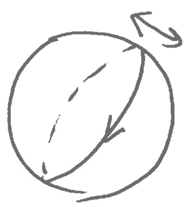
Αλλά $\phi\circ\gamma \neq \gamma$ και γ, $\phi\circ\gamma$ γεωδαισιακές
που περνούν από το B το $t=0$ με την ίδια
ταχύτητα $\rightarrow\leftarrow$ μοναδικότητα γ.

$\therefore \gamma(t) = (x_1(t), 0, \ldots, 0, x_n(t))$

Γεωδαισιακές για συμμετρικούς χώρους $\equiv$ σταθερές καμπύλες των ισομετριών τους.

- Αν όχι έχουμε την ίδια αντίφαση.

· Στο S^2: γεωδαισιακές οι μεγάλοι κύκλοι.



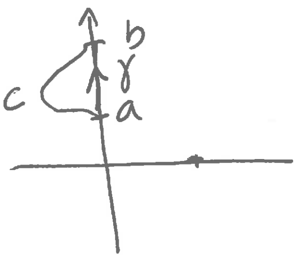
ισομετρία: ανάκλαση ως προς το επίπεδο που ορίζουν.

• $\mathbb{H}^2 \quad ((\mathbb{R}^2)^+, g) \qquad g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$

$\gamma(t) = (0,t)$ ν.δ.ο. είναι γεωδ. για $t \in [a,b]$ $a>0$: $\gamma' = \frac{\partial}{\partial y}$

$$l(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{y(t)}\sqrt{1}\, dt = \int_a^b \frac{1}{t}\, dt = \ln b - \ln a.$$

Έστω $c(t) = (x(t), y(t))$ καμπύλη με $c(a) = \gamma(a) = (0,a)$
και $c(b) = \gamma(b) = (0,b)$. $\quad c: [a,b] \to \mathbb{H}^2$



$$c'(t) = x'(t)\frac{\partial}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\therefore l(c) = \int_a^b |c'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\cdot\frac{1}{y(t)}\, dt \qquad y>0$$

$$\geq \int_a^b |y'(t)|\cdot\frac{1}{y(t)}\, dt \geq \int_a^b y'(t)\cdot\frac{1}{y(t)}\, dt = \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{1}{y}\, dy = l(\gamma).$$

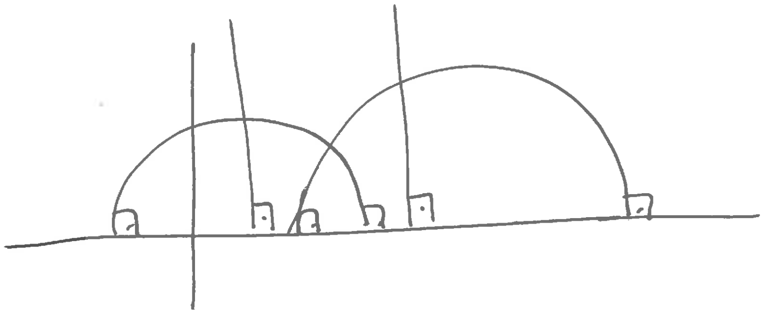
$\therefore$ Η $\gamma(t)$ είναι γεωδαισιακή.
αφού ελαχιστοποιεί την απόσταση ανάμεσα
στα $(0,a)$ $(0,b)$.

- Παρόμοια για (x_0,a), (x_0,b) $\gamma(t)=(x_0,t)$ $t\in[a,b]$
είναι γεωδαισιακή.

$\mathbb{H}^2$: είναι συμμετρικός χώρος.
Στην εργασία 3 δείξαμε ότι αν $z=x+iy$
$\phi(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ με $ad-bc=1$ είναι ισομετρία
του $\mathbb{H}^2$.

Οι μετασχηματισμοί Möebius ϕ διατηρούν
τα ημικύκλια που είναι κάθετα στον άξονα x
και τις ευθείες που είναι κάθετες στον άξονα x
(θέλει απόδειξη) - είναι τα μόνα σύνολα που
διατηρούν.

- Αυτές οι καμπύλες είναι οι γεωδαισιακές στο $\mathbb{H}^2$

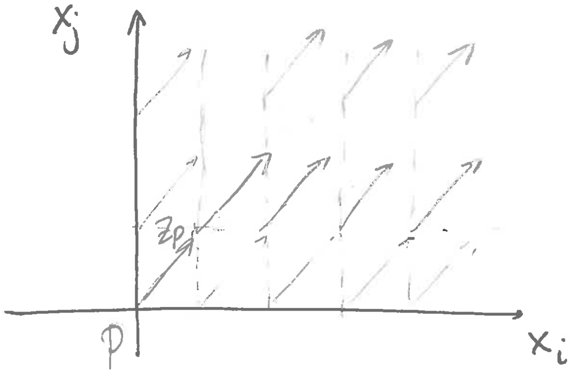


Καμπυλότητα:

Σε κανον. συντ. $g = \delta_{ij} + O(|x|^2)$ αφού $g_{ij,k} = 0$.

Παρατήρηση: Στο $\mathbb{R}^n$ έστω $Z_p \in T_pM$. και $p \equiv 0$

Επεκτείνουμε το Z_p σε παράλληλο διαν. πεδίο Z πρώτα στην κατεύθυνση x_i με $x_j = 0$ για $i \neq j$ τ.ω. $\nabla_{\partial/\partial x_i} Z = 0$.



Μετά σε κάθε $x_i =$ σταθ επεκτείνουμε σε διαν. πεδίο Z στην κατεύθυνση x_j με $j \neq i$. τ.ω. $\nabla_{\partial/\partial x_j} Z = 0$

$\nabla_{\partial/\partial x_i} Z = ;$ έξω από την αρχική κατεύθυνση x_i;

Αν $\nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i} Z = 0$, δηλαδή $\nabla_{\partial/\partial x_i} Z$ είναι παράλληλο στην κατεύθυνση $\partial/\partial x_j$, τότε $\nabla_{\partial/\partial x_i} Z = 0$ αφού αυτό ισχύει όταν $x_j = 0$ και λόγω γραμμικών εξισώσεων για παράλληλα διαν. πεδία.

Από την άλλη ξέρουμε ότι. $\nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_j} Z = 0$.

- Πόσο διαφέρουν τα $\nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i} Z$ και $\nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_j} Z$;

Για γενικά διαν. πεδία. X, Y, Z στο $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla_X Z = \sum_i X(z_i)\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (\Gamma_{ij}^{k}=0)$$

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \sum_i YX(z_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \sum_i XY(z_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_{[X,Y]} Z}$$

"flatness criterion" κριτήριο έτσι ώστε η M να είναι επίπεδη.

Για $X = \partial/\partial x_i$ $Y = \partial/\partial x_j$ στο $\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι.

$$\nabla_{\partial/\partial x_i}\nabla_{\partial/\partial x_j} Z - \nabla_{\partial/\partial x_j}\nabla_{\partial/\partial x_i} Z = 0$$

- Οι δεύτεροι παράγωγοι διαν. πεδίων ικανοποιούν την αντιμεταθετική ιδιότητα. στο $\mathbb{R}^n$.

- Σε γενική πολλ/τα αυτό δεν ισχύει.
  - παράλληλη μεταφορά στη μια κατεύθυνση, δε συνεπάγεται παραλληλότητα και στις υπόλοιπες.

<u>Ορισμός:</u> Η καμπυλότητα R_{XY} μιας πολλ/τας Riemann M με σύνδεσμο Levi-Civita ∇ είναι μια αντιστοιχεία η οποία για κάθε ζεύγος $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ δίνει μια απεικόνιση $R_{XY} \equiv R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ που ορίζεται ως

$$R_{XY} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \quad \text{για } Z \in \mathfrak{X}(M).$$

(κάποιοι αλλάζουν πρόσημο ή σειρά)

R_{XY} ονομάζεται: τελεστής καμπυλότητας.

- Στο $\mathbb{R}^n$ $\quad R_{XY} Z = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$

- Για πλαίσιο συντεταγμένων $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_i$

$$R_{\partial/\partial x_i \, \partial/\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} = \nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_j} \partial/\partial x_k - \nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i} \partial/\partial x_k$$

δείχνει την έλλειψη αντιμεταθετικότητας στις συναλλοίωτες παραγώγους δεύτερης τάξης. επί διαν. πεδίων.

<u>Πρόταση:</u> Η καμπυλότητα R έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Είναι διγραμμική στο $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ τ.ω. $\forall f, g \in \mathcal{D}(M)$ $X_i, Y_i \in \mathfrak{X}(M)$.

$$R_{(fX_1 + gX_2) Y_1} = f R_{X_1 Y_1} + g R_{X_2 Y_1}$$

$$R_{X_1 (fY_1 + gY_2)} = f R_{X_1 Y_1} + g R_{X_1 Y_2}$$

(ii) $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ η R_{XY} είναι γραμμική από το $\mathfrak{X}(M)$ στο $\mathfrak{X}(M)$ έτσι ώστε $\forall Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$

$$R_{XY}(fZ_1 + gZ_2) = f R_{XY} Z_1 + g R_{XY} Z_2$$

Απόδειξη:

(i) $R_{(fX_1+gX_2)Y_1}Z = \nabla_{(fX_1+gX_2)}\nabla_{Y_1}Z - \nabla_{Y_1}\nabla_{(fX_1+gX_2)}Z$

$- \nabla_{[fX_1+gX_2,\,Y_1]}Z =$

$= f\nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z + g\nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z - \nabla_{Y_1}(f\nabla_{X_1} + g\nabla_{X_2})Z$

$- \nabla_{(fX_1Y_1 + gX_2Y_1 - fY_1X_1 - gY_1X_2 - Y_1(f)X_1 - Y_1(g)X_2)}Z =$

$= f\nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z + g\nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z - \cancel{Y_1(f)\nabla_{X_1}Z} - f\nabla_{Y_1}\nabla_{X_1}Z - \cancel{Y_1(g)\nabla_{X_2}Z}$

$- g\nabla_{Y_1}\nabla_{X_2}Z - f\nabla_{[X_1,Y_1]}Z - g\nabla_{[X_2,Y_1]}Z$

$+ \cancel{Y_1(f)\nabla_{X_1}Z} + \cancel{Y_1(g)\nabla_{X_2}Z}$

$= fR_{X_1Y_1}Z + gR_{X_2Y_1}Z$

Παρόμοια για τη $2^{η}$ θέση.

(ii) $R_{XY}(fZ_1+gZ_2) = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})(fZ_1 + gZ_2) =$

$= \nabla_X(Y(f)Z_1 + f\nabla_YZ_1 + Y(g)Z_2 + g\nabla_YZ_2)$

$- \nabla_Y(X(f)Z_1 + f\nabla_XZ_1 + X(g)Z_2 + g\nabla_XZ_2) - [X,Y](f)Z_1 - f\nabla_{[X,Y]}Z_1$

$- [X,Y](g)Z_2 - g\nabla_{[X,Y]}Z_2 =$

$= XY(f)Z_1 + \cancel{Y(f)\nabla_XZ_1} + \cancel{X(f)\nabla_YZ_1} + f\nabla_X\nabla_YZ_1 + \cancel{XY(g)Z_2} + \cancel{Y(g)\nabla_XZ_2}$

$+ \cancel{X(g)\nabla_YZ_2} + g\nabla_X\nabla_YZ_2 - YX(f)Z_1 - \cancel{X(f)\nabla_YZ_1} - \cancel{Y(f)\nabla_XZ_1} - f\nabla_Y\nabla_XZ_1$

$- \cancel{YX(g)Z_2} - \cancel{X(g)\nabla_YZ_2} - \cancel{Y(g)\nabla_XZ_2} - g\nabla_Y\nabla_XZ_2$

$- XY(f)Z_1 + YX(f)_1 + f\nabla_{[X,Y]}Z_1 - \cancel{XY(g)Z_2} + \cancel{YX(g)Z_2} - g\nabla_{[X,Y]}Z_2$

$= fR_{XY}Z_1 + gR_{XY}Z_2$

Πρόταση: (Ταυτότητα Bianchi)

$$R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0$$

Απόδειξη:

$$\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$
$$+\nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X$$
$$+\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y =$$
$$= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X)$$
$$- \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y =$$

∇ συμμετρικό

$$= \nabla_X([Y,Z]) + \nabla_Y([Z,X]) + \nabla_Z([X,Y])$$
$$- \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y =$$

∇ συμμ.

$$= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$ από ταυτότητα Jacobi.

$\square$

<u>Ορισμός</u>: $R(X,Y,Z,W) := \langle R_{XY}Z, W\rangle$ για $X,Y,Z,W \in \mathcal{X}(M)$
είναι ο <u>τανυστής καμπυλότητας Riemann</u>.

<u>Τανυστής</u>: γιατί γραμμικός ως προς $\mathcal{D}$ σε όλες τις θέσεις

$$R(fX+U, Y, Z, W) = fR(X,Y,Z,W) + R(U,Y,Z,W)$$

κ' παρόμοια για όλες τις θέσεις

$$R: \mathcal{X}(M)^4 \to \mathbb{R}$$

- Συνεπάγεται ότι $R(X,Y,Z,W)|_p$ εξαρτάται <u>μόνο</u> από τις τιμές των X,Y,Z,W στο p.

<u>Πρόταση</u>: (Ιδιότητες του τανυστή καμπυλότητας)

(i) $R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0$ (Ταυτ. Bianchi)

(ii) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$

(iii) $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$

(iv) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$

<u>Απόδειξη</u>: (i) Bianchi

(ii) Εξ ορισμού.

- Από γραμμικότητα παρατηρούμε ότι η (ii) είναι ισοδύναμη με $R(X,X,Z,W)=0$

- Αφού $R(X+Y, X+Y, Z, W) = R(X,X,Z,W) + R(Y,Y,Z,W) +$
$+ R(X,Y,Z,W) + R(Y,X,Z,W)$

άρα $R(U,U,Z,W) = 0 \Rightarrow$ (ii)

και (ii) $\Rightarrow R(X,X,Z,W) = -R(X,X,Z,W) \Rightarrow R(X,X,Z,W) = 0.$

(iii) Παρόμοια (iii) είναι ισοδύναμη με $R(X,Y,Z,Z)=0$.

$$R(X,Y,Z,Z) = \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle$$

συμβατό

$$\stackrel{\downarrow}{=} X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - \cancel{\langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle} - Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle + \cancel{\langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle}$$
$$- \tfrac{1}{2}[X,Y](\langle Z,Z\rangle)$$
$$= \tfrac{1}{2} XY(\langle Z,Z\rangle) - \tfrac{1}{2} YX(\langle Z,Z\rangle) - \tfrac{1}{2}(XY-YX)(\langle Z,Z\rangle) = 0.$$

(iv) Από (i):

$$R(X,Y,Z,W) + \cancel{R(Y,Z,X,W)} + R(Z,X,Y,W) = 0$$
$$\cancel{R(Y,Z,W,X)} + \cancel{R(Z,W,Y,X)} + R(W,Y,Z,X) = 0$$
$$\cancel{R(Z,W,X,Y)} + R(W,X,Z,Y) + R(X,Z,W,Y) = 0$$
$$R(W,X,Y,Z) + R(X,Y,W,Z) + R(Y,W,X,Z) = 0$$

+

$$2R(Z,X,Y,W) + 2R(Y,W,X,Z) = 0$$
$$\Rightarrow -2R(X,Z,Y,W) + 2R(Y,W,X,Z) = 0$$
$$\Rightarrow R(X,Z,Y,W) = R(Y,W,X,Z)$$

$\square$