Σε συντεταγμένες: Γράφουμε $\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i$

$R_{XY}Z \in \mathfrak{X}(M)$

Ορίζουμε: $R_{\partial_i \partial_j}\partial_k = \sum_l R_{ijk}^{\ \ \ \ l}\,\partial_l$ (= $R_{ijk}^{\ \ \ \ l}\,\partial_l$ στο συμβολισμό Einstein το άθροισμα υπονοείται).

Για $X = \sum_i X_i \partial_i$ $\quad Y = \sum_j Y_j \partial_j$ $\quad Z = \sum_k Z_k \partial_k$

$$R_{XY}Z = \sum_{i,j,k,l} R_{ijk}^{\ \ \ \ l}\, X_i Y_j Z_k\, \partial_l$$

- Υπολογισμός των $R_{ijk}^{\ \ \ \ l}$ ως προς τα σύμβολα Christoffel:

$$\sum_l R_{ijk}^{\ \ \ \ l}\,\partial_l = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - 0 =$$

$$= \sum_m \left[\nabla_{\partial_i}(\Gamma_{jk}^{\ \ m}\partial_m) - \nabla_{\partial_j}(\Gamma_{ik}^{\ \ m}\partial_m)\right] =$$

$$= \sum_m \Big[\frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma_{jk}^{\ \ m})\,\partial_m + \Gamma_{jk}^{\ \ m}\sum_l \Gamma_{im}^{\ \ \ l}\,\partial_l - \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_{ik}^{\ \ m})\,\partial_m - \Gamma_{ik}^{\ \ m}\sum_l \Gamma_{jm}^{\ \ \ l}\,\partial_l\Big] =$$

$$\Rightarrow R_{ijk}^{\ \ \ \ l} = \sum_m \left[\Gamma_{jk}^{\ \ m}\Gamma_{im}^{\ \ \ l} - \Gamma_{ik}^{\ \ m}\Gamma_{jm}^{\ \ \ l}\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma_{jk}^{\ \ l}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_{ik}^{\ \ l})$$

Ορίζουμε: $\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_\ell) = R_{ijk\ell}$.

- έχει τις ιδιότητες: $R_{ijk\ell} = -R_{jik\ell}$

$$= -R_{ij\ell k}$$

$$= R_{k\ell ij}$$

και $R_{ijk\ell} + R_{jki\ell} + R_{kij\ell} = 0$

Επίσης: $R_{ijk\ell} = \langle \sum_m R_{ijk}^{\ m} \partial_m, \partial_\ell \rangle = \sum_m R_{ijk}^{\ m} g_{m\ell}$

Παρατήρηση: $\mathcal{R}$ και R_{XY} στο p εξαρτώνται μόνο από τις τιμές των διαν. πεδίων X, Y, Z, W στο σημείο p λόγω του ότι είναι τανυστές, δηλαδή γραμμικές απεικονίσεις ως προς συντελεστές στο $\mathcal{D}(M)$.

- Παρόμοια απόδειξη με $\nabla_X Y$ να εξαρτάται από $X(p)$ αφού $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$.

Θεώρημα: Έστω $\phi : (M, g) \longrightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ ισομετρία ($\phi^*(\tilde{g}) = g$). Τότε $\phi^*(\tilde{\mathcal{R}}) = \mathcal{R}$, δηλαδή

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = \tilde{\mathcal{R}}(\phi_*(X), \phi_*(Y), \phi_*(Z), \phi_*(W)).$$

<u>Ορισμός</u> Μια πολλ/τα Riemann ονομάζεται <u>επίπεδη</u> αν $\forall p \in M$ υπάρχει ανοικτή γειτονιά $U \ni p$ η οποία να είναι ισομετρική με τον $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij})$ - ευκλείδιο επίπεδο χώρο.

<u>Θεώρημα:</u> Μια πολλ/τα Riemann είναι επίπεδη ανν ο τανυστής καμπυλότητας είναι μηδενικός.

<u>"Απόδειξη:"</u> (M, g)

($\Rightarrow$) $\exists$ ισομετρία με $g = \phi^*(\delta_{ij})$

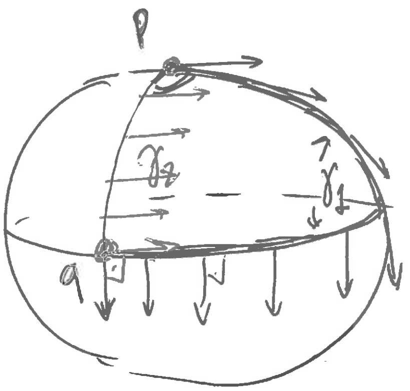
Τότε $R = \phi^*(R_{\delta_{ij}}) = \phi^*(0) = 0.$

($\Leftarrow$) Κατασκευή παράλληλου ο.κ. πλαισίου συντεταγμένων σε μια γειτονιά του p.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω (M, g) μια πολλ/τα Riemann τ.ω. $\forall p, q \in M$ η παράλληλη μεταφορά από το p στο q δεν εξαρτάται από την καμπύλη που τα ενώνει.

Τότε $R \equiv 0.$

<u>Παράδειγμα:</u>



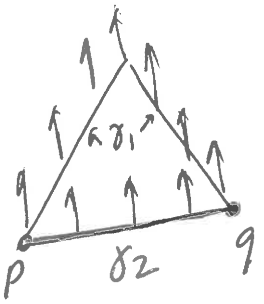
Αν γ: γεωδαισιακή τότε η παράλληλη μεταφορά στη γ διατηρεί τη γωνία με το γ'.

$$\frac{d}{dt}(\langle \gamma', V \rangle) = \langle \underbrace{\frac{D\gamma'}{dt}}_{0}, V \rangle + \langle \gamma', \underbrace{\frac{DV}{dt}}_{0} \rangle$$

$$= 0.$$

$\therefore \langle \gamma', V \rangle = 0.$

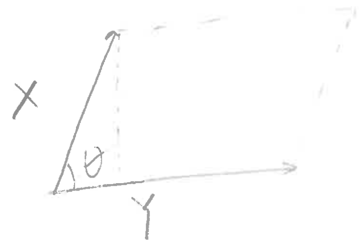
Η σφαίρα έχει μη-μηδενική καμπυλότητα.



Ενώ στο $\mathbb{R}^2$, ανεξάρτητα από την γεωδαισιακή καμπύλη, η παράλληλη μεταφορά σε παίρνει στο ίδιο διάνυσμα.

Ο τανυστής καμπυλότητας είναι πολύπλοκος για να περιγραφεί.
- πολλές χρήσιμες πληροφορίες βγαίνουν από ίχνη του (traces).

Για $X, Y \in T_pM$ ορίζουμε $|X \wedge Y| = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$
- το εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα X, Y.



$$A = |X||Y|\sin\theta = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - |X|^2|Y|^2\cos^2\theta}$$
$$= \sqrt{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

<u>Πρόταση:</u> Έστω $\sigma \subset T_pM$ ένας δισ-διάστατος υπόχωρος του T_pM με $X, Y \in \sigma$, γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.
Τότε $K(X,Y) = \dfrac{R(X,Y,Y,X)}{|X \wedge Y|^2}$ δεν εξαρτάται από τα $X, Y \in \sigma$, αλλά μόνο από το σ.

<u>Απόδειξη:</u> Μια αλλαγή βάσης X, Y σε X', Y', γίνεται μέσω των μετασχηματισμών.

$(X,Y) \mapsto (Y,X)$
$(X,Y) \mapsto (\lambda X, Y)$
$(X,Y) \mapsto (X+\lambda Y, Y)$

και συνθέσεων τους. $\quad ((X',Y') = (\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y))$

Παρατηρούμε όμως ότι

$K(X,Y) = K(Y,X)$ αφού $R(X,Y,Y,X) = R(Y,X,X,Y)$, $|X\wedge Y| = |Y\wedge X|$,

$K(X,Y) = K(\lambda X, Y)$ αφού $\dfrac{R(\lambda X, Y, Y, \lambda X)}{|\lambda X \wedge Y|^2} = \dfrac{\lambda^2 R(X,Y,Y,X)}{\lambda^2 |X\wedge Y|^2}$

$K(X,Y) = K(X+\lambda Y, Y)$ αφού

$$\frac{R(X+\lambda Y, Y, Y, X+\lambda Y)}{|(X+\lambda Y)\wedge Y|^2} = \frac{R(X,Y,Y,X) + \lambda R(X,\cancel{Y},\cancel{Y},Y) + \lambda(\cancel{Y},\cancel{Y},Y,X) + \lambda^2 R(\cancel{Y},Y,Y,Y)}{|X\wedge Y|^2}$$

$$= K(X,Y)$$

και $|(X+\lambda Y)\wedge Y|^2 = |X+\lambda Y|^2 |Y|^2 - \langle X+\lambda Y, Y\rangle^2 =$

$= (|X|^2 + 2\lambda \cancel{\langle X,Y\rangle} + \cancel{\lambda^2 |Y|^2})|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2 - \cancel{2\langle X,Y\rangle\lambda|Y|^2} - \cancel{\lambda^2\langle Y,Y\rangle^2}$

$= |X\wedge Y|^2$

$\square$

<u>Ορισμός</u>: Για $p\in M$ και $\sigma \subset T_pM$ διοδιάστατος υπόχωρος με βάση $\{X,Y\}$, ορίζουμε $K(X,Y) = K(\sigma)$ την <u>καμπυλότητα τομής</u> του σ στο p. (sectional curvature).

• Αν γνωρίζουμε το $K(\sigma)$ για κάθε επίπεδο $\sigma \in T_pM$, τότε γνωρίζουμε την καμπυλότητα R - το επόμενο Λήμμα:

<u>Λήμμα:</u> Έστω V διανυσματικός χώρος διάστασης ≥ 2 με εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$. Έστω R και R' απεικονίσεις από το $V\times V\times V\times V$ στο $\mathbb{R}$, γραμμική και στις 4 θέσεις που να ικανοποιούν τις συμμετρίες (i)-(v) του τανυστή καμπυλότητας.
Για X,Y Γ.Α. και σ το δισδιάστατο υποχώρο που παράγεται από τα X,Y ορίζουμε

$$K(\sigma)=\frac{R(X,Y,Y,X)}{|X\wedge Y|^2} \qquad K'(\sigma)=\frac{R'(X,Y,Y,X)}{|X\wedge Y|^2}$$

Αν για κάθε $\sigma\subset V$ $K(\sigma)=K(\sigma')$ τότε $R=R'$.

<u>Απόδειξη:</u> Θέλουμε ν.δ.ο. $R(X,Y,Z,W)=R'(X,Y,Z,W)$ $\forall X,Y,Z,W\in V$.

Αφού $K(\sigma)=K'(\sigma') \Rightarrow \forall X,Y$ $R(X,Y,Y,X)=R'(X,Y,Y,X)$.
Χτίζουμε το R από αυτή την ιδιότητα:

$$R(X+Z,Y,Y,X+Z)=R'(X+Z,Y,Y,X+Z)$$

$$\Rightarrow \cancel{R(X,Y,Y,X)}+R(Z,Y,Y,X)+R(X,Y,Y,Z)+\cancel{R(Z,Y,Y,Z)}=$$
$$=\cancel{R'(X,Y,Y,X)}+R'(Z,Y,Y,X)+R'(X,Y,Y,Z)+\cancel{R'(Z,Y,Y,Z)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2R(X,Y,Y,Z)=2R'(X,Y,Y,Z) \quad \text{από ιδιότητα } R,R'$$

$$\Rightarrow R(X,Y,Y,Z)=R'(X,Y,Y,Z)$$

$$\therefore R(X,Y+W,Y+W,Z)=R'(X,Y+W,Y+W,Z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{R(X,Y,Y,Z)}+R(X,Y,W,Z)+R(X,W,Y,Z)+\cancel{R(X,W,W,Z)}=$$
$$=\cancel{R'(X,Y,Y,Z)}+R'(X,Y,W,Z)+R'(X,W,Y,Z)+\cancel{R'(X,W,W,Z)}$$

$$\Rightarrow R(X,Y,W,Z)-R'(X,Y,W,Z)=-R(\underline{X,W},Y,Z)+R'(\underline{X,W},Y,Z)$$
$$=R(W,X,Y,Z)-R'(W,X,Y,Z) \quad \text{-κυκλική μετάθεση}$$

$X,Y,W\equiv W,X,Y\equiv Y,W,X$

$$=R(Y,W,X,Z)-R'(Y,W,X,Z)$$

- Αφού ισχύει για κυκλική μετάθεση $X,Y,W \mapsto W,X,Y$

  τότε ισχύει για $W,X,Y \longmapsto Y,W,X$.

- Δηλαδή οι τρεις κυκλικοί συνδυασμοί στο X,Y,W είναι ίσοι

  $\Rightarrow 0$ Bianchi

$$\therefore\ R(X,Y,W,Z)+R(Y,W,X,Z)+R(W,X,Y,Z) \rightarrow 0 \text{ Bianchi}$$

$$-R'(X,Y,W,Z)-R'(Y,W,X,Z)-R'(W,X,Y,Z)=$$

$$3\left[R(X,Y,W,Z)-R'(X,Y,W,Z)\right]$$

$$\Rightarrow R(X,Y,W,Z)=R'(X,Y,W,Z) \qquad \forall X,Y,W,Z.$$

Δηλαδή η καμπυλότητα τομής καθορίζει την καμπυλότητα, παρόλο που είναι ένα ίχνος της.

$\square$

Λήμμα: Έστω $Q: T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $Q(X,Y,Z,W) = \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle$.
Τότε η M έχει σταθερή καμπυλότητα τομής K_0 στο p ανν $R = K_0 Q$.

Απόδειξη: Άσκηση:

$(\to)$ $K(\sigma) = K_0$ $\forall \sigma$.

Ορίζουμε $R'(X,Y,Z,W) = K_0\, Q(X,Y,Z,W)$.

ν.δ.ο. ισχύουν (i), (ii), (iii), (iv) για τανυστή καμπυλότητας.

Ορίζουμε $K'(X,Y) = \dfrac{R'(X,Y,Y,X)}{|X\wedge Y|^2} = K_0 \dfrac{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}{|X\wedge Y|^2} = K_0$

$= K(X,Y)$ $\forall X,Y$.

Άρα από Λήμμα $R = R' = K_0 Q$.

$(\leftarrow)$ Αν $R = K_0 Q$ τότε $K(X,Y) = K_0$ -υπολογισμός $\square$

Πόρισμα: Έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ο.κ. βάση για το T_pM.
και $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$.
Τότε η καμπυλότητα τομής στο p για το υποεπίπεδο σ
$K(\sigma, p) = K_0$ είναι σταθερή για κάθε $\sigma \subset T_pM$
ανν $R_{ijkl} = K_0(\delta_{il}\cdot\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl})$. όπου $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$.

- Δηλαδή $K = K_0$ $\forall\sigma \Leftrightarrow R_{ijji} = -R_{ijij}$ $\forall i\neq j$ και
$R_{ijkl} = 0$ στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

<u>Ορισμός:</u> Έστω $X = z_n$ μοναδιαίο διάνυσμα στο T_pM και $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ ο.κ. βάση για το υπερεπίπεδο του T_pM που είναι κάθετο στο X. (υπόχωρος του T_pM, κάθετος στο X).

Ορίζουμε: $Ric_p(X) = \sum_{i=1}^{n-1} R(X, z_i, z_i, X)$

η <u>καμπυλότητα Ricci</u> στην κατεύθυνση X

$$S(p) = \sum_{j=1}^{n} Ric_p(z_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} R(z_j, z_i, z_i, z_j)$$

η <u>βαθμωτή καμπυλότητα</u> στο p (scalar curvature)

$$Ric_p(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} R(X, z_i, z_i, Y)$$

ο <u>τανυστής Ricci</u> στο p.

* Ο Do Carmo βάζει $1/n$ ή $1/{n-1}$ αλλά όχι ο συνήθης ορισμός.

<u>Πρόταση:</u> Οι πιο πάνω ορισμοί είναι ανεξάρτητοι της βάσης που χρησιμοποιείται.

<u>Απόδειξη:</u> Αν $w_\ell = \sum_i a_{\ell i} z_i$ ο.κ. βάση με $z_n = X$

$$\Leftrightarrow \underset{\delta_{\ell m}}{\underset{\parallel}{\langle w_\ell, w_m \rangle}} = \sum_{i,j} a_{\ell i} a_{mj} \delta_{ij} \Rightarrow \sum_j a_{\ell j} a_{mj} = \delta_{\ell m}$$

$\therefore A = (a_{\ell j})_{\ell j}$ τ.ω. $AA^T = A^T A = I$ ορθός πίνακας

$$\therefore \sum_{\ell=1}^{n-1} R(X, w_\ell, w_\ell, X) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} a_{\ell i} a_{\ell j} R(X, z_i, z_j, X)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell i} a_{\ell j}}_{\delta_{ij}} R(X, z_i, z_j, X) \qquad \text{αφού } R(X, w_n, w_n, X) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} R(X, z_i, z_i, X) = Ric_p(X)$$

– Παρόμοια τα υπόλοιπα.

$\square$

Υπολογισμός τους σε πλαίσιο συντεταγμένων $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$

Θέτουμε $R_{ij} := Ric(\partial_i, \partial_j) = \sum_{k=1}^{n} R(\partial_i, z_k, z_k, \partial_j)$

όπου $z_k = \sum_j \alpha_{kj} \partial_j$

τω. $\underset{\langle z_k, z_e \rangle}{\underset{\parallel}{\delta_{ke}}} = \sum_{i,j} \alpha_{ki} \alpha_{ej} g_{ij}$ $(*)$

Αν $A = (\alpha_{km})_{km}$ πινακας, τοτε $(*) \Leftrightarrow I = A^T \cdot g A$.

$\Leftrightarrow g = (A^T)^{-1} A^{-1}$ (μεταφορά εσωτερικού γινομένου σε πινακα - τύπος τετραγωνικής μορφής).

Ομως A αλλαγή βάσης άρα $A^T = A^{-1}$ $\therefore g = A \cdot A^T$ και $g^{-1} = A^T A$.

Άρα $R_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m,e} \alpha_{km} \alpha_{ke} \cdot R_{imej} = \sum_{m,e} \underbrace{\sum_k \alpha_{km} \cdot \alpha_{ke}}_{(A^T A)_{me}} R_{imej}$

$= \sum_{m,e} g^{me} R_{imej}$ συστολή του τανυστή καμπυλότητας

$S(p) = \sum_k Ric(z_k) = \sum_{i,j} \underbrace{\sum_k \alpha_{ki} \alpha_{kj}}_{g^{ij}} Ric(\partial_i, \partial_j)$

$= \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j,m,e} g^{ij} g^{me} R_{imej}$

διπλή συστολή του τανυστή καμπυλότητας.

(Do Carmo - διαφορετικοί συντελεστές μπροστά από καμπυλότητα, ανάλογα με τη διάσταση).

Λήμμα: Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to M$ μια παραμετρισμένη επιφάνεια στην πολλ. Riemann (M,g), με συντεταγμένες $(s,t) \in A \subset \mathbb{R}^2$.
Έστω $V(s,t)$ ένα διαν. πεδίο στην f.

Τότε $\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V = R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)V$

σαν ταχύτητα στην κατεύθυνση s

Απόδειξη: Υπολογισμός:
Σε συντεταγμένες (U, x) γειτονιάς του p.

$$V(s,t) = \sum_i v_i(s,t)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\frac{DV}{\partial s} = \frac{D}{\partial s}\left(\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_i\left[v_i \frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial v_i}{\partial s}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\right]$$

$$\frac{D}{\partial t}\left(\frac{DV}{\partial s}\right) = \sum_i\left[v_i \frac{D}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) + \frac{\partial v_i}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial v_i}{\partial s}\cdot\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial^2 v_i}{\partial t\partial s}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\right]$$

Με παρόμοιο τρόπο η $\frac{D}{\partial s}\left(\frac{DV}{\partial t}\right)$, άρα

$$\frac{D}{\partial t}\left(\frac{DV}{\partial s}\right) - \frac{D}{\partial s}\left(\frac{DV}{\partial t}\right) = \sum_i v_i\left[\frac{D}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) - \frac{D}{\partial s}\left(\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)\right] \quad (*)$$

Υπολογισμός $(*)$

Σε συντεταγμένες, $f(s,t) = (x_1(s,t), \dots, x_n(s,t))$.

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial s}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{(ταχύτητα στην κατεύθυνση } s\text{)}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \nabla_{\partial f/\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \nabla_{\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s}\cdot \nabla_{\partial_j}\partial_i \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i\right)$$

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{D}{\partial t}\left(\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s}\nabla_{\partial_j}\partial_i\right) =$$

$$= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t\partial s}\nabla_{\partial_j}\partial_i + \sum_{j,k}\frac{\partial x_j}{\partial s}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t}\cdot\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i$$

Παρόμοια για το δεύτερο όρο

$$\therefore \frac{D}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) - \frac{D}{\partial s}\left(\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) =$$

$$= \cancel{\sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t\partial s}\nabla_{\partial_j}\partial_i} + \sum_{j,k}\frac{\partial x_j}{\partial s}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t}\cdot\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i$$

$$- \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial s\partial t}\nabla_{\partial_j}\partial_i - \sum_{j,k}\frac{\partial x_j}{\partial t}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial s}\cdot\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\cdot\partial_i$$

$j \leftrightarrow k$

$$= \sum_{j,k}\frac{\partial x_j}{\partial s}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t}\left(\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_k}\partial_i\right)$$

$$= \sum_{j,k}\frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial t}\left(R_{\partial_k\partial_j}\partial_i\right) = R_{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}}\partial_i$$

$$\therefore (*) = \sum_i v_i\, R_{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}}\partial_i = R_{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}} V.$$

$\square$

Πόρισμα Αν $\forall p, q \in M$ η παράλληλη μεταφορά από το p στο q δεν εξαρτάται από την καμπύλη, τότε $R = 0$.

Απόδειξη: Για $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ με $(s,t) \in U = \{-\varepsilon < t < 1+\varepsilon, \ -\varepsilon < s < 1+\varepsilon\}$

ορίζουμε $f(s,t) : U \to M$ τ.ω.

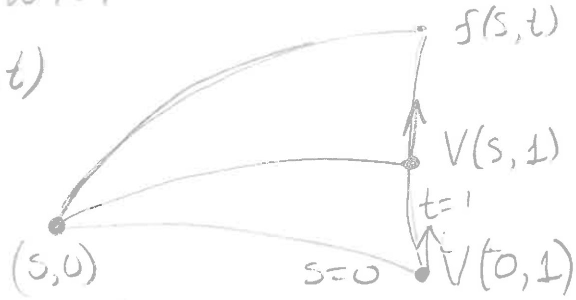
$p = f(s,0) = f(0,0)$ $\forall s$.

Έστω $V_0 \in T_{f(0,0)} M$

Ορίζουμε το διαν. πεδίο $V(s,t)$ τ.ω.

$V(s,0) = V_0$ $\forall s$ και

$V(s,t)$: η παράλληλη μεταφορά του V_0 στην καμπύλη $t \mapsto f(s,t)$



$\therefore \dfrac{D}{\partial t} V = 0$

και από Λήμμα $\dfrac{D}{\partial s}\left(\dfrac{DV}{\partial t}\right) = 0 = \dfrac{D}{\partial t}\left(\dfrac{DV}{\partial s}\right) + R_{\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}} V$

Η παράλληλη μεταφορά του V_0 από το $p = f(0,0) = f(s,0)$ στο $f(s,1)$ είναι το $V(s,1)$ και είναι η ίδια με την παράλληλη μεταφορά του V_0 από το $f(0,0) = p$ στο $f(0,1)$ στην καμπύλη $t \mapsto f(0,t)$ (με παίρνει στο $V(0,1)$) ακολουθούμενη από την παράλληλη μεταφ. του $V(0,1)$ στην καμπύλη $s \mapsto f(s,1)$ - αφού // δεν εξαρτάται από την καμπύλη

Δηλαδή το $V(s,1)$ είναι παράλληλη μεταφ. του $V(0,1)$

$\therefore \dfrac{D}{\partial s} V(s,1) = 0$ και το ίδιο ισχύει $\forall t$ σταθερό $\therefore \dfrac{D}{\partial s} V(s,t) = 0$

$\therefore \dfrac{D}{\partial t}\left(\dfrac{D}{\partial s} V\right) = 0$

$\therefore \; R_{\frac{\partial f}{\partial s}(0,t)\,\frac{\partial f}{\partial t}(0,t)} V(0,t) = 0$ σε κάθε t.

αφού το ίδιο ισχύει $\forall t$ = σταθερό, όχι μόνο για $t=1$.
- Άρα ισχύει και στο $t=0$.
f και V_0 τυχαίο και μπορούμε $\forall X, Y \in T_pM$ να βρούμε f με $X(p) = \frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{f(0,0)}$ $Y(p) = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{f(0,0)}$

$\therefore \; R_{XY} V\Big|_p = 0 \quad \forall X, Y, V \in T_pM \therefore R = 0$

(p επίσης τυχαίο). $\square$.