Θεώρημα Cartan-Hadamard

Έστω M πλήρης πολλ/τα Riemann, απλά συνεκτική (simply connected) με καμπυλότητα τομής $K(p,\sigma) \leq 0$ $\forall p \in M$ και $\forall \sigma \subset T_pM$. Τότε η M είναι διαφορομορφική με το $\mathbb{R}^n$ όπου $n = \dim M$. Πιο συγκεκριμένα, $\exp_p : T_pM \to M$ είναι διαφορομορφισμός $\forall p$.

Απόδειξη: M πλήρης, άρα $\exp_p : T_pM \to M$ ορίζεται $\forall p \in M$ σε όλο το T_pM και είναι επί.

Λήμμα 1: $\exp_p : T_pM \to M$ είναι τοπικός διαφορομορφισμός όταν $K(p,\sigma) \leq 0$ $\forall p \in M$ και $\forall \sigma \subset T_pM$ και M πλήρης.

- Δηλαδή $\forall v \in T_pM$ υπάρχει ανοικτή γειτονιά $U \ni v$ και $V \ni \exp_p(v) = q$ με $\exp_p : U \to V$ διαφορομορφισμός.
- Αυτό συνεπάγεται από το ότι $\exp_p$ δεν έχει κρίσιμα σημεία ($d\exp_p \neq 0$) και άρα $C(\dot{p}) = \emptyset$
- Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχουν συζυγή σημεία στην M.
- Αυτό δε σημαίνει ότι $\exp_p$ είναι παντού 1-1, διαφορομορφισμός μόνο τοπικά.

π.χ. $\phi : \mathbb{R} \to S^1$ $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ είναι τοπικός διαφορομορφισμός, όχι όμως διαφορομορφισμός.

Απόδειξη Λήμματος: Έστω J μη-μηδενικό πεδίο Jacobi στη γεωδαισιακή $\gamma : [0,\infty) \to M$ με $\gamma(0)=p$ και $J(0)=0$. (γ ορίζεται $\forall t>0$ αφού M πλήρης)

Τότε $\langle J,J\rangle'' = 2\langle J', J'\rangle + 2\langle J'', J\rangle$

$$= 2\langle J', J'\rangle + 2\langle -R_{J\gamma'}\gamma', J\rangle =$$

$$= 2|J'|^2 - 2R(J,\gamma',\gamma',J) =$$

$$= 2|J'|^2 - 2K(J,\gamma')|\gamma' \wedge J|^2 \geq 0 \quad \text{όταν } K \leq 0.$$

$$\therefore \langle J,J\rangle'(t_2) - \langle J,J\rangle'(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \langle J,J\rangle''(t)\,dt \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle J,J\rangle'(t_2) \geq \langle J,J\rangle'(t_1) \quad \forall\, t_2 > t_1.$$

$\langle J,J\rangle'(0) = 2\langle J(0), J'(0)\rangle = 0$. και $\langle J(0),J(0)\rangle = 0$.
και αφού $J(t)$ δεν είναι μηδενικό $\forall t \Rightarrow \langle J(t),J(t)\rangle' > 0$ για t αρκετά μικρό θετικό, $t\in(0,\varepsilon)$, αφού αυξάνεται. (διαφορετικά παραμένει $\equiv 0$ σε ένα διάστημα και άρα και $J(t)\equiv 0$ σε ένα διάστημα $\to\leftarrow$).

Αν όμως $\langle J(t),J(t)\rangle' > 0$, για $t\in(0,\varepsilon)$, τότε

$$\langle J,J\rangle'(s) \geq \langle J,J\rangle'(t) > 0 \quad \forall s>t, \text{ άρα}$$

$$\langle J,J\rangle'(s) > 0 \quad \forall s>0 \Rightarrow \langle J(t),J(t)\rangle > \langle J(0),J(0)\rangle = 0$$

$\therefore$ $\forall t>0$ $\gamma(t)$ δεν είναι συζυγές σημείο του p στη γ.

$\therefore$ $(d\exp_p)_{tv}$ δεν έχει κρίσιμα σημεία $\forall t>0$ $v\in T_pM$

$\therefore$ $\exp_p$ τοπικός διαφορομορφισμός.

$\square$

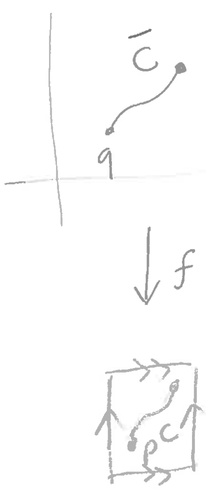
<u>Λήμμα 2</u> Έστω M πλήρης πολλ/τα Riemann και $f: M \to N$ ένας τοπικός διαφορομορφισμός που είναι επί.
Αν η N είναι πολλ/τα Riemann και η f έχει την ιδιότητα.
$|(df_p)(v)| \geq |v|$ $\forall p \in M$ και $\forall v \in T_pM$, τότε η f είναι χάρτης κάλυψης.

<u>Ορισμός:</u> Έστω M, N διαφ. πολλ/τες. Μια απεικόνιση $\pi: M, N$ είναι χάρτης κάλυψης. αν $\forall q \in N$ υπάρχει ανοικτή γειτονιά $U \ni q$ τ.ω.
$\pi^{-1}(U) = \bigcup_\alpha V_\alpha$ με $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ $\forall \alpha \neq \beta$, και $\pi|_{V_\alpha}: V_\alpha \to U$ είναι ομοιομορφισμός.

π.χ. $\pi: S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
$x \longmapsto [x] = \{x, -x\}$

$\pi: \mathbb{R}^2 \to T^2$
$(x,y) \longmapsto \{(x+m, y+n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = [(x,y)]$ ισοδύναμα σημεία.

<u>Απόδειξη Λήμματος 2.</u>
Αρκεί ν.δ.ο. η f έχει την ιδιότητα "ανύψωσης καμπύλης"
(path lifting property). για καμπύλες στην N.
Δηλαδή αν $c: [0,1] \to N$ διαφ. καμπύλη και $q \in M$ με $f(q) = c(0)$, τότε υπάρχει καμπύλη $\bar{c}: [0,1] \to M$ τ.ω. $\bar{c}(0) = q$ και $f \circ \bar{c} = c$.



f τοπικός διαφοροφιορφισμός, άρα αν $f(q)=c(0)$, τότε μπορεί να οριστεί η $\bar{c}:[0,\varepsilon]\to M$ με $\bar{c}(0)=q$ και $f\circ\bar{c}=c$ για κάποιο $\varepsilon>0$.

Έστω $A\subset[0,1]$ τ.ω. η c να ανυψώνεται στο A με αρχή το q.

Αφού η f είναι τοπικός διαφορομορφισμός τότε $[0,t_0)\subset A$, δηλαδή το A είναι ανοικτό στο $[0,1]$.

Αν δείξουμε ότι $t_0\in A$ (A κλειστό στο $[0,1]$) τότε $A=[0,1]$ και η c μπορεί να ανυψωθεί $\forall t\in[0,1]$.

ν.δ.ο $t_0\in A$:

Έστω (t_n) αύξουσα ακολουθία με $t_n\to t_0$.

Τότε $\{\bar{c}(t_n)\}$ περιέχεται σε συμπαγές σύνολο του M. Αν όχι τότε η πληρότητα της M συνεπάγεται ότι $d(\bar{c}(t_n),\bar{c}(0))\to\infty$ (για μια υπακολουθία)

Όμως
$$\ell_{[0,t_n]}(c)=\int_0^{t_n}\left|\frac{dc}{dt}\right|dt=\int_0^{t_n}\left|\frac{d(f\circ\bar{c})}{dt}\right|dt$$
$$=\int_0^{t_n}\left|df_{\bar{c}(t)}\left(\frac{d\bar{c}}{dt}\right)\right|dt \underset{\text{υπόθεση}}{\geq} \int_0^{t_n}\left|\frac{d\bar{c}}{dt}\right|dt\geq d(\bar{c}(t_n),\bar{c}(0))\to\infty$$

∴ Το μήκος της c στο $[0,t_0]$ είναι άπειρο $\to\leftarrow$

∴ $\{\bar{c}(t_n)\}\subset K\subset M$ με K συμπαγές

Άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο $x_0\in M$.

Έστω V γειτονιά του x_0 με $f|_V$ διαφορομορφισμό.

$c(t_n) = f \circ \tilde{c}(t_n)$ είναι κοντά στο $f(x_0)$ για n αρκετά μεγάλο, άρα και $c(t_0) \in f(V)$ (c, f συνεχείς).
και επίσης υπάρχει διάστημα $I \subset [0,1]$, με $t_0 \in I$ τω $c(I) \subset f(V)$.

Έστω n τ.ω. $\tilde{c}(t_n) \in V$, και έστω $\tilde{\gamma}$ η ανύψωση της c στο I που να περνά από το x_0.
Η $\tilde{\gamma}$ και η c συμπίπτουν στο $[0, t_n) \cap I$ γιατί $f|_V$ είναι 1-1 και επί, άρα η $\tilde{\gamma}$ επεκτείνει τη $\tilde{c}$ στο I, και άρα η $\tilde{c}$ ορίζεται στο t_0 και $t_0 \in A$ □

Απόδειξη Θεωρήματος Cartan-Hadamard

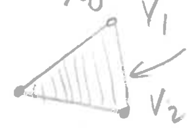
M πλήρης, άρα $\exp_p : T_pM \to M$ ορίζεται $\forall p \in M$ σε όλο το T_pM και είναι επί. Είναι επίσης τοπικός διαφορομ. από Λήμμα 1.
Μέσω του $\exp_p$ μπορούμε να ορίσουμε μετρική Riemann στο T_pM τω. $\exp_p$ τοπική ισομετρία, δηλαδή θέτοντας

$$\tilde{g} = (\exp_p)^*(g)$$

Αφού οι γεωδαισιακές στο T_pM που περνούν από το $\vec{0}$ είναι ευθείες, τότε αυτή η μετρική στο T_pM είναι πλήρης.
Από Λήμμα 2, έχουμε ότι $\exp_p$ είναι χάρτης κάλυψης.

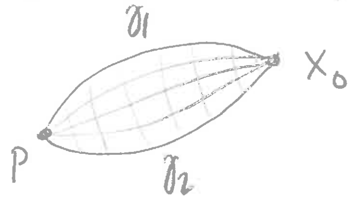
Επειδή η M είναι απλά συνεκτική, τότε
$\exp_p$ είναι 1-1, δηλαδή διαφορομορφισμός.

Αν όχι τότε $\exp_p(v_1) = \exp_p(v_2) = x_0$



και $\gamma_1(t) = \exp_p(tv_1)$
$\gamma_2(t) = \exp_p(tv_2)$ για $t \in [0,1]$ 2 γεωδαισιακές
από το p στο x_0

M απλά συνεκτική, άρα οι γ_1, γ_2 είναι ομοτοπικές
(δεν περικλείουν "τρύπα").



Όμως ο χάρτης ομοτοπίας από γ_1 στη γ_2 επίσης ανυψώνεται, και στο $t=1$ πρέπει να δίνει καμπύλη στο T_pM από v_1 στο v_2, με εικόνα το x_0

$\rightarrow\leftarrow$ $\exp_p$ είναι χάρτης κάλυψης που "ξεχωρίζει" το v_1 από το v_2. ($\exp_p^{-1}(x_0)$ = σύνολο διακριτών σημείων)

$\square$

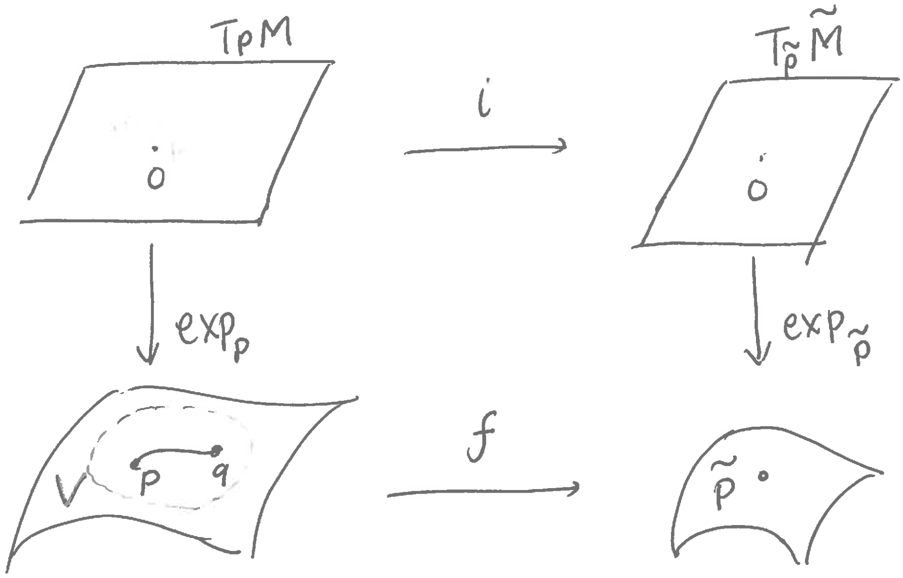
• Οι μόνες πλήρεις, απλά συνεκτικές πολ/τες Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής είναι:

$\mathbb{R}^n$	$K \equiv 0$
S^n	$K \equiv 1$
$\mathbb{H}^n$	$K \equiv -1$

Θεώρημα του Cartan: καθορισμός της μετρικής από την καμπυλότητα.

Έστω $M, \tilde{M}$ πολ/τες Riemann διάστασης n.
$p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ και έστω $i : T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ γραμμική απεικόνιση που είναι ισομετρία.

Έστω $V \subset M$ κανονική γειτονιά του p τ.ω. $\exp_{\tilde{p}}$ να ορίζεται στο $i \circ \exp_p^{-1}(V)$.



Έστω $f : V \to \tilde{M}$

με $f(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q)$ για $q \in V$.

$\forall q \in V$ $\exists!$ γεωδαισιακή $\gamma : [0,t] \to M$ με
$\gamma(0) = p$, $\gamma(t) = q$ και $|\gamma'| = 1$.

Έστω P_t : η παράλληλη μεταφορά στη γ
από το $\gamma(0)=p$ στο $\gamma(t) = q$.

Ορίζουμε $\tilde{\gamma} : [0,t] \to \tilde{M}$ γεωδαισιακή στην $\tilde{M}$ με
$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$ και $|\tilde{\gamma}'| = 1$.

Έστω $\tilde{P}_t$ η παράλληλη μετατόπιση στη $\tilde{\gamma}$ από
το $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ στο $\tilde{\gamma}(t)$.

Αφού i ισομετρία, $\tilde{\gamma}(t) = \exp_{\tilde{p}}(t\, i(\gamma'(0)))$

$$= \exp_{\tilde{p}}\Big(i(\underbrace{t\gamma'(0)}_{\substack{\text{|||} \\ \exp_p^{-1}(\underbrace{\gamma(t)}_{q})}})\Big) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q) = f(q)$$

Ορίζουμε $\phi_t : T_q M \to T_{f(q)} \tilde{M}$

$$\phi_t(X) = \tilde{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}(X) \qquad \text{για } X \in T_q M.$$

$P_t^{-1}(x) \in T_p M$ $\qquad$ $i \circ P_t^{-1}(x) \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$

$\tilde{P}_t(i \circ P_t^{-1}(x)) \in T_{f(q)} \tilde{M}$ $\qquad$ $f(q) = \gamma(t)$.

<u>Θεώρημα του Cartan:</u> Με τον πιο πάνω συμβολισμό, αν $\forall q \in V$ και όλα τα $X, Y, Z, W \in T_qM$ ισχύει $\dot{R}(X,Y,Z,W) = \tilde{R}(\phi_t(X), \phi_t(Y), \phi_t(Z), \phi_t(W))$ τότε η $f: V \to f(V) \subset \tilde{M}$ είναι τοπική ισομετρία με $df_p = i$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $q \in V$ και $\gamma: [0,\ell] \to M$ γεωδαισιακή με $\gamma(0) = p$, $\gamma(\ell) = q$, $|\gamma'| = 1$

Έστω $\{e_i(t)\}$ o.κ. βάση παράλληλων διανυσματικών πεδίων στη γ με $e_1(t) = \gamma'(t)$.

Έστω $v \in T_qM$ και $J(t)$ πεδίο Jacobi στη γ με $J(0) = 0$ και $J(\ell) = v$ (Εξίσωση πεδίου Jacobi είναι 2ου βαθμού: Έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων καθορίζοντας $J(0), J'(0)$ ή $J(0)$ και $J(\ell)$)

Τότε $J(t) = \sum_i y_i(t) e_i(t)$ στη γ

με $J''(t) + R_{J(t)\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0 \Leftrightarrow$

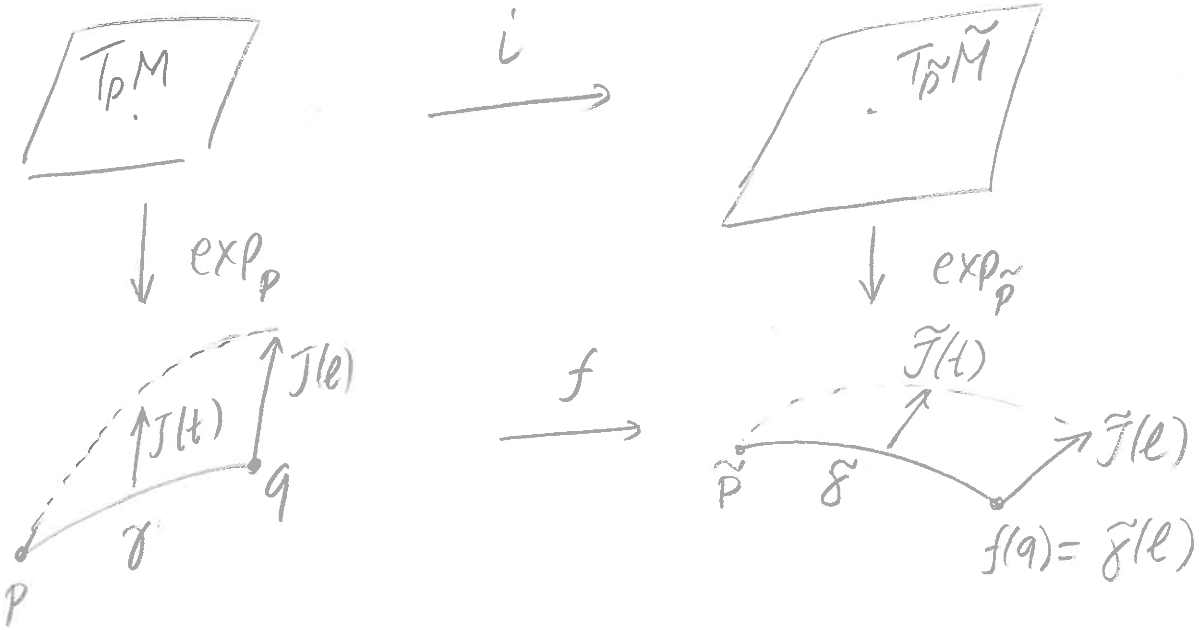
$$\Leftrightarrow \sum_i y_i''(t) e_i(t) + R_{(\sum_i y_i e_i) e_1} e_1 = 0$$

$$R_{(\sum_i y_i e_i) e_1} e_1 = \sum_j \langle R_{(\sum_i y_i e_i) e_1} e_1, e_j \rangle e_j =$$

$$\sum_{i,j} y_i R(e_i, e_1, e_1, e_j)\, e_j$$

$\therefore$ J πεδίο Jacobi $\Leftrightarrow$

$$y_j''(t) + \sum_i y_i R(e_i, e_1, e_1, e_j) = 0 \quad \forall j. \quad (*)$$



Έστω $\tilde\gamma : [0,\ell] \to \tilde M$ η γεωδαισιακή με $|\tilde\gamma'| = 1$,

$\tilde\gamma(0) = \tilde p \qquad \tilde\gamma'(0) = i(\gamma'(0))$

Όπως είδαμε $\tilde\gamma(\ell) = f(q)$

Έστω $\tilde J(t) = \phi_t(J(t))$ και $\tilde e_j(t) = \phi_t(e_j(t))$

ϕ_t: γραμμική, άρα $\tilde J(t) = \phi_t(J(t)) = \sum_i y_i(t)\, \tilde e_i(t)$

Αφού $R(e_i, e_1, e_1, e_j) = \tilde R(\tilde e_i, \tilde e_1, \tilde e_1, \tilde e_j)$, τότε.

από $(*)$ $\quad y_j''(t) + \sum_i \tilde R(\tilde e_i, \tilde e_1, \tilde e_1, \tilde e_j)\, y_i(t) = 0.$

Αφού η παράλληλη μεταφορά και η i είναι ισομετρίες, τότε ϕ_t είναι ισομετρία.

$\therefore$ $\tilde e_1(t) = \tilde\gamma'(t)$ και $\{\tilde e_j(t)\}$ ο.κ. πλαίσιο

$\therefore$ $\tilde J''(t) + \tilde R_{\tilde J \tilde\gamma'}\tilde\gamma' = 0 \quad \Rightarrow \tilde J(t)$ πεδίο Jacobi στην $\tilde\gamma$.

$\tilde{J}(t)$ πεδίο Jacobi με $\tilde{J}(0)=0$

Αφού η ϕ_t είναι ισομετρία, τότε $|\tilde{J}(\ell)| = |J(\ell)|$

Αν $df_q(v)\ (= df_q(J(\ell))) = \tilde{J}(\ell)$, τότε $|df_q(v)| = |v|$

και άρα για κάθε $v \in T_qM$ $|df_q(v)| = |v|$ και

παίρνουμε f ισομετρία

(με κανόνα παραλληλογράμμου $\langle X+Y, X+Y\rangle = \langle X,X\rangle + \langle Y,Y\rangle + 2\langle X,Y\rangle$
μπορούμε ν.δ.ο. διατηρείται το εσωτερικό γινόμενο).

Υπολογισμός: $df_q(J(\ell))$:

$\tilde{J}(t) = \phi_t(J(t)) = \sum_i y_i(t)\tilde{e}_i(t)$ με $\tilde{e}_i(t) = \phi_t(e_i(t))$

$\tilde{J}'(0) = \sum_i y_i'(0)\tilde{e}_i(0) + \cancel{\sum_i y_i(0)\tilde{e}_i'(0)}^{\,0}$ αφού $J(0)=0$.

$= \sum_i y_i'(0)\, i(e_i(0))$ αφού $\tilde{P}_0 \circ i \circ P_0^{-1} = i$ στο $t=0$

$= i\left(\sum_i y_i'(0) e_i(0)\right) = i(J'(0))$

$J, \tilde{J}$ πεδία Jacobi με $J(0) = \tilde{J}(0) = 0$ άρα από προηγούμενο

πόρισμα: $J(t) = (d\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0))$ - σε κανονική γειτονιά
∴ αντιστρέψιμο

$\tilde{J}(t) = (d\exp_{\tilde{p}})_{t\tilde{\gamma}'(0)}(t\underbrace{\tilde{J}'(0)}_{i(J'(0))})$

$\exp_p$ σε κανονική γειτονιά άρα για $t=\ell$:

$\ell J'(0) = (d\exp_p)^{-1}_{\ell\gamma'(0)}(J(\ell))$

$\Rightarrow \tilde{J}(\ell) = (d\exp_{\tilde{p}})_{\ell\tilde{\gamma}'(0)}\left(i\,(d\exp_p)^{-1}_{\ell\gamma'(0)}(J(\ell))\right) = df_q(J(\ell))$

-αφού $f(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}$ και

$df_q = (d\exp_{\tilde{p}})_{i\circ\exp_p^{-1}(q)} \circ i \circ (d\exp_p)^{-1}_{\exp_p^{-1}(q)}$ $\quad \exp_p^{-1}(q) = \ell\gamma'(0)$, $\quad i\circ\exp_p^{-1}(q) = \ell\cdot\tilde{\gamma}'(0)$. □

• Παρατήρηση: Αν exp_p, $exp_{\tilde{p}}$ είναι διαφορομορφισμοί και ισχύουν οι συνθήκες του Θεωρήματος Cartan για R και $\tilde{R}$ τότε η f είναι ισομετρία σε όλη την M.

• Το Θεώρημα Cartan μας δείχνει ότι τοπικά η καμπυλότητα καθορίζει τη μετρική.

<u>Πόρισμα:</u> Έστω $M, \tilde{M}$ πολλ/τες με την ίδια σταθερή καμπυλότητα τομής και ίδιας διάστασης n. Έστω $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$, και $\{e_i\}$ o.κ. βάση του T_pM, $\{\tilde{e}_i\}$ o.κ. βάση του $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Τότε υπάρχουν γειτονιά $V \subset M$ του p, γειτονιά $\tilde{V} \subset \tilde{M}$ του $\tilde{p}$ και μια ισομετρία $f: V \to \tilde{V}$ τ.ω. $df_p(e_i) = \tilde{e}_i$.

<u>Απόδειξη:</u> Επιλέγουμε i τ.ω. $\tilde{e}_i = i(e_i)$ στο προηγούμενο Θεώρημα. Αφού η καμπυλότητα τομής είναι σταθερή και καθορίζει τον τανυστή καμπυλότητας, τότε $R = \tilde{R}$ όπως στο Θεώρημα. ($R, \tilde{R}$ αντιστοιχούν στους KQ, $K\tilde{Q}$ με ισότητα στα αντίστοιχα διανύσματα). □

<u>Πόρισμα.</u> Έστω M πολλ/τα με σταθερή καμπυλότητα τομής και $p, q \in M$. Έστω $\{e_i\}$ o.κ. βάση στο T_pM και $\{E_i\}$ o.κ. βάση στο T_qM. Τότε υπάρχουν γειτονιές U του p και V του q και μια ισομετρία $g: U \to V$ τ.ω. $dg_p(e_i) = E_i$.

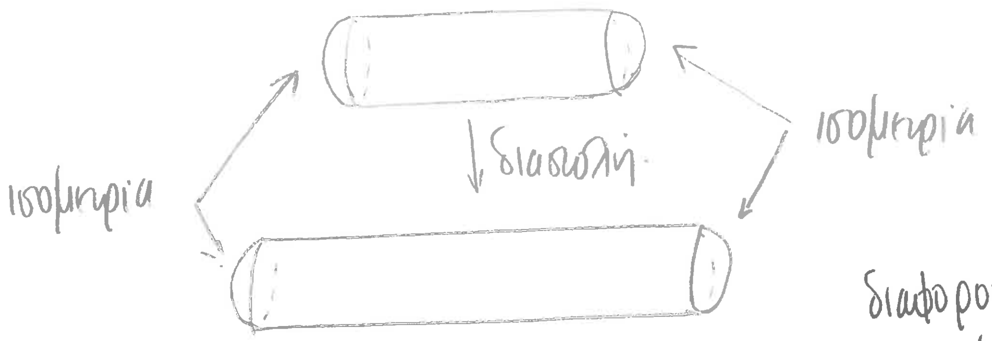
Ερώτημα: Έστω $f: M \to \tilde{M}$ διαφορομορφισμός που διατηρεί την καμπυλότητα, δηλαδή

$$R(X,Y,Z,W)_p = R(df_p(X), df_p(Y), df_p(Z), df_p(W))_{f(p)}$$

$\forall p \in M$, $\forall X,Y,Z,W \in T_pM$.

Είναι η f ισομετρία;

$n=2$: όχι (Αντίστροφο του Θεωρ. Egregium του Gauss όπου τοπική ισομετρία $\to$ ίδια καμπυλότητα)



διαφορομορφισμός που διατηρεί την καμπυλότητα αλλά όχι ισομετρία. - μόνο τοπική.

$n \geq 4$ Είναι ισομετρία η f όταν K δεν είναι σταθερή σε ανοικτά σύνολα.

$n=3$: μελετήθηκε από Yau - ισχύει για M συμπαγή με πουθενά σταθερή καμπυλότητα.

Για M μη-συμπαγή υπάρχει αντιπαράδειγμα.

- Μελετήθηκε υπό διάφορες συνθήκες.

Space Forms: Πολ/τες με σταθερή καμπυλότητα.

Θεώρημα: Έστω M^n πλήρης πολ/κα Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής K. Τότε η ολική κάλυψη $\tilde{M}$ της M με τη μετρική κάλυψης είναι ισομετρική με

(a) $\mathbb{H}^n$ αν $K=-1$

(b) $\mathbb{R}^n$ αν $K=0$

(c) S^n αν $K=1$.

(για άλλο K είναι διαστολή του $\mathbb{H}^n$ ή S^n
π.χ. σφαίρα άλλης ακτίνας).

Λήμμα Έστω $f_i: M \to N$ για $i=1,2$ δύο τοπικές ισομετρίες από τη συνεκτική πολ/κα Riemann M στην πολ/κα Riemann N. Αν υπάρχει $p \in M$ με $f_1(p)=f_2(p)$ και $(df_1)_p=(df_2)_p$, τότε $f_1=f_2$.

skip proofs.

Απόδειξη Λήμματος: Έστω V κανον. γειτονιά του p τ.ω. $f_1|_V$ και $f_2|_V$ διαφορομορφισμοί.

Έστω $\phi = f_1^{-1}\circ f_2 : V \to V$ Τότε $\phi(p)=p$ και $d\phi_p = Id$

Για $q \in V$ $\exists!\, v \in T_pM$ με $\exp_p(v)=q$

Αφού f_i ισομετρίες και διατηρούν γεωδαισιακές $\Rightarrow \phi(q)=q$

$\therefore f_1=f_2$ στη V

M συνεκτική άρα $\forall r \in M$ $\exists\, \alpha:[0,1]\to M$ με $\alpha(0)=p$ $\alpha(1)=q$.

Ορίζουμε

$$A = \{ t \in [0,1] \mid f_1(\alpha(t)) = f_2(\alpha(t)) \text{ και } (df_1)_{\alpha(t)} = (df_2)_{\alpha(t)} \}$$

Από πιο πάνω, $\sup A > 0$.
Αν $\sup A = t_0 \neq 1$ τότε επαναλαμβάνουμε το πιο πάνω επιχείρημα για το t_0 και παίρνουμε άτοπο.

$\therefore A = [0,1]$

$\therefore f_1(r) = f_2(r) \quad \forall r \in M$

$\square$

<u>Απόδειξη Θεωρήματος:</u>

$\tilde{M}$: απλά συνεκτική από η ολική κάλυψη, με σταθερή καμπυλότητα K

(a)(b) $N = \mathbb{H}^n$ ή $\mathbb{R}^n$

Έστω $p \in N$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ και $i : T_p(N) \to T_{\tilde{p}}(\tilde{M})$ γραμμική ισομετρία.

Ορίζουμε $f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1} : N \to \tilde{M}$.

Θεώρημα $N, \tilde{M}$ πλήρεις με $K \leq 0$, άρα f καλά ορισμένη από Θεώρημα Hadamard και f τοπική ισομετρία από Θεώρημα Cartan.

$\therefore |(df_{\tilde{p}})(v)| = |v| \Rightarrow f$ χάρτης κάλυψης από Λήμμα Θεωρ. Hadamard

Όμως $\tilde{M}$ είναι ολική κάλυψη $\therefore f$ διαφορομορφισμός.

(c) $f: \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p : (S^n \setminus \{-p\}) \to \tilde{M}$

αντίποδο του p

f τοπική ισομετρία από Θ. Cartan

Για $p' \in S^n$, $p' \neq p, -p$ και $\tilde{p}' = f(p')$ ορίζουμε

$$f' = \exp_{\tilde{p}'} \circ df_{p'} \circ \exp_{p'}^{-1} : (S^n \setminus \{-p'\}) \to \tilde{M}$$

$S^n \setminus \{-p, -p'\} = W$ είναι συνεκτική.

$p' \in W$ και

$$f(p') = \tilde{p}' = f'(p'),$$

$$df_{p'} = df'_{p'}$$

Από το Λήμμα, $f = f'$ στο W.

Ορίζουμε $g(r) = \begin{cases} f(r) & \text{για } r \in S^n \setminus \{-p\} \\ f'(r) & \text{για } r \in S^n \setminus \{-p'\} \end{cases}$

Η g είναι τοπική ισομετρία και άρα τοπικός διαφορομορφισμός. S^n συμπαγής, άρα g χάρτης κάλυψης, και αφού η $\tilde{M}$ είναι απλά συνεκτική τότε η g είναι διαφορομορφισμός.

$\therefore$ g ισομετρία. $\square$

<u>Πρόταση:</u> Έστω M πλήρης πολ/τα Riemann με σταθερή καμπυλότητα K $(=1, 0, \text{ή } -1)$. Τότε η M είναι ισομετρική με $\tilde{M}/\Gamma$ όπου $\tilde{M} = S^n$ αν $K=1$, $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$ αν $K=0$ και $\tilde{M} = \mathbb{H}^n$ αν $K=-1$

και Γ είναι υπο-ομάδα της ομάδας ισομετριών της $\tilde{M}$.

- Η Γ πρέπει να δρα με έναν απόλυτα ασυνεχή τρόπο στην $\tilde{M}$ (totally discontinously). και η μετρική στην $\tilde{M}/\Gamma$ είναι η επαγόμενη από το χάρτη κάλυψης $\tilde{M} \to \tilde{M}/\Gamma$.

Μεταβολές Ενέργειας (Variations of Energy).

Γεωδαισιακές: καμπύλες με μηδενική επιτάχυνση και είδαμε ότι τοπικά ελαχιστοποιούν το μήκος τόξου.
Θα δούμε ότι είναι κρίσιμα σημεία ενός προβλήματος μεταβολής.

(π.χ. ελαχιστικές επιφάνειες τοπικά ελαχιστοποιούν το συναρτησιακό εμβαδού (κρίσιμα σημεία του).

<u>Ορισμός</u>: Έστω $c:[0,a]\to M$ μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στην πολλα M. Μια συνεχής απεικόνιση

$$f:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,a]\to M \quad \text{τ.ω.}$$

(a) $f(0,t)=c(t)$ για $t\in[0,a]$

(b) $\exists$ διαμέριση του $[0,a]$ σε σημεία $0=t_0<t_1<\dots<t_{k+1}=a$ τ.ω. ο περιορισμός της f σε κάθε $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_i,t_{i+1}]$ $i=0,\dots,k$ είναι διαφορίσιμος.

ονομάζεται <u>μεταβολή</u> της c.

Η μεταβολή ονομάζεται γνήσια (proper) αν $f(s,0)=c(0)$ και $f(s,a)=c(a)$ $\forall s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

Αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε η μεταβολή ονομάζεται διαφορίσιμη.

- Για κάθε $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ η $f_s:[0,a]\to M$ με $f_s(t)=f(s,t)$ είναι μια καμπύλη της μεταβολής.

Η μεταβολή ορίζει μια οικογένεια από γειτονικές καμπύλες $\{f_s(t)\}_s$ της $f_0(t)=c(t)$.
Η μεταβολή είναι γνήσια ανν όλες αρχίζουν στο $c(0)$ και τελειώνουν στο $c(a)$.