Ορισμός: Ο τελεστής $\nabla R: \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathbb{R}$

ορίζεται ως:

$$\nabla R(X,Y,Z,W,T) = T(R(X,Y,Z,W)) - R(\nabla_T X, Y, Z, W)$$
$$- R(X,\nabla_T Y, Z, W) - R(X,Y,\nabla_T Z, W) - R(X,Y,Z,\nabla_T W).$$

- Μπορούμε ν.δ.ο. εξαρτάται μόνο από τιμές των X,Y,Z,W,T στο p.
- είναι τανυστής.

Πόρισμα: $\nabla R(X,Y,\underline{Z,W,T}) + \nabla R(X,Y,W,T,Z) + \nabla R(X,Y,Z,W,T) = 0$

2^n ταυτότητα Bianchi.

- Άσκηση - να γίνει σε πλαίσιο συντεταγμένων ή κανονικών συντεταγμένων.

Θεώρημα (Schur) Έστω (M^n, g) πολλ/τα Riemann $n\geq 3$.

Αν σε κάθε $p\in M$ η καμπυλότητα τομής $K(p,\sigma)$ δεν εξαρτάται από το επίπεδο $\sigma\subset T_pM$, αλλά μόνο από το p, δηλαδή $K(p,\sigma) = K(p) = f(p)$ τότε $f(p) =$ σταθερά $\forall p\in M$.

$n=2$: αυτό δεν ισχύει $K(p) =$ καμπυλότητα Gauss της πολλ/τας που μπορεί να μεταβάλλεται.

- Άσκηση στην Εργασία 6.

Αποδ: Χρησιμοποιεί τον τανυστή Q και τη 2^n ταυτότητα Bianch

<u>Ορισμός</u>: Η (M^n, g) ονομάζεται πολλ/τα Einstein, αν $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $Ric(X,Y) = \lambda \langle X, Y \rangle$ για $\lambda : M \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω (M^n, g) πολλ/τα Einstein με $n \geq 3$.
Τότε $\lambda =$ σταθερά στην M.
Αν $n = 3$, η M^3 έχει σταθερή καμπυλότητα τομής.
Άσκηση 632, Εργασία 6 - σε πλαίσιο κανονικών συντεταγμένων με 2η ταυτότητα Bianchi

Γενική Θεωρία της σχετικότητας:
Παρατήρηση ① Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (φως) κινούνται πάντα με σταθερή ταχύτητα, όταν ο παρατηρητής βρίσκεται σε πλαίσιο αδράνειας.
② Η πορεία του φωτός δεν είναι ευθεία κοντά σε βαρυτικά πεδία. - εκτρέπεται.

Το φως από το αστέρι εκτρέπεται όταν περνά δίπλα από τον ήλιο και το παρατηρούμε μετατοπισμένο (ουσιαστικά θαμπό).

Einstein: M^4 πολλά με μετρική Lorenz

- όχι θετικά ορισμένη

$$g = \tilde{g}|_{\mathbb{R}^3} - \alpha^2 dt^2$$

τ.ω. $Ric - \frac{1}{2} S \cdot g = T$ (*) S: βαθμωτή καμπυλότητα

T: συμμετρικός τανυστής 2

stress-energy tensor.

T: εκφράζει τη συγκέντρωση ενέργειας και ορμής της ύλης και της ακτινοβολίας.

Η βαρύτητα / τα σώματα μεταφράζονται σε γεωμετρική ιδιότητα του χωρό-χρονου έτσι ώστε το φως να κινείται σε γεωδαισιακές. - καμπύλες σταθερής ταχύτητας.

(*) Σύστημα ΜΔΕ με λύση τη μετρική του χώρου μας.

- Πρόβλεψη - την πορεία του φωτός
  - τη μετακίνηση στο περιήλιο του Ερμή
  - redshift φωτός λόγω βαρυτικών κυμάτων

  τα οποία έχουν επιβεβαιωθεί πειραματικά.
  - ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων που έχουν επίσης παρατηρηθεί.
  - ύπαρξη μαύρων τρυπών. - αρκετά μεγάλο βαρυτικό πεδίο → ώστε το φως δεν ξεφεύγει.
- Περιγράφει με τον πιο ακριβή μέχρι σήμερα τρόπο τις παρατηρήσεις μας σε μεγάλη κλίμακα.
- Δεν έχει ενωποιηθεί με κβαντικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται σε μικρές κλίμακες.

Brian Greene 'Fabric of the cosmos' Nova.

Κενό $\quad T \equiv 0 \quad Ric = \frac{1}{2} S \cdot g.$

$$S = g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j} \frac{1}{2} S \cdot g^{ij} g_{ij} = 2S \quad (n=4 \text{ -διάσταση})$$

$$\Rightarrow S = 0.$$

Einstein: σκέφτηκε να βάλει και κοσμολογική σταθερά

$$Ric - \lambda g - \frac{1}{2} S g = T.$$

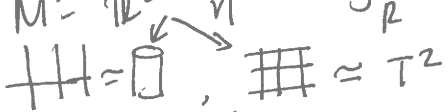
Δίνει στο κενό τη μαθηματική εξίσωση του Einstein -αλλά στη φυσική δεν είναι σωστή όπως κατάλαβε μετά.

Εξίσωση Einstein - μαθηματικό ενδιαφέρον

Uniformization Theorem: ποιες είναι οι πολλαπλότητες με σταθερή βαθμωτή καμπυλότητα.

$n=2 \quad \tilde{M}/\Gamma \quad$ Γ: διακριτή ομάδα μετασχηματισμών

$\tilde{M} = \mathbb{R}^2$ ή S^2_R ή H^2_R



$n \geq 3$? Είναι κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού ολικής βαθμωτής καμπυλότητας, όπως και η εξίσωση Einstein, όμως με διαφορετικές μεταβολές.

Υπολογισμός Καμπυλότητας: S^2_R

$$X(\phi,\theta) = (R\cos\theta\sin\phi,\ R\sin\theta\sin\phi,\ R\cos\phi)$$

$$g = R^2 d\phi^2 + R^2\sin^2\phi\, d\theta^2$$

$$\partial_1 = \partial/\partial\phi \qquad \partial_2 = \partial/\partial\theta$$

$$g_{11} = R^2 \qquad g_{22} = R^2\sin^2\phi \qquad g_{12} = 0$$

$$g^{11} = \frac{1}{R^2} \qquad g^{22} = \frac{1}{R^2\sin^2\phi} \qquad g^{12} = 0.$$

$$\Gamma_{11}^{1} = 0 = \Gamma_{11}^{2} = \Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{22}^{2}$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} \qquad \Gamma_{22}^{1} = -\sin\phi\cos\phi.$$

$$R_{ijk}^{\ \ \ l} = \sum_m \left[\Gamma_{jk}^{m}\Gamma_{im}^{l} - \Gamma_{ik}^{m}\Gamma_{jm}^{l}\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma_{jk}^{l}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_{ik}^{l})$$

$$R_{111}^{\ \ \ 1} = \sum_m \left(\overset{0}{\cancel{\Gamma_{11}^{m}}}\Gamma_{1m}^{1} - \overset{0}{\cancel{\Gamma_{11}^{m}}}\Gamma_{1m}^{l}\right) + \partial_1(\Gamma_{11}^{1}) - \partial_1(\Gamma_{11}^{1}) = 0.$$

παρόμοια $R_{11*}^{\ \ \ *} = R_{22*}^{\ \ \ *} = 0$. λόγω συμμετριών του R.

Θα δούμε ότι χρειάζεται μόνο να υπολογίσουμε τα $R_{122}^{\ \ \ 1}$ και $R_{211}^{\ \ \ 2}$

$$R_{122}^{\ \ \ 1} = \sum_m \left[\Gamma_{22}^{m}\Gamma_{1m}^{1} - \Gamma_{12}^{m}\Gamma_{2m}^{1}\right] + \partial_1(\Gamma_{22}^{1}) - \partial_2(\overset{0}{\cancel{\Gamma_{12}^{1}}})$$

$i=1=l$
$j=2=k$

$$= \Gamma_{22}^{1}\overset{0}{\cancel{\Gamma_{11}^{1}}} + \Gamma_{22}^{2}\overset{0}{\cancel{\Gamma_{12}^{1}}} - \overset{0}{\cancel{\Gamma_{12}^{1}}}\Gamma_{21}^{1} - \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{22}^{1} + \frac{\partial}{\partial\phi}(-\sin\phi\cdot\cos\phi)$$

$$= \cos^2\phi - \cos^2\phi + \sin^2\phi = \sin^2\phi.$$

$$R_{211}^{\;2} = \sum_m \left[\Gamma_{11}^{m} \Gamma_{2m}^{2} - \Gamma_{21}^{m} \Gamma_{1m}^{2} \right] + \partial_2 \left(\cancel{\Gamma_{11}^{2}} \right)^{0} - \partial_1 \left(\Gamma_{21}^{2} \right)$$

$i = 2 = \ell$
$j = 1 = k$

$$= \cancel{\Gamma_{11}^{1}}^{\,0} \Gamma_{21}^{2} + \cancel{\Gamma_{11}^{2}}^{\,0} \Gamma_{22}^{2} - \cancel{\Gamma_{21}^{1}}^{\,0} \Gamma_{11}^{2} - \Gamma_{21}^{2} \Gamma_{12}^{2} - \partial_1 \left(\Gamma_{12}^{2} \right) =$$

$$= -\frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} - \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\cos\phi}{\sin\phi} \right) = -\frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} + 1 + \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} = 1$$

$$R_{ijk\ell} = \sum_m \langle R_{ijk}^{\;m} \partial_m, \partial_\ell \rangle = \sum_m R_{ijk}^{\;m} \, g_{m\ell}.$$

Τα μόνα μη-μηδενικά:

$$R_{1221} = R_{122}^{\;1} \, g_{11} + R_{122}^{\;2} \, \cancel{g_{21}} = \sin^2\phi \cdot R^2 \quad (= -R_{1212})$$

$$R_{2112} = R_{211}^{\;1} \, \cancel{g_{12}}^{\,0} + R_{211}^{\;2} \, g_{22} = R^2 \sin^2\phi \quad (= -R_{2121})$$

$$R_{ij} = \sum_{k,\ell} g^{k\ell} R_{ik\ell j} = g^{11} R_{i11j} + g^{22} R_{i22j} \quad \left(= \sum_{k,\ell,m} g^{k\ell} g_{mj} R_{ik\ell}^{\;m} \right)$$

$$\left.\begin{aligned} R_{11} &= g^{22} R_{1221} = \frac{1}{R^2 \sin^2\phi} R^2 \sin^2\phi = 1 \\ R_{22} &= g^{11} R_{2112} = \frac{1}{R^2} R^2 \sin^2\phi = \sin^2\phi \\ R_{ij} &= 0 \quad \text{για } i \neq j \end{aligned}\right\} \text{ τανυστής Ricci.}$$

$$S = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{2}{R^2}$$

βαθμωτή καμπ.

• Για $n=1$, M^1, $g = f^2(x)\,dx^2$

$$g_{11} = f^2$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g_{11,1} = \frac{f'}{f}$$

$$R_{ij} = \sum_{k,l} g^{kl} R_{iklj} = g^{11} \cdot R_{1111} = 0.$$

• Αν $M = M_1^1 \times M_2^1$ γινόμενο δυο πολλων Riemann (M_1^1, g^1) (M_2^1, g^2) διάστασης 1.

Εστω $g = g^1 + g^2$ η μετρική στην M.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \cdot g_{11,1}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} \cdot \underset{0}{g^{12}} (\ldots) + \frac{1}{2} g^{22} \cdot (\cancel{g_{12,1} \cdot 2 - g_{11,2}})$$

μικτά.

παρόμοια Γ_{ij}^k με i,j,k μικτά. $\equiv 0$.

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \cdot g^{22} (g_{22,2})$$

$$R_{ijk}^l = \sum_m \left[\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \cdot \Gamma_{jm}^l \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^l) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^l)$$

$\nearrow {}^1R_{ijk}^l$ για i,j,k,l δείκτες στην M_1

$\longrightarrow$ 0 στα μικτά

$\searrow {}^2R_{ijk}^l$ για i,j,k,l δείκτες στην M_2

$\therefore\ R_{ijkm} = \sum_{l} R^{l}_{ijk}\, g_{lm} = \sum_{l\in M_1} R^{l}_{ijk}\, g_{lm} + \sum_{l\in M_2} R^{l}_{ijk}\, g_{lm}.$

$\nearrow\ {}^{1}R_{ijkm}$ για $i,j,k,m \in M_1$

$\rightarrow\ 0$ στα μικτά.

$\searrow\ {}^{2}R_{ijkm}$ για $i,j,k,m \in M_2$.

και $R_{ij} = \sum_{k,l} g^{kl} R_{iklj} =$

$\nearrow\ {}^{1}R_{ij}$ για $i,j \in M_1$

$\rightarrow\ 0$ στα μικτά.

$\searrow\ {}^{2}R_{ij}$ για $i,j \in M_2$

$\therefore$ διαχωρισμός του τανυστή καμπυλότητας στις δύο πολ/τες.

$\therefore\ R_{ijkl} = 0$ στην περίπτωση που $M = M_1^1 \times M_2^1$

$\therefore\ M$ επίπεδη.

• Παρόμοια, αν $M = M_1^n \times M_2^m$ με $g = g^1 + g^2$

R_{ijkl}

$\nearrow\ {}^{1}R_{ijkl}$ $i,j,k,l \in M_1$

$\rightarrow\ 0$ στα μικτά

$\searrow\ {}^{2}R_{ijkl}$ $i,j,k,l \in M_2$ (αφού ισχύει για Γ_{ij}^{k})

Αν $X \in T_pM_1$ και $Y \in T_qM_2$ $\Rightarrow X,Y \in T_{(p,q)}M$

και έστω σ υποεπίπεδο που παράγουν τα X,Y στο $T_{(p,q)}M$

τότε $K(\sigma) = \dfrac{R(X,Y,Y,X)}{|X\wedge Y|^2} = 0.$ αφού αντιστοιχεί σε R_{ijkl} μικτά

Αν $X,Y \in T_pM_1$ $K(\sigma) = K^1(\sigma)$

Αν $X,Y \in T_qM_2$ $K(\sigma) = K^2(\sigma)$.

| Η καμπυλότητα διαχωρίζεται όταν η μετρική διαχωρίζεται.

• $f(x)^2dx^2 + g(y)^2dy^2 \rightarrow R = 0$ | Σφαίρα $d\phi^2 + \sin^2\phi\, d\theta^2$ $R \neq 0$

$\uparrow$ συνάρτηση της άλλης μεταβλητής.

Σχέση ανάμεσα στην καμπυλότητα και γεωμετρία /τοπολογία της πολ/τας:

Θεώρημα Gauss-Bonnet:

Έστω (M^2, g) μια συμπαγής προσανατολισμένη πολ/τα.

K = καμπυλότητα Gauss της M^2 = καμπυλότητα τομής.

$\chi(M)$ = χαρακτηριστική Euler (τοπολογική σταθερά).

Τότε $\int_M K \, dA = 2\pi\chi(M)$.

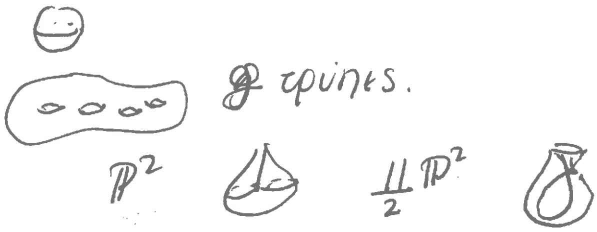
Τοπολογία: Θεώρημα ταξινόμησης συμπαγών επιφανειών.

M^2: συμπαγής επιφάνεια (πολ/τα 2-διάστατη). Τότε η M είναι ομοιομορφική με:

- S^2 ή $\coprod_g T^2$, στην περίπτωση που είναι προσανατολισμένη (συνεκτικό άθροισμα g τόρων, για S^2 $g=0$).
- $\coprod_g \mathbb{P}^2$ (συνεκτικό άθροισμα g $\mathbb{P}^2$) στην περίπτωση που δεν είναι προσανατολισμένη.

g: το γένος της επιφάνειας.

$$\chi(M) = \begin{cases} 2 & \text{αν } M \simeq S^2 : g=0 \\ 2-2g & \text{αν } M \simeq \coprod_g T^2 \\ 2-g & \text{αν } M \simeq \coprod_g \mathbb{P}^2 \end{cases}$$



Gauss-Bonnet δεν ισχύει για μη-προσανατολισμένη, μόνο για το διπλό κάλυμμά τους.

Συνέπειες:

Πόρισμα: Αν μια συμπαγής 2-διάστατη πολλ/τα Riemann (M^2, g) είναι ομοιομορφική με

- S^2 ή $\mathbb{P}^2$ τότε $K>0$ σε κάποιο σημείο
- $\mathbb{P}^2 \amalg \mathbb{P}^2$ ή T^2 $(\chi(M)=0)$ τότε $K \equiv 0$ (παντού) ή έχει τόσο σημεία όπου $K>0$ και σημεία όπου $K<0$.
- Στις υπόλοιπες περιπτώσεις υπάρχουν πάντοτε σημεία όπου $K<0$.

Πόρισμα. Έστω M μια συμπαγής επιφάνεια Riemann με καμπυλότητα Gauss K.

Αν $K>0$, τότε $M \cong S^2$ ή $M \cong \mathbb{P}^2$

Αν $K \leq 0$, τότε η M έχει γένος $g \geq 1$ αν είναι προσαν. και $g \geq 2$ αν είναι μη-προσανατολίσιμη

Πως η καμπυλότητα επηρεάζει τις γεωδαισιακές:

$K>0 \rightarrow$ η γεωδαισιακές δεν απομακρύνονται τόσο όσο στο $\mathbb{R}^n$

$K<0 \rightarrow$ η γεωδαισιακές απομακρύνονται περισσότερο παρά ότι στο $\mathbb{R}^n$

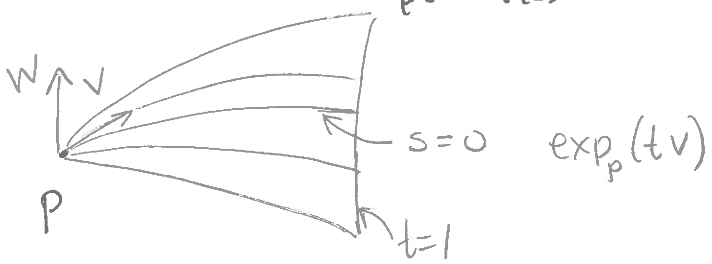
Εξισώσεις Jacobi.

Υπενθύμιση:

Λήμμα Gauss:

$f(t,s) = \exp_p(t\,v(s)) \qquad 0 \le t \le 1 \qquad |s| < \varepsilon$

με $v(s)$ τ.ω. $v(0) = v \quad v'(0) = w$.



Τότε $\dfrac{\partial f}{\partial s}(1,0) = (d\exp_p)_{tv(s)}(t \cdot v'(s))\Big|_{\substack{t=1\\ s=0}} = (d\exp_p)_v(w)$

$|(d\exp_p)_v(w)|$ χαρακτηρίζει το ρυθμό απομάκρυνσης των γεωδαισιακών $t \longmapsto \exp_p(tv(s))$

Εξαρτάται από την καμπυλότητα τομής στο p για το επίπεδο που παράγουν τα v, w.

<u>Ορισμός</u>: Αν $(d\exp_p)_v(w) = 0$ για $w \neq 0$ τότε το v ονομάζεται ιδιάζον σημείο της εκθετικής απεικόνισης στο p $\exp_p$.

<u>Λήμμα</u> (από προηγούμενο μάθημα). $f(t,s) \qquad V(t,s)$ διαν. πεδίο συν f.

Τότε $\dfrac{D}{\partial t}\left(\dfrac{DV}{\partial s}\right) - \dfrac{D}{\partial s}\left(\dfrac{DV}{\partial t}\right) = R_{\frac{\partial f}{\partial t}\,\frac{\partial f}{\partial s}} V$

όπου $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial s}, \dfrac{\partial f}{\partial t}\right\}$ πλαίσιο συντεταγμένων της υπο-επιφάνειας με $\left[\dfrac{\partial f}{\partial s}, \dfrac{\partial f}{\partial t}\right] = 0$.

$\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) = \left(d\exp_p\right)_{tv(s)}\left(t\,v'(s)\right)$ είναι διαν. πεδίο στην f

$\frac{\partial f}{\partial t}(t,s) = \left(d\exp_p\right)_{tv(s)}\left(v(s)\right)$ είναι επίσης διαν. πεδίο.

και αφού $t \mapsto \exp_p(tv(s_0))$ είναι γεωδαισιακή σε κάθε $s=s_0$ σταθερό,

τότε $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Df}{\partial t}\right) = 0$

Θέτουμε $V = \frac{\partial f}{\partial t}$. Τότε από το Λήμμα:

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{D}{\partial s}\overset{\to 0}{\overbrace{\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)}} - R_{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Θυμίζουμε ότι $\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)$ αφού η f είναι παραμετρισμένη επιφάνεια (Λήμμα συμμετρίας) και

$$R_{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}}(*) = -R_{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}}(*)$$

Άρα: $$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) + R_{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Ορίζουμε $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ και $\frac{\partial f}{\partial t}(t,0) = \gamma'(t)$ (αφού γεωδαισιακή)

Τότε: $\frac{D^2 J}{dt^2} + R_{J(t)\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$. - εξίσωση Jacobi.

<u>Ορισμός:</u> Έστω $\gamma:[0,a]\to$ γεωδαισιακή και $J(t)$ διαν. πεδίο στη γ.

Το J ονομάζεται <u>πεδίο Jacobi</u> αν $\forall t\in[0,a]$

$$\boxed{\frac{D^2 J}{dt^2} + R_{J(t)\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0}$$

- Από τα πιο πάνω, το πεδίο $\frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ είναι πεδίο Jacobi.

<u>Σε συντεταγμένες:</u> Έστω $\{e_i(t)\}_i$ βάση παράλληλων ο.κ. πεδίων στη γ. ($e_i(t) = P_{0t}\, e_i(0)$, $\{e_i(0)\}_i$ ο.κ)

$J(t) = \sum_i f_i(t)\, e_i(t)$.

και $\frac{D^2 J}{dt^2} = \sum_i f_i''(t)\, e_i(t)$ αφού $\frac{D(e_i(t))}{dt} = 0$.

$R_{e_i\gamma'}\gamma' = \sum_j \langle R_{e_i\gamma'}\gamma', e_j\rangle e_j$ αφού e_j ο.κ.

Αν το J είναι πεδίο Jacobi, τότε.

$$\left\langle \sum_i f_i''\, e_i + R_{(\sum_i f_i e_i)\gamma'}\gamma', e_j \right\rangle = 0 \quad \forall j$$

$$\Rightarrow f_j''(t) + \sum_i f_i(t)\underbrace{\langle R_{e_i(t)\gamma'(t)}\gamma'(t), e_j(t)\rangle}_{\alpha_{ij}} = 0 \quad \forall j \qquad (*)$$

Το σύστημα εξισώσεων (*) αποτελείται από γραμμικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού/τάξης.

Άρα κάθε ζεύγος $J(0)$, $\frac{DJ}{dt}(0)$ ορίζουν μία και μοναδική λύση για $t\in[0,a]$.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν $2n$ Γ.Α. πεδία Jacobi στη γ.

Επίσης τα πεδία $\gamma'(t)$ και $t\gamma'(t)$ είναι πεδία Jacobi.

$$\left(\frac{D^2(\gamma')}{dt^2}=0, \quad \frac{D^2}{dt^2}(t\gamma')=0 \quad \text{και} \quad R_{t\gamma'\gamma'}\gamma' = R_{\gamma'\gamma'}\gamma'=0. \right)$$

Τα υπόλοιπα Γ.Α. πεδία Jacobi είναι κάθετα στη γ.

- Τα πεδία Jacobi θα μας βοηθήσουν να δούμε το πόσο γρήγορα απομακρύνονται οι γεωδαισιακές που ξεκινούν στο p, ανάλογα με την καμπυλότητα, αλλά και να χαρακτηρίσουμε τα ιδιάζοντα σημεία του $\exp_p$.

Πεδία Jacobi σε πολλ/τες σταθερής καμπυλότητας.

Έστω M πολλ/τα Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής K. (K ανεξάρτητη του $\sigma \Rightarrow$ ανεξάρτητη του σημείου για $n \geq 3$. - Εμείς υποθέτουμε $K(p,\sigma)=K$ $\forall p, \forall \sigma$.)

Έστω γ γεωδαισιακή με $|\gamma'|=1$.
και $J(t)$ πεδίο Jacobi στη γ, κάθετο στο $\gamma'(t)$. $\forall t$.

Λήμμα: $R_{J\gamma'}\gamma' = KJ$.

Απόδειξη: Αφού $K(p,\sigma)=K$, τότε.

$$R(X,Y,Z,W) = K\,Q(X,Y,Z,W) = K\left(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\right)$$

$$\therefore \langle R_{J\gamma'}\gamma', T\rangle = R(J,\gamma',\gamma',T) = K\left(\langle J,T\rangle\langle\gamma',\gamma'\rangle - \underbrace{\langle J,\gamma'\rangle}_{0}\langle\gamma',T\rangle\right)$$

$$= K\langle J,T\rangle. \quad \forall T.$$

$$\therefore R_{J\gamma'}\gamma' = KJ. \qquad \square$$

- Παρατήρηση: Αν V, W διαν. πεδία στο $\mathbb{R}^n$ τ.ω. $\langle V,Z\rangle = \langle W,Z\rangle$ $\forall Z\in\mathbb{R}^n$, τότε $V=W$.

Άρα για κάθε πεδίο Jacobi κάθετο στη γ' ισχύει.

$$\frac{D^2 J}{dt} + KJ = 0.$$

Έστω $W(t)$ παράλληλο διαν. πεδίο στη γ με $\langle \gamma', W\rangle = 0$ και $|W| = 1$, τότε

$$J(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} W(t) & \text{αν } K>0 \\ tW(t) & \text{αν } K=0 \\ \dfrac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} W(t) & \text{αν } K<0 \end{cases}$$

είναι οι λύσεις της εξίσωσης Jacobi με $J(0)=0$ και $J'(0) = W(0)$.

(• αφού $\frac{DW}{dt} = 0$, τότε $\frac{D^2 J}{dt^2} = (\varphi_K(t))'' \cdot W(t) = -K\varphi_K(t) \cdot W(t)$.

οι συναρτήσεις συντελεστές του W, είναι λύσεις της $\varphi_K'' = -K\varphi_K$ με $\varphi_K(0) = 0$ και $\varphi_K'(0) = 1$).

• Το $W(0)$ καθορίζει μοναδικά το $W(t)$.

• Η μοναδικότητα των λύσεων για την εξίσωση Jacobi (αφού καθορίζονται αρχικές συνθήκες) μας δείχνει ότι αυτός είναι και ο μοναδικός τρόπος να πάρουμε πεδίο Jacobi στη γ με $J(0)=0$: