Μεταβολές Ενέργειας (Variations of Energy).

Γεωδαισιακές: καμπύλες με μηδενική επιτάχυνση και είδαμε ότι τοπικά ελαχιστοποιούν το μήκος τόξου.

Θα δούμε ότι είναι κρίσιμα σημεία ενός προβλήματος μεταβολής.

(π.χ. ελαχιστοτικές επιφάνειες τοπικά ελαχιστοποιούν το συναρτησιακό εμβαδού (κρίσιμα σημεία του).

Ορισμός: Έστω $c:[0,a]\to M$ μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στην πολλαπλότητα M. Μια συνεχής απεικόνιση

$$f:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,a]\to M \quad \text{τ.ω.}$$

(a) $f(0,t)=c(t)$ για $t\in[0,a]$

(b) $\exists$ διαμέριση του $[0,a]$ σε σημεία $0=t_0<t_1<\dots<t_{k+1}=a$ τ.ω. ο περιορισμός της f σε κάθε $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_i,t_{i+1}]$ $i=0,\dots,k$ είναι διαφορίσιμος.

ονομάζεται μεταβολή της c.

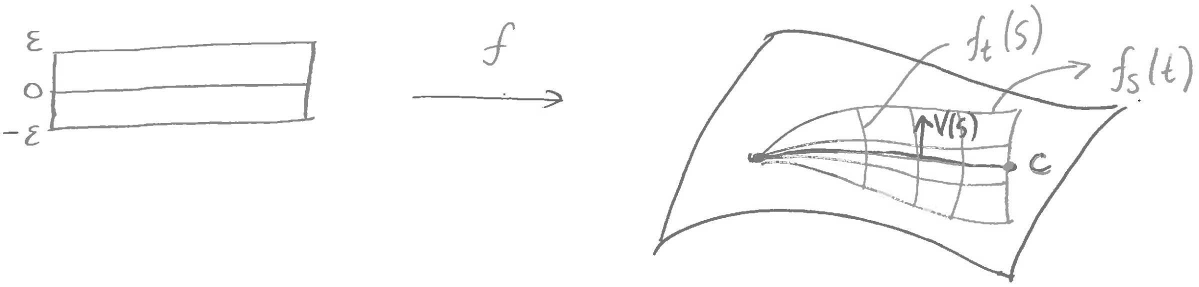
Η μεταβολή ονομάζεται γνήσια (proper) αν $f(s,0)=c(0)$ και $f(s,a)=c(a)$ $\forall s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

Αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε η μεταβολή ονομάζεται διαφορίσιμη.

- Για κάθε $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ η $f_s:[0,a]\to M$ με $f_s(t)=f(s,t)$ είναι μια καμπύλη της μεταβολής.

Η μεταβολή ορίζει μια οικογένεια από γειτονικές καμπύλες $\{f_s(t)\}_s$ της $f_0(t)=c(t)$.

Η μεταβολή είναι γνήσια αν όλες αρχίζουν στο $c(0)$ και τελειώνουν στο $c(a)$.



$f_t(s) = f(s,t)$: εγκάρσια/διατέμνουσα καμπύλη της μεταβολής

Ορίζουμε $V(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{(0,t)}$: το διάνυσμα ταχύτητας της εγκάρσιας καμπύλης στο $s=0$.

$V(t)$: τμηματικά διαφορίσιμο.
ονομάζεται το <u>πεδίο μεταβολής</u> της f

<u>Πρόταση</u> Έστω $V(t)$ ένα κατά τμήματα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο στην κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη $c:[0,a] \to M$.
Τότε υπάρχει μεταβολή $f:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,a] \to M$ της c με πεδίο μεταβολής το V.
Αν $V(0)=V(a)=0$, τότε η f μπορεί να επιλεγεί ως γνήσια μεταβολή.

<u>Απόδειξη</u> $c([0,a])$ συμπαγές υποσύνολο της M αφού c συνεχής.
$\forall t\in[0,a]$ υπάρχει ομοιόμορφα κανονική γειτονιά W_t του $c(t)$ με αντίστοιχη ακτίνα γεωδαισιακών μπαλών δ_t.
$\bigcup_t W_t$ καλύπτει την $c([0,a])$, άρα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα W_{t_i} $i=1,\dots,n$ με ακτίνες δ_i.
Έστω $\delta=\min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$
Τότε $\exp_{c(t)}$ ορίζεται $\forall v\in T_{c(t)}M$ με $|v|<\delta$ και είναι διαφορομορφισμός σε αυτή τη μπάλα.

Έστω $N = \max_{t\in[0,a]} |V(t)|$ και $\varepsilon = \frac{\delta}{N}$.

Τότε $f(s,t) = \exp_{c(t)}(s\,V(t))$ ορίζεται για $|s|<\varepsilon$

$\exp_{c(t)}(s\,V(t)) = \alpha(1, c(t), sV(t))$ η γεωδ. από το $c(t)$ με αρχική ταχύτητα $sV(t)$ τη στιγμή 1

Αφού οι γεωδ. είναι διαφορίσιμες ως προς τις αρχικές συνθήκες $\Rightarrow$ $f(s,t)$ κατά τμήματα διαφορίσιμη.

Έχουμε $f(0,t) = \exp_{c(t)}(0) = c(t)$

και $$\frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{(0,t)} = \left(d\exp_{c(t)}\right)_{sV(t)}(V(t))\Big|_{(0,t)} =$$

$$= \left(d\exp_{c(t)}\right)_0 (V(t)) = V(t)$$

Αν $V(0)=0$ και $V(a)=0$ τότε από τον ορισμό η f είναι γειτονική $\square$

Θα συγκρίνουμε το μήκος της c, με αυτό γειτονικών καμπυλών.

Ορίζουμε
$$L(s) := \int_0^a \left|\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\right| dt \quad \text{για} \quad s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

το μήκος της $f_s(t)$.

Το <u>συναρτησοειδές ενέργειας</u> ορίζεται ως:

$$E(s)=\int_0^a \left|\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\right|^2 dt. \qquad \text{για} \quad s\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

· Για καμπύλη c: $\quad L(c)=\int_0^a |c'|\,dt \qquad E(c)=\int_0^a |c'|^2\,dt.$

· Παρατήρηση:

$$L(s)=\int_0^a \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|\cdot 1\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Schwartz}}}{\leq} \left(\int_0^a \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2 dt\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^a 1\,dt\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow L(s)^2 \leq E(s)\cdot a$$

με "=" ανν $\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| =$ σταθερά

(Schwartz: $\int f\cdot g \leq \left(\int f^2\right)^{1/2}\left(\int g^2\right)^{1/2}$ "=" ανν $f=\lambda g$ σ.π.)

<u>Λήμμα</u> Έστω $p,q\in M$ και γ γεωδαισιακή που ελαχιστοποιεί το μήκος τόξου ανάμεσά τους. Τότε $\forall$ καμπύλη $c:[0,a]\to M$ από το p στο q $\quad E(\gamma)\leq E(c)$

με την ισότητα να ισχύει ανν η c είναι γεωδαισιακή που ελαχιστοποιεί το μήκος τόξου.

Απόδειξη

Από τα πιο πάνω για τη γ έχουμε ότι (αφού $|\gamma'|=1$).

$$aE(\gamma) = a\underbrace{\int_0^a |\gamma'|^2\, dt}_{a} = L(\gamma)^2 \le L(c)^2 \le aE(c)$$

$$\Rightarrow E(\gamma) \le E(c).$$

Με $E(\gamma)=E(c)$ ανν $(E(c))\cdot a = (L(c))^2$ και $L(\gamma)=L(c)$

Αν $(L(c))^2 = aE(c) \Rightarrow |c'| = $ σταθερά.

Επίσης $L(\gamma)=L(c) \Rightarrow c$ γεωδαισιακή που ελαχιστοποιεί το μήκος τόξου με $|c'|=1$. □

- Ενέργεια $\equiv$ μέσος όρος κινητικής ενέργειας για σωματίδιο που κινείται στη $c(t)$. $\equiv$ ενέργεια που χρειάζεται για να έχει αυτή την πορεία. Στις γεωδαισιακές ελαχιστοποιείται - για να έχει άλλη πορεία θα είναι πιο μεγάλου μήκους $\rightarrow$ χρειάζεται πιο πολλή ενέργεια.

Πρόταση (Τύπος για την πρώτη μεταβολή ενέργειας καμπύλης)
(First variation of energy of a curve)

Έστω $c:[0,a]\to M$ κατά τμήματα διαφ. καμπύλη και $f:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,a]\to M$ μια μεταβολή της c.
Αν $E:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ είναι η ενέργεια της f τότε

$$\frac{1}{2}E'(0) = -\int_0^a \left\langle V(t), \frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}\right\rangle dt + \sum_{i=0}^{k} \left\langle V(t), \frac{dc}{dt}\right\rangle\Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-}$$

όπου $t_0=0$ και $t_{k+1}=a$

$V(0)=0=V(a)$ αν η V είναι γνήσια.

Απόδειξη. Εξ ορισμού:

$$E(s)=\int_0^a \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt = \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt$$

$$\frac{d}{ds}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \right) = 2 \cdot \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt$$

$$\underset{\uparrow}{=} 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt =$$

Λήμμα Συμμετρίας

$$= 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt - 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt$$

↓ ΘΘΑΛ

$$= 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} - 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt$$

Όταν $s=0$: $\quad \frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{(0,t)} = V(t) \qquad \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{(0,t)} = \frac{dc}{dt}(t)$

Άρα $\quad \frac{1}{2} E'(0) = \sum_{i=0}^{k} \left\langle V(t), \frac{dc}{dt} \right\rangle \Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} - \int_0^a \left\langle V(t), \frac{D}{dt} \frac{dc}{dt} \right\rangle dt.$

$\square$

<u>Πρόταση (*)</u> Μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη $c:[0,a]\to M$ είναι γεωδαισιακή ανν για κάθε γνήσια μεταβολή της c $\frac{dE}{ds}(0)=0$

<u>Απόδειξη</u>

$(\rightarrow)$ Αν η c είναι γεωδαισιακή τότε είναι διαφορίσιμη και $\frac{dc}{dt}(t_i^+)=\frac{dc}{dt}(t_i^-)$. Επίσης $\frac{D}{dt}\left(\frac{dc}{dt}\right)=0$.

Άρα για V τ.ω. $V(0)=V(a)=0$. το Δ.Μ. $\equiv 0 \Rightarrow E'(0)=0$

$(\leftarrow)$ Έστω $E'(0)=0$ για κάθε γνήσια μεταβολή της c.

$$\therefore\ -\int_0^a \left\langle V(t), \frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}\right\rangle - \sum_{i=1}^{k}\left\langle V(t_i), \frac{dc}{dt}(t_i^+)-\frac{dc}{dt}(t_i^-)\right\rangle = 0.$$

Έστω $V(t)=g(t)\frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}$ όπου $g(t)$ κατά τμήματα διαφ. συνάρτηση στη c με $g(t)>0$ για $t\neq t_i$ και $g(t_i)=0$. για $i=0,\dots,k+1$

Κατασκευάζουμε μια μεταβολή της c με πεδίο μεταβολής το $V(t)$. ($V(0)=V(a)=0$ - άρα γνήσια μεταβολή).

Τότε $\frac{1}{2}E'(0)=-\int_0^a g(t)\cdot\left|\frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}\right|^2 dt = 0$

Αφού $g(t)>0$ εκτός στα t_i, τότε $\frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}=0$ στα (t_i,t_{i+1}) $\forall i$. Άρα η c είναι κατά τμήματα γεωδαισιακή σε αυτά τα διαστήματα.

Τώρα ελέγχουμε τα σημεία t_i:

Έστω $\overline{V}(t)$ ένα άλλο πεδίο μεταβολής με $\overline{V}(0)=0=\overline{V}(a)$ και για $i\neq 0, k+1$ $\overline{V}(t_i)= \frac{dc}{dt}(t_i^+)-\frac{dc}{dt}(t_i^-)$.

Αφού η c είναι γεωδαισιακή, τότε

$$\frac{1}{2}E'(0)=0=-\sum_{i=1}^{k} \langle V(t_i), \frac{dc}{dt}(t_i^+)-\frac{dc}{dt}(t_i^-)\rangle =$$

$$=-\sum_{i=0}^{k} \left|\frac{dc}{dt}(t_i^+)-\frac{dc}{dt}(t_i^-)\right|^2$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dt}(t_i^+)=\frac{dc}{dt}(t_i^-)=0 \quad \forall i\neq 0,k.$$

$\therefore$ η c είναι C^1 $\forall t_i$

Αφού $\frac{D}{dt}\left(\frac{dc}{dt}\right)=0$ εκτός πιθανόν στα t_i και c είναι C^1 ($\frac{dc}{dt}$ είναι C^0 με παράγωγο μηδενική εκτός στα t_i) τότε $\frac{D}{dt}\left(\frac{dc}{dt}\right)=0$ στο $(0,a)$ και η c είναι γεωδαισιακή.

Από μοναδικότητα γεωδαισιακών, η c είναι C^∞, και επεκτείνεται στο $[0,a]$. $\square$

- Άρα οι γεωδ. είναι κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού ενέργειας για γενικές μεταβολές.
- Είναι επίσης σημείο ελαχίστου.
- Αν $\Omega_{p,q}$ οι καμπύλες από το p,q είναι μια "πολλαπλότητα" με σημείο τη c, τότε E είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση με $E'(0)$ την παράγωγό της στην κατεύθυνση V.

  V: διαν. πεδίο - ο "εφαπτόμενος χώρος" έχει άπειρη διάσταση. πολλαπλότητα Hilbert.

Υπολογισμός $\frac{d^2E}{ds^2}(0)$ για γεωδαισιακές.

<u>Πρόταση</u> (Τύπος για δεύτερη μεταβολή της ενέργειας, για γεωδαισιακή)

Έστω $\gamma:[0,a]\to M$ γεωδαισιακή και $f:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,a]\to M$ μια μεταβολή της γ. Αν $E:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ είναι το συναρτησοειδές ενέργειας της μεταβολής, τότε:

$$\frac{1}{2}E''(0)=\left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s},\gamma'\right\rangle\Big|_0^a+\int_0^a\left[\left\langle\frac{DV}{dt},\frac{DV}{dt}\right\rangle-R(V,\gamma',\gamma',V)\right]dt$$

<u>Απόδειξη:</u>

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{ds}=\sum_{i=0}^{K}\left\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-}-\int_0^a\left\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt\ ;$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\frac{d^2E}{ds^2}=\sum_{i=0}^{K}\Bigg(\Big\langle\frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s},\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{=\gamma'}\Big\rangle+\Big\langle\underbrace{\frac{\partial f}{\partial s}}_{=V(t)},\underbrace{\frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}}_{=\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{DV}{dt}\ \text{στο } s=0}\Big\rangle\Bigg)\Bigg|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-}$$

⊙: ακυρώνονται στα t_i^+, t_i^- για γ', V C^1

$$-\int_0^a\left(\left\langle\frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s},\cancelto{0}{\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}}\right\rangle+\left\langle\underbrace{\frac{\partial f}{\partial s}}_{=V(t)},\frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\right)dt$$

Στο $s=0$: $\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}=0$ $\quad f(0,t)$: γεωδαισιακή

$\therefore$ Επίσης: $$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}+R_{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\underset{\uparrow}{=}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}+R_{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial f}{\partial t}$$

Συμμετρία

Στο $s=0$: $$=\frac{D}{dt}\frac{D}{dt}V(t)+R_{V\gamma'}\gamma'$$

Άρα

$$\frac{1}{2}\frac{d^2E}{ds^2}(0) = \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \gamma' \right\rangle\Big|_0^a + \left\langle V(t), \frac{DV}{dt} \right\rangle\Big|_0^a \qquad (s=0).$$

$$- \int_0^a \left\langle V(t), \frac{D^2}{dt^2}V(t) \right\rangle dt - \int_0^a \langle R_{V\gamma'}\gamma', V \rangle \, dt$$

$$= \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}, \gamma' \right\rangle\Big|_0^a + \cancel{\left\langle V(t), \frac{DV}{dt} \right\rangle\Big|_0^a} - \cancel{\left\langle V(t), \frac{DV}{dt} \right\rangle\Big|_0^a} + \int_0^a \left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right\rangle$$

$$- \int_0^a R(V, \gamma', \gamma', V) \, dt.$$

□

- Αν η V είναι γνήσια τότε $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ $\forall s$ για $t = 0, a$
άρα $\frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}(a) = \frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)(0) = 0$ και

$$\frac{1}{2}E''(0) = \int_0^a \left[\left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right\rangle - R(V, \gamma', \gamma', V) \right] dt \quad \text{για } \underline{\text{γνήσια μεταβολή}}$$

Ορίζουμε $$I_a(V,V) = \int_0^a \left[\left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right\rangle - R(V, \gamma', \gamma', V) \right] dt$$

- Για V γνήσια μεταβολή και γ γεωδαισιακή $E(0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της E με $E'(0) = 0$.
Πρέπει τότε $E''(0) \geq 0$.

Εφαρμογές:

<u>Θεώρημα</u> (Bonnet-Myers) Έστω M^n πλήρης πολλ/τα Riemann τ.ω. η καμπυλότητα Ricci της M να ικανοποιεί

$$Ric_p(v) \geq \frac{(n-1)}{b^2} > 0$$

για κάθε $p \in M$ και $v \in T_pM$ με $|v|=1$. Τότε η M είναι συμπαγής με διάμετρο $diam(M) \leq \pi b$.

<u>Απόδειξη:</u> Θα δείξουμε ότι $\forall p,q \in M$ $d(p,q) \leq \pi b$. $\Rightarrow diam(M) \leq \pi b$

- Αφού η M είναι φραγμένη και πλήρης, τότε πρέπει να είναι συμπαγής.

Έστω $p,q \in M$. Αφού η M είναι πλήρης, τότε υπάρχει ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή γ από το p στο q με $L(\gamma)=d(p,q)$.
Έστω $\gamma:[0,1] \to M$. Τότε $|\gamma'|=L(\gamma)$ και αρκεί ν.δ.ο. $L(\gamma) \leq \pi b$.

Θέτουμε $l=L(\gamma)$, και ορίζουμε $\{e_1(t),\dots,e_{n-1}(t)\}$ ο.κ. παράλληλα διανυσματικά πεδία στη γ, που να είναι κάθετα στο γ'.
Ορίζουμε $e_n(t) = \frac{\gamma'(t)}{l}$ $(|e_n(t)|=1)$.

Έστω $V_j(t) = (\sin(\pi t))\, e_j(t)$ για $j=1,\dots,n-1$.
διαν. πεδίο στη γ, με $V_j(0)=V_j(1)=0$.

Κάθε V_j ορίζει γνήσια μεταβολή της γ με ενέργεια E_j. (γνήσια αφού $V_j(0)=0$).

Από τον τύπο για E_j'' έχουμε:

$$\frac{1}{2}E_j''(0) = I_1(V_j, V_j) = +\int_0^1 \Big(\underbrace{\Big\langle \frac{DV_j}{dt}, \frac{DV_j}{dt} \Big\rangle}_{\langle V_j, V_j' \rangle' - \langle V_j, V_j'' \rangle} - R(V_j, \gamma', \gamma', V_j) \Big) dt$$

$$= + \cancel{\langle V_j, V_j' \rangle \Big|_0^1}^{\,0} - \int_0^1 \Big(\langle V_j, V_j'' \rangle + R(V_j, \gamma', \gamma', V_j) \Big) dt$$

$V_j'' = -\pi^2 \sin(\pi t) \cdot e_j(t)$ αφού e_j παράλληλο.

Επίσης $$\sum_{j=1}^{n-1} R(V_j, \gamma', \gamma', V_j) = \sum_{j=1}^{n-1} \ell^2 \sin^2(\pi t) \cdot R(e_j, e_n, e_n, e_j)$$

$$= \ell^2 \sin^2(\pi t) \cdot Ric(e_n, e_n) \geq \ell^2 \frac{n-1}{b^2} \cdot \sin^2(\pi t).$$

Άρα $$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} E_j''(0) = \int_0^1 \Big[(n-1) \cdot \pi^2 \cdot \sin^2(\pi t) - \ell^2 \sin^2(\pi t) \cdot Ric(e_n, e_n) \Big] dt$$

$$\leq \int_0^1 \Big((n-1)\pi^2 - (n-1)\frac{\ell^2}{b^2} \Big) \sin^2(\pi t)\, dt$$

$$= (n-1) \int_0^1 \Big(\pi^2 - \frac{\ell^2}{b^2} \Big) \sin^2(\pi t)\, dt = \frac{n-1}{2} \Big(\pi^2 - \frac{\ell^2}{b^2} \Big)$$

Αν $\ell > \pi b$, τότε $\sum_{j=1}^{n-1} E_j''(0) < 0$

και άρα $E_j''(0) < 0$ για κάποιο j.

Όμως γ γεωδαισιακή άρα $E_j''(0) \geq 0$ $\forall j$ $\rightarrow\leftarrow$.

$\therefore$ $\ell \leq \pi b$

$\square$

• <u>Παρατήρηση</u>: Η συνθήκη για την καμπυλότητα δεν μπορεί να γενικευθεί, δηλαδή αν $Ric>0$ τότε δεν ισχύει.

π.χ. $z=x^2+y^2$ το παραβολοειδές έχει $K>0$ αλλά είναι πλήρης και μη-συμπαγής επιφάνεια.

($Ric \equiv K$ όταν $n=2$).

<u>Πόρισμα</u>. Έστω M^n πλήρης πολλαπλότητα Riemann με καμπυλότητα τομής $K \geq \frac{1}{b^2} > 0$. Τότε η M είναι συμπαγής με $diam(M) \leq \pi b$.
Επιπλέον, η πρώτη θεμελιώδης ομάδα της M, $\pi_1(M)$ είναι πεπερασμένη.

(Η ολική κάλυψη $\tilde{M}$ της M με την παγώμενη μετρική έχει την ίδια καμπυλότητα και άρα είναι επίσης συμπαγής. Άρα για κάθε σημείο της M η αντίστροφη εικόνα του στην $\tilde{M}$ αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό σημείων).

• <u>Παρατήρηση</u> Στην S^n_R $Ric_p(v)=\frac{n-1}{R^2}$ και έχει διάμετρο πR. Άρα το άνω φράγμα για $diam(M)$ δεν μπορεί να βελτιωθεί.

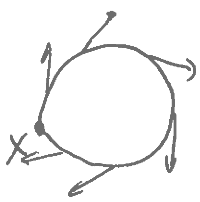
<u>Θεώρημα (Cheng:)</u> Αν $Ric_p(v) \geq \frac{n-1}{b^2}$ $\forall p \in M$ και $\forall v \in T_pM$ με $|v|=1$ και $diam(M)=\pi b$, τότε η M είναι ισομετρική με τη σφαίρα S^n_b καμπυλότητας τομής $\frac{1}{b^2}$.

Θεώρημα (Synge-Weinstein) Έστω f μια ισομετρία μιας συμπαγούς και προσανατολισμένης πολλαπλότητας Riemann M^n. Αν η M έχει θετική καμπυλότητα τομής, $K_M > 0$, και

- η f διατηρεί τον προσανατολισμό της M όταν n είναι άρτιος
- η f αντιστρέφει τον προσανατολισμό της M όταν n είναι περιττός.

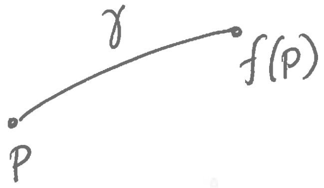
Τότε η f έχει σταθερό σημείο, δηλαδή $\exists p \in M$ τ.ω. $f(p) = p$.

Λήμμα: Η M^n είναι προσανατολισμένη ανν $\forall x \in M$, και γ κλειστή καμπύλη από το x στο x, η παράλληλη μεταφορά στην γ $P_\gamma : T_x M \to T_x M$ ικανοποιεί $\det(P_\gamma) = 1$.



Απόδειξη Θεωρήματος: Υποθέτουμε $f(q) \neq q$ $\forall q \in M$.

Έστω $p \in M$ τ.ω. $d(p, f(p))$ ελάχιστη (p υπάρχει αφού M συμπαγής).



με $d(p, f(p)) > 0$

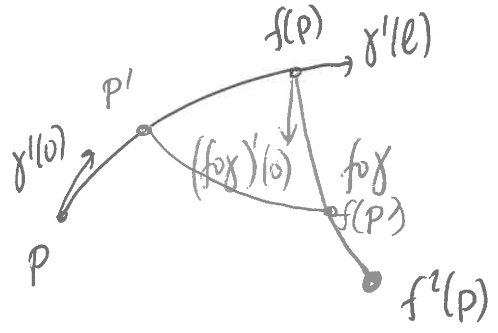
M πλήρης, άρα υπάρχει γεωδαισιακή γ που ελαχιστοποιεί το μήκος τόξου ανάμεσά τους με $\ell(\gamma) = d(p, f(p))$ και $|\gamma'| = 1$.

$\gamma : [0, \ell] \to M$. με $\ell = d(p, f(p))$

Έστω P η παράλληλη μεταφορά στην γ από το $f(p) = \gamma(\ell)$ στο $p = \gamma(0)$.

Ορίζουμε $\tilde{A} = P \circ df_p : T_pM \to T_pM$. Η $\tilde{A}$ είναι ισομετρία.

Θ.δ.ο. $(f\circ\gamma)'(0) = \gamma'(\ell)$



Η $f\circ\gamma$ είναι επίσης γεωδαισιακή από το $f(p)$ στο $f^2(p)$.

Έστω $p' = \gamma(t')$ $\quad t' \neq 0, \ell$ και $f(p') = f\circ\gamma(t')$

Η f είναι ισομετρία, άρα $d(p, p') = d(f(p), f(p'))$

και $d(p', f'(p)) \overset{(*)}{\leq} d(p', f(p)) + d(f(p), f'(p'))$

$= d(p', f(p)) + d(p, p') = d(p, f(p))$ αφού γ ελαχιστοποιεί γεωδ.

Όμως $d(p, f(p))$ η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε q και $f(q)$, άρα $d(p', f(p')) = d(p, f(p))$ $\forall p'$ στη γ, και

$$d(p', f(p')) \overset{(*)}{=} d(p', f(p)) + d(f(p), f(p'))$$

Άρα η καμπύλη $\gamma \cup f\circ\gamma$ είναι γεωδαισιακή (λεία)

και $(f\circ\gamma)'(0) = \gamma'(\ell)$ $\quad$ (διαφορετικά αν υπάρχει γωνία, η απόσταση θα είναι μικρότερη)

Αφού $P(\gamma'(\ell)) = \gamma'(0)$ και $df_p(\gamma'(0)) = (f\circ\gamma)'(0) = \gamma'(\ell)$, τότε

$$\tilde{A}(\gamma'(0)) = (P\circ df_p)(\gamma'(0)) = P(\gamma'(\ell)) = \gamma'(0).$$

Η P είναι ισομετρία που διατηρεί τον προσανατολισμό ενώ η f ανάλογα με το n.

$\therefore \det(\tilde{A}) = \det(P \circ df_p) = (-1)^n$.

Έστω $A = \tilde{A}\big|_V$ V: διανυσματικός χώρος κάθετος στο $\gamma'(0)$ με διάσταση $n-1$.

Αφού το $\gamma'(0)$ είναι σταθερό σημείο της $\tilde{A}$ (με ιδιοτιμή 1) τότε $\det A = (-1)^n$ και A ορθογώνιο μετασχηματισμός στο $\mathbb{R}^{n-1}$.

Για n άρτιο $\det A = 1$ στο $\mathbb{R}^{n-1}$ $\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \det A$ λ_i: ιδιοτιμές με $n-1$ περιττό.

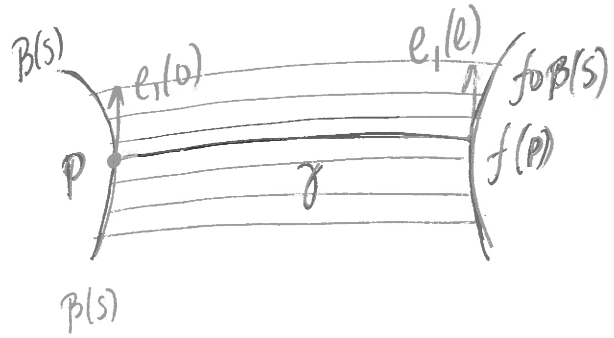
Άρα υπάρχει πραγματικό λ_i.
Τα ζεύγη συζυγών μιγαδικών λ_i έχουν γινόμενο $\lambda \cdot \bar{\lambda} > 0$.
Άρα πρέπει να υπάρχει $\lambda_i = 1$. $\Rightarrow \exists v$ με $Av = v$.

Για n περιττό $\det A = -1$ στο $\mathbb{R}^{n-1}$ με $n-1$
Ξανά τα ζεύγη συζυγών μιγαδικών έχουν $\lambda \cdot \bar{\lambda} > 0$, άρα υπάρχουν 2 πραγματικές ρίζες και πρέπει η μία να είναι $\lambda_i = 1$ (τ.ω. $\det A = -1$).

$\therefore \exists$ μοναδιαίο διάνυσμα e_1 με $Ae_1 = e_1$ σταθερό και $e_1 \perp \gamma'(0)$.

Έστω $e_1(t)$ μοναδιαίο παράλληλο διαν. πεδίο στη γ.
Τότε $e_1(t) \perp \gamma'(t)$ και $A(e_1(0)) = e_1(0) = e_1$.

Έστω $\beta(s)$ για $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ γεωδαισιακή με $\beta(0)=p$ και $\beta'(0)=e_1(0)$



$$\underbrace{P\circ df_p}_{\widetilde{A}}(e_1(0))=e_1(0) \Rightarrow \underset{(f\circ\beta)'(0)}{\underset{\parallel}{df_p(e_1(0))}} = P^{-1}(e_1(0))=e_1(\ell).$$

Ορίζουμε τη μεταβολή $h(s,t)=\exp_{\gamma(t)}(s\,e_1(t))$ $\quad s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, $t\in[0,\ell]$.

Τότε $h(s,0)=\exp_{\gamma(0)}(s\,e_1(0))=\underset{\uparrow\text{γεωδ.}}{\beta(s)}$ και

$$h(s,\ell)=\exp_{\gamma(\ell)}(s\,e_1(\ell))=\exp_{f(p)}(s\,(f\circ\beta)'(0))=\underset{\uparrow\text{γεωδ.}}{f\circ\beta(s)}$$

Άρα $V(t)=\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\exp_{\gamma(t)}(s\,e_1(t))\right)\Big|_{s=0}=\left(d\exp_{\gamma(t)}\right)_{se_1(t)}(e_1(t))\Big|_{s=0}=e_1(t)=\dfrac{\partial h}{\partial s}\Big|_{s=0}$

και $\dfrac{D V}{dt}=0$

$$\therefore \frac{1}{2}E''(0)=+\int_0^\ell\left(\left|\frac{\overset{0}{dV}}{dt}\right|^2-R(V,\gamma',\gamma',V)\right)dt+\left\langle\frac{D}{ds}\frac{\partial h}{\partial s},\gamma'\right\rangle\Big|_0^\ell \leftarrow s=0.$$

$$=-\int_0^\ell R(e_1(t),\gamma'(t),\gamma'(t),e_1(t))\,dt=-\int_0^\ell K(e_1,\gamma')\,dt<0$$

αφού $\left\langle\dfrac{D}{\partial s}\dfrac{\partial h}{\partial s},\gamma'\right\rangle\Big|_{s=0}=\left\langle\dfrac{D}{\partial s}\dfrac{\partial h}{\partial s},\dfrac{\partial h}{\partial t}\right\rangle\Big|_{s=0}=$

$$=\frac{D}{\partial s}\cancel{\left\langle\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle}\Big|_{s=0}-\frac{1}{2}\frac{D}{\partial t}\left\langle\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle\Big|_{s=0}=-\frac{1}{2}\frac{D}{\partial t}\langle e_1(t),e_1(t)\rangle=0 \text{ παράλληλα.}$$

0 από Gauss.

$\therefore$ $E''(0) < 0$ ενώ η γ είναι γεωδαισιακή $\rightarrow\leftarrow$.

Δηλαδή η απόσταση $d(p, f(p)) = 0 \Rightarrow p = f(p)$.

$\square$

Θεωρήματα Σύγκρισης:

$\gamma : [0, \ell]$ γεωδ., $J(t)$ πεδίο Jacobi με $J(0) = 0$. $|J'(0)| = 1$

και $\langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$ τότε.

$$|J(t)| = t - \frac{K}{6} t^3 + Rem \quad \text{όπου} \quad \lim_{t \to 0} \frac{Rem}{t^3} = 0.$$

Αν $\tilde{M}$ πολλ/τα με γεωδ. $\tilde{\gamma} : [0, \ell]$ και $\tilde{J}$ αντίστοιχα,

$$|\tilde{J}(t)| = t - \frac{\tilde{K}}{6} t^3 + \widetilde{Rem}$$

Αν $\tilde{K}(\tilde{\gamma}'(0), \tilde{J}'(0)) > K(\gamma'(0), J'(0))$ τότε $|\tilde{J}(t)| < |J(t)|$

για t μικρό.

Rauch - το επεκτείνει $\forall t$. αν $\tilde{K} < K$.

<u>Θεώρημα Rauch:</u> Έστω $\gamma : [0, a] \to M$ και $\tilde{\gamma} : [0, a] \to \tilde{M}$

γεωδαισιακή με $|\gamma'(t)| = |\tilde{\gamma}'(t)|$ και J, $\tilde{J}$ πεδία Jacobi στις

$\gamma, \tilde{\gamma}$ αντίστοιχα με $J(0) = \tilde{J}(0) = 0$ και $\langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = \langle \tilde{J}'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle$.

$|J'(0)| = |\tilde{J}'(0)|$.

Αν η $\tilde{\gamma}$ δεν έχει συζυγή σημεία στο $(0, a]$ και $\forall v \in T_{\gamma(t)} M$

και $\tilde{v} \in T_{\tilde{\gamma}(t)} \tilde{M}$ ισχύει

$$\tilde{K}(\tilde{v}, \tilde{\gamma}'(t)) \geq K(v, \gamma'(t))$$

τότε $|\tilde{J}(t)| \leq |J(t)|$ $\forall t \in [0, a]$.

Μεγαλύτερη καμπυλότητα $\Rightarrow$ μικρότερο μήκος, πλησιάζουν οι γεωδαισιακές.

Επίσης αν για κάποιο t_0 $|J(t_0)| = |\tilde{J}(t_0)|$, τότε
$\tilde{K}(\tilde{J}(t), \tilde{\gamma}'(t)) = K(J(t), \gamma'(t))$ $\forall t \in [0, t_0]$.

Απόδειξη: Λήμμα δείκτη. $I_{t_0}(V,V) = \int_0^{t_0} \langle V', V' \rangle - R(V,\gamma',\gamma',V)\,dt$.

Αν η γ δεν έχει συζυγή σημεία
J πεδίο Jacobi στη γ με $\langle J, \gamma' \rangle = 0$
V διαν. πεδίο στη γ με $\langle V, \gamma' \rangle = 0$
και $J(0) = V(0) = 0$, $J(t_0) = V(t_0)$ για $t_0 \in (0, a]$,

τότε $I_{t_0}(J,J) \le I_{t_0}(V,V)$.

πεδία Jacobi - ελαχιστοποιούν το δείκτη.

Εφαρμογές:

- Αν η καμπ. τομής K της M ικανοποιεί $0 < L \le K \le H$ τότε η απόσταση d ανάμεσα σε συζυγή σημεία ικανοποιεί

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \le d \le \frac{\pi}{\sqrt{L}} \leftarrow \text{σφαίρα ακτίνας } \sqrt{L}.$$

$\uparrow$ σφαίρα ακτίνας $\sqrt{H}$

- Αν $\tilde{K} \ge K$ τότε $Vol(\tilde{B}_r(\tilde{p})) \le Vol(B_r(p))$

$\uparrow$ γεωδαισιακή μπάλα ακτίνας r στην $\tilde{M}$

Επίσης $\forall\, 0 < r \le R$

$$\frac{Vol(B_R(p))}{Vol(B_r(p))} \ge \frac{Vol(\tilde{B}_R(\tilde{p}))}{Vol(\tilde{B}_r(\tilde{p}))}$$