Έστω ϕ μια C^∞ απεικόνιση ανάμεσα στις διαφ. πολλ/τες M_1, M_2, $\phi: M_1^n \to M_2^m$.

Αν f είναι μια λεία ~~συν~~ συνάρτηση στην M_2 τότε ορίζουμε $\phi^*(f) = f \circ \phi$, το pull-back της f που είναι μια λεία απεικόνιση στην M_1

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{\phi} & M_2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ p & & \phi(p) & & \end{array} \qquad (\phi^*(f)(p) = f \circ \phi(p))$$

Αν V λείο διανυσματικό πεδίο στην M_1, ορίζουμε $\phi_*(V) = d\phi(V)$ το push-forward του V, που είναι ένα λείο διαν. πεδίο στην M_2 τ.ω.

$$\phi_*(V_p)(f)\big|_{\phi(p)} = V_p(f \circ \phi)(p) \qquad \text{για } f \ C^\infty \text{ στην } \underline{\underline{M_2}}$$

$$\phi_*: T_p(M_1) \to T_{\phi(p)} M_2$$

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{\phi} & M_2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ V_p & & d\phi(V_p) = \phi_*(V_p) & & \end{array}$$

ϕ^*: παίρνει συναρτήσεις στην M_2 σε συναρτήσεις στο M_1 (ομομορφισμός)

ϕ_*: παίρνει διανυσματικά πεδία στην M_1 σε διαν. πεδία στην M_2 μέσω του πίνακα παραγώγων της ϕ, $d\phi$.

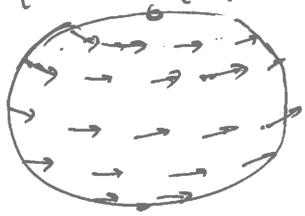
$\phi_*(V_p)$: διάνυσμα στην M_2, αφού παραγωγίζει συναρτήσεις στην M_2.

Άσκηση ① Αν $h = \phi \circ \psi$ $\quad \psi : M_1 \to M_2$
$\phi : M_2 \to M_3$ $\quad C^\infty$.

Να βρεθούν h_* και h^* ως προς ψ, ϕ.

② Πρόταση Έστω $\phi : M \to N$ διαφορομορφισμός της M επί ανοικτού συνόλου της N.
Τότε $\phi_* : T_p M \to T_{\phi(p)} N$ είναι ένας επί ισομορφισμός.
$(\phi_*(v + \lambda w) = \phi_*(v) + \lambda \phi_*(w)$.

Πληροφοριακά: (i) Στη σφαίρα S^2 δεν υπάρχει συνεχές διανυσματικό πεδίο που να είναι παντού μη-μηδενικό. - Δεν μπορείς να κτενίσεις τη σφαίρα χωρίς στροβίλους.



(ii) Στην S^3 υπάρχουν 3 μη-μηδενικά διανυσματικά πεδία (που είναι ορθοκανονικά στο $\mathbb{R}^4$ ως προς τη μετρική του $\mathbb{R}^4$)

Για $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$

$$V_1 = -x_2\partial_1 + x_1\partial_2 + x_4\partial_3 - x_3\partial_4$$
$$V_2 = -x_3\partial_1 - x_4\partial_2 + x_1\partial_3 + x_2\partial_4$$
$$V_3 = -x_4\partial_1 + x_3\partial_2 - x_2\partial_3 + x_1\partial_4.$$

$V(p) = \sum_{i=1}^{n} v_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$ μέσω της βάσης

$\{\partial/\partial x_i\}_{i=1}^{n}$ σε γειτονιά (U, X).

$\therefore (Vf)(p) = \sum_{i=1}^{n} v_i(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ (η f σε συντεταγμένες x_i).

Για διανυσματικά πεδία V, W στην M

Αν $V \cdot W(f) \equiv V(W(f))$ τότε το $V \cdot W$ δεν

είναι διανυσματικό πεδίο γιατί δεν παραγωγίζεται μόνο

η f ως προς $\partial/\partial x_i$, αλλά εμφανίζονται και παράγωγοι 2ης τάξης για την f.

Επίσης γενικά $VW \neq W \cdot V$.

Έχουμε όμως το ακόλουθο αποτέλεσμα:

<u>Λήμμα.</u> Έστω V, W διαφ. διανυσματικά πεδία σε διαφ. πολλτα M.

Τότε υπάρχει ένα μοναδικό διανυσματικό πεδίο Z

τ.ω. $\forall f \in \mathcal{D}$ $Z(f) = (V \cdot W - W \cdot V)(f)$.

<u>Απόδειξη.</u> Σε γειτονιά (U, X) του p στην M

$V = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial}{\partial x_j}$

Για $f \in \mathcal{D}$ $VW(f) = V\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) =$

$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + v_i w_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$

Παρόμοια: $W\cdot V(f) = W\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) =$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\left(w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i} + w_j v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)$$

f σε συντεταγμένες: $f(x_1, \dots, x_n)$ από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$

άρα $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\forall i, j$

Άρα $(VW - W\cdot V)(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j} - w_j \underset{\substack{\uparrow \\ i \leftrightarrow j}}{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}} \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - w_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right]}_{\equiv z_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$\equiv z_j$, το οποίο είναι C^∞ συνάρτηση για V, W C^∞.

και $(VW - WV)(f) \equiv Z(f)$ για $Z = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Το Z είναι μοναδικό γιατί ορίζεται με τον ίδιο τρόπο και σε άλλες συντεταγμένες

$\square$

<u>Παράδειγμα</u>: Για $V = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$ $W = y^2\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y}$ στο $\mathbb{R}^3$

$VW - WV = x\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) + y\frac{\partial}{\partial z}\left(y^2\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$ φεύγουν οι παράγωγοι 2ης τάξης.

$- y^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right) + z\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right) =$

$= 0 + y\frac{\partial}{\partial z}(-z)\frac{\partial}{\partial y} - y^2\frac{\partial}{\partial x}(x)\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}(y)\frac{\partial}{\partial z} = -y\frac{\partial}{\partial y} - y^2\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z}$

Ορισμός: (i) $[V,W] = VW - WV$ ~~ορίζεται~~ ορίζεται ως η αγκύλη Lie σε διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία στην M

(ii) $\mathfrak{X}(M)$ ορίζεται ως το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων στην M.

$[\ ,\ ]$: προσφέρει μια δομή άλγεβρας Lie στο $\mathfrak{X}(M)$ και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

Πρόταση. Έστω $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ και $a, b, c \in \mathbb{R}$, f, g διαφορίσιμες συναρτήσεις. Τότε.

(i) $[X,Y] = -[Y,X]$ (αντισυμμετρική ιδιότητα)

(ii) $[aX+bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$ (γραμμικό στην 1η θέση)
(από (i) $\Rightarrow$ γραμμικό και στη 2η)

(iii) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ Ταυτότητα Jacobi

(iv) $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

$\mathfrak{X}(M)$ με την "πράξη" $[\ ,\ ]$ ονομάζεται άλγεβρα Lie λόγω των ιδιοτήτων (i)–(iii) (όχι iv).

Απόδειξη: (i), (ii) ✓

(iii) $A.M = [XY - YX, Z] + [YZ - ZY, X] + [ZX - XZ, Y] =$

$= \cancel{XYZ} - \cancel{YXZ} - \cancel{ZXY} + \cancel{ZYX} + \cancel{YZX} - \cancel{ZYX} - \cancel{XYZ} + \cancel{XZY}$
$+ \cancel{ZXY} - \cancel{XZY} - \cancel{YZX} + \cancel{YXZ} = 0$

(iv) $[fX, gY] = fX(gY) - gY(fX) = fX(g)Y + \underline{f\cdot g\, X(Y)} - gY(f)X \underline{- gf\, Y(X)}$

$= fX(g)\cdot Y - gY(f)X + fg[X,Y]$

Παρατήρηση: Αν X, Y διανυσματικά πεδία που είναι γραμμικοί συνδυασμοί συντεταγμένων με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή $X = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ $Y = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ με $c_i, b_j \in \mathbb{R}$ σταθερές σε όλη την M, τότε $[X, Y] = 0$. Φυσικά $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ $\forall i, j$

π.χ. S^2 $[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi}] = 0$

αφού $[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi}](f) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}(f)\right) - \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(f)\right) = 0$

Δεν ισχύει για γενικά διαν. πεδία όπου οι συντελεστές των $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ είναι συναρτήσεις και όχι σταθερές.

Διαφορικές Εξισώσεις σε πολλές:

Στο $\mathbb{R}^n$: Έστω $\vec{V}$ διαν. πεδίο με τιμές στο $\mathbb{R}^n$ που να μην εξαρτάται από το χρόνο:
$\vec{V}(\vec{x}) = (v_1(\vec{x}), \ldots, v_n(\vec{x}))$ $\quad C^\infty$.

Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων σε διαφ. εξισώσεις
$\forall p \in \mathbb{R}^n$ $\exists\, U \ni p$, $\delta > 0$ και διαφ. συνάρτηση με τιμές στο $\mathbb{R}^n$ $\vec{\psi}(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ τ.ω.

$$\frac{d\vec{\psi}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\psi}_n \end{bmatrix} = \vec{V}(\vec{\psi}(t)) = \begin{bmatrix} v_1(\vec{\psi}(t)) \\ \vdots \\ v_n(\vec{\psi}(t)) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \vec{\psi}(0) = p.$$

Η λύση είναι μοναδική.

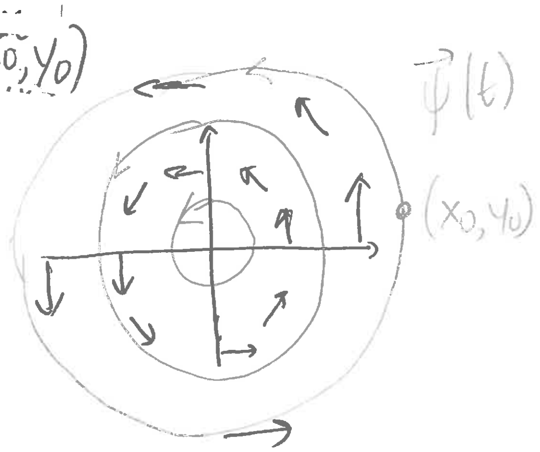
π.χ. $n=1$ αν $V(x) = x$, τότε $\exists!\, \psi(t)$ με

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi(t) \quad \text{και} \quad \psi(0) = x_0 \; : \; \psi(t) = x_0 e^t \qquad \Big(V(x) = x\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{\text{μια κατεύθυνση}}\Big)$$

$n=2$ αν $V(x_1,x_2) = (-x_2, x_1) = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$, τότε

$\psi(t) = (x_0\cos t - y_0\sin t,\; x_0\sin t + y_0\cos t) = (\psi_1,\psi_2)$ ικανοποιεί $\dot{\psi}(t) = (-\psi_2, \psi_1) = \vec{V}(\vec{\psi}(t))$

και $\psi(0) = (x_0, y_0)$

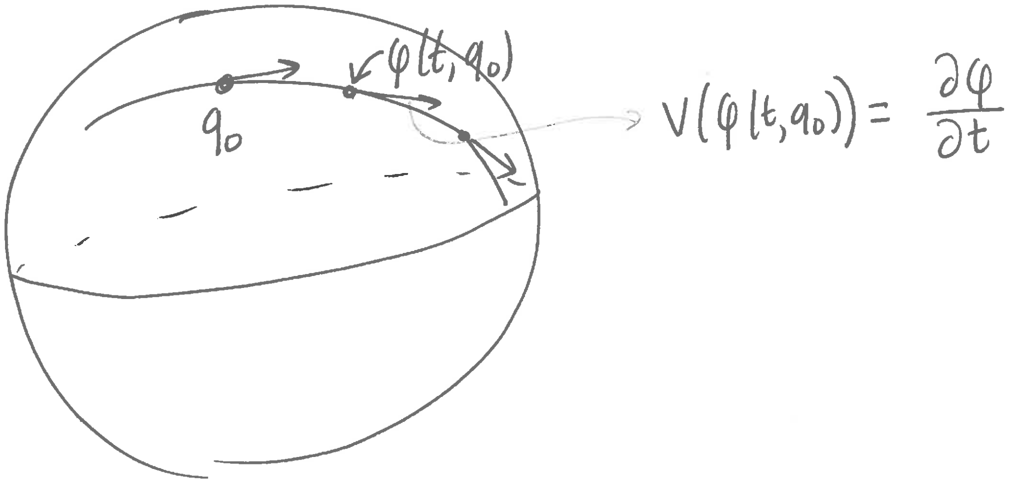


Γενικά:
$\varphi(t, x_0) = \psi_{x_0}(t)$ που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $\psi(0) = x_0$. $\quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \psi_{x_0}'(t)$

Σε πολ/τες: Για διαν. πεδίο V θέλουμε τις λύσεις ≡ ροές που αντιστοιχούν σε αυτό.
Τοπική ύπαρξη από θεωρία διαφ. εξισώσεων

<u>Θεώρημα:</u> Έστω V C^∞ διαν. πεδίο σε διαφ. πολ/τα M και $p \in M$. Τότε υπάρχει $U \subset M$ γειτονιά του p $\delta > 0$ και διαφ. απεικόνιση $\varphi(t,q): (-\delta,\delta) \times U \to M$ τ.ω. $\forall t \in (-\delta,\delta)$, $q_0 \in U$ η καμπύλη
$\psi_{q_0}(t): t \longmapsto \varphi(t,q_0) \in M$ είναι η μοναδική καμπύλη που ικανοποιεί $\psi'_{q_0}(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V(\varphi(t,q_0))$
και $\psi_{q_0}(0) = q_0 \cdot (= \varphi(0,q_0))$

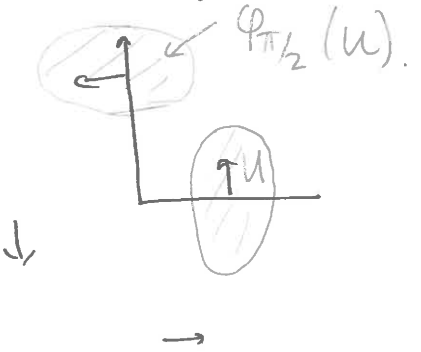
$\varphi(t,q_0)$: εξαρτάται από το αρχικό σημείο q_0, αλλά
$\varphi(t,q_0) \in M$ - καμπύλη με τιμές στην M.
και ταχύτητα (ως προς t) αυτήν του διαν. πεδίου στο σημείο $\varphi(t,q_0)$ της καμπύλης.



Η λύση $\varphi(t,q_0)$: είναι C^∞ τόσο ως προς t, όσο και ως προς q_0 τοπικά.

V ονομάζεται και απειροστικός γεννήτορας.

Για t σταθερό $\varphi_t(x)=\varphi(t,x)$: η τοπική ροή του V - που βρίσκονται τα αρχικά σημεία x (q_0) μετά από χρόνο t. Για $x\in U$ $\{\varphi_t(x) \mid x\in U\}$ η ροή των σημείων U μετά από χρόνο t.



Για μια διαφορίσιμη ροή $\varphi(t,x) : I\times U \to M$.
τότε $\dot{\varphi}(0,x)\equiv V(x)$ δίνει τον απειροστικό γεννήτορα.

<u>Παρ.</u>: ① Για $V(x,y)=(x, xy^2)$

Επίλυση:
$$\dot{x}=x \Rightarrow x=x_0e^t, \quad \dot{y}=xy^2 \quad \Big\} \quad \dot{y}/y^2 = x = x_0e^t$$
$$\Rightarrow \int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y^2} = \int_0^t x_0e^t\,dt$$
$$\therefore -\frac{1}{y}+\frac{1}{y_0} = x_0e^t - x_0 \Rightarrow y = \frac{y_0}{1+x_0y_0 - x_0y_0e^t}$$
$$\varphi(t,x_0,y_0) = \left(x_0e^t, \frac{y_0}{1+x_0y_0-x_0y_0e^t}\right)$$

② Αν $\varphi(t,x,y) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t)$

Τότε
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (-x\sin t - y\cos t, x\cos t - y\sin t)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,x,y) = (-y,x) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} = V(x,y)$$

$\varphi_t: U \to M$ η τοπική ροή που ορίζει το διαν. πεδίο V. — μια απεικόνιση από $U \subset M$ στην M.

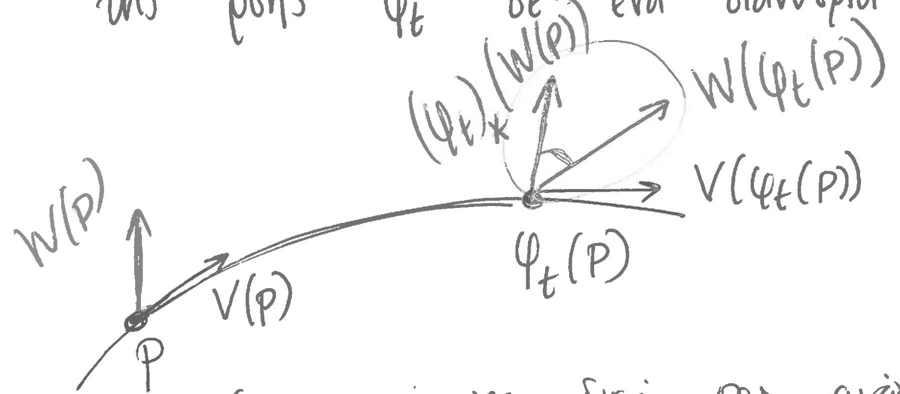
Τότε $d\varphi_t : T_pM \to T_{\varphi_t(p)}M$ για $p \in U$.

<u>Πρόταση:</u> Έστω V, W C^∞ διαν. πεδία στην M, $p \in M$ και φ_t η τοπική ροή του V σε μια γειτονιά $U \ni p$. Τότε:

$$[V,W](p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[W - (d\varphi_t)(W)\right](\varphi_t(p))$$

$W(\varphi_t(p))$ = διαν. πεδίο W στο $\varphi_t(p)$.

$(d\varphi_t)(W) = (\varphi_t)_*(W)(\varphi_t(p))$: παίρνει το $W(p)$ μέσω της ροής φ_t σε ένα διάνυσμα στο $\varphi_t(p)$



(επιλεκτικά για δική σας ανάγνωση για το 432)

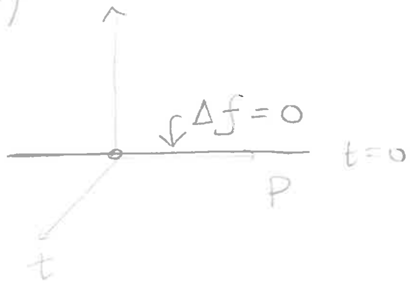
<u>Απόδειξη:</u> "=" ισχύει αν $\forall f \in \mathcal{D}$

$$([V,W](f))(p) = \lim_{t\to 0} \frac{Wf - ((d\varphi_t(W))(f)}{t}(\varphi_t(p))$$

$$((d\varphi_t(W))(f))(\varphi_t(p)) = W(f\circ\varphi_t)(p)$$

Όπως $(f\circ\varphi_t)(p) = f(p) + \underbrace{\left[f(\varphi_t(p)) - f(p)\right]}_{\Delta f}$

$\Delta f = 0$ όταν $t=0$ $\forall p \in U$ $\quad (\varphi_0(p) = p)$



Άρα παίρνουμε από Taylor ότι

$\Rightarrow \Delta f = t\cdot g(t,p)$ στη U όπου

g διαφ. τ.ω. $g(0,p) = \frac{\partial}{\partial t}\left[f(\varphi_t(p)) - f(p)\right]\Big|_{t=0}$

$(*) = Vf(p)$ από τον ορισμό του φ_t

$\therefore \quad W(f\circ\varphi_t)(p) = W(f(p) + t\cdot g(t,p))$

$$\therefore \lim_{t\to 0} \frac{\left[(Wf)(\varphi_t(p)) - W(f\circ\varphi_t)(p)\right]}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{(Wf)(\varphi_t(p)) - (Wf)(p)}{t} - W(\underbrace{g(t,p)}_{\downarrow\ g(0,p)})\right]$$

$$\overset{\text{όπως } (*)}{=} V(Wf)(p) - W(Vf)(p) = [V,W](p)$$

Μετρική Riemann:

Μια πολ/τα έχει τοπολογικό και διαφορικό χαρακτήρα

Δεν έχει όμως μετρικό χαρακτήρα - π.χ. για ορισμό απόστασης ανάμεσα σε σημεία.

$\mathbb{R}^n$: $d(x,y) = \|x-y\|$

$= \inf\limits_{\gamma_{xy}} L(\gamma_{xy})$ όπου γ_{xy}: καμπύλη από το x στο y.
και $L(\gamma_{xy})$ το μήκος της.

$$L(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle^{1/2} dt$$

γ': εφ. διάνυσμα - ορίζεται σε M

$\langle\, ,\rangle$: εσ. γινόμενο ≡ μετρική σε M
-πρέπει να οριστεί.

Επανάληψη:
Σε επιφάνειες $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ $\|x-y\|$ δεν έχει νόημα.

$d(x,y)$ μπορεί να οριστεί μόνο μέσω $\inf\limits_{\gamma_{xy}} L(\gamma_{xy})$.

Χρειάζεται λοιπόν εσωτερικό γινόμενο ανάμεσα σε διανύσματα στο T_pM: 1η θεμελιώδης μορφή: $I_p(v,w) = \langle v,w\rangle_p$.
(επαγόμενη από $\mathbb{R}^3$).

I_p: δε διατηρείται από διαφορομορφισμούς αλλά από ισομετρίες.

Οδηγεί στον ορισμό άλλων ενδιαφερόντων εννοιών:

Έστω N μοναδιαίο κάθετο διαν. πεδίο με $N(p) \perp T_p M$ (έχει νόημα στο $\mathbb{R}^3$ σε ~~γ~~ γενική πολ/τα όχι).

Δείξαμε ότι $dN_p : T_pM \to T_pM$
και ορίσαμε $II_p(v) = \langle dN_p(v), v \rangle_p$ τη $2^η$ θεμελιώδη μορφή. II_p: είναι τετραγωνική μορφή έχει 2 ιδιοτιμές κ_1, κ_2: οι κύριες καμπυλότητες της M στο p.

$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$: η καμπυλότητα Gauss στο p.

Θεώρημα Gauss-Bonnet: $\int_M K\, dA = 2\pi \chi(M)$ για M προσανατολισμένη, συμπαγή και $\chi(M) = 2 - 2g$.
g: γένος της M


$g=0$


$g=4$.

K: μας δίνει πόσο γρήγορα μεγαλώνει η M. σε εμβαδό.
$\langle\ ,\ \rangle_p$: οδηγεί επίσης στο ορισμό των συμβόλων Christoffel και γεωδαισιακών - καμπύλες με επιτάχυνση κάθετη στο T_pM οι οποίες τοπικά ελαχιστοποιούν την απόσταση.

- Παρόμοια ξεκινώντας από $\langle\ ,\ \rangle_p$ θα δώσουμε τέτοιες έννοιες σε γενική πολ/τα που θα συμπίπτουν με αυτές για $M^2 \subset \mathbb{R}^3$

Ορισμός: Μια μετρική Riemann σε διαφ. πολλ/τα M δίνει σε κάθε σημείο $p \in M$ ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle_p$ στον εφαπτόμενο χώρο T_pM που να είναι διαφορίσιμο με την ακόλουθη έννοια:

Για χάρτη συντεταγμένων (U, X) στο $p = X(x_1, \dots, x_n)$ τότε $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ είναι διαφορίσιμη στο U $\forall i, j$.

- Δεν εξαρτάται από τη χάρτη συντεταγμένων
- Εσ. γινόμενο: συμμετρικό, γραμμικό και στις δύο θέσεις και θετικά ορισμένο $\langle x, x\rangle \geq 0$ "=" 0 ανν $x = 0$.

Παράδειγμα: ① $\mathbb{R}^n$ $(x_1, \dots, x_n)$ συντεταγμένες.

$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^{n}$

Ορίζουμε $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_p = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

Η ευκλείδια μετρική.

Αν $v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ τότε $\langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq 0$ "=" 0 $\Leftrightarrow$ $v_i = 0$ $\forall i$.

② $(\mathbb{R}^2)^+ = \{(x,y) \mid y > 0\}$ πολλ/τα. $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$

Ορίζουμε $\langle\ ,\ \rangle$ με $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{y^2}$

$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0$

Υπερβολικό επίπεδο $K = -1$.