<u>Πόρισμα:</u> Σε μια γειτονιά συντεταγμένων μιας πολλαπλότητας Riemann όπου η μετρική γράφεται ως
$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i dx^j$ τα σύμβολα Christoffel του συνδέσμου Levi-Civita δίνονται από:

$$\Gamma_{ij}^{\ k} = \frac{1}{2} \sum_{\ell} g^{k\ell} \left(g_{i\ell,j} + g_{j\ell,i} - g_{ij,\ell} \right)$$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $i : (M^n, g_M) \to (\tilde{M}^{n+m}, g_{\tilde{M}})$ μια ισομετρική εμβύθιση της M στην $\tilde{M}$ με $g_M = i^*(g_{\tilde{M}})$.
Για διαν. πεδία X, Y στην M που επεκτείνονται σε διαν. πεδία $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ ορίζουμε
$\nabla_X Y :=$ προβολή του $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ στον εφαπτόμενο χώρο της M,
όπου $\tilde{\nabla}$ ο σύνδεσμος Levi-Civita της $\tilde{M}$.
Τότε ∇ είναι ο σύνδεσμος Levi-Civita της M.

<u>Πόρισμα:</u> Έστω $i : M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ με $g_M = i^* g_{\mathbb{R}^3}$
$\mathbb{R}^3$: ευκλείδιος χώρος.
Ένα διανυσματικό πεδίο $V(t) \in T_{\gamma(t)} M$ σε καμπύλη γ στην M ~~είναι~~ είναι παράλληλο ανν.
$\frac{dV}{dt} \perp T_{\gamma(t)} M \subset \mathbb{R}^3$, όπου $\frac{dV}{dt}$ η συνήθης παράγωγος της $V(t) : I \to \mathbb{R}^3$.

Παρ. Υπολογισμός Γ_{ij}^{k} για S^2 σε σφαιρικές συντεταγμένες (ϕ, θ) όπου $g = d\phi^2 + \sin^2\phi \cdot d\theta^2$

Θέτουμε $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial \phi}$ $\quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}$ $\quad g_{11} = 1$ $\quad g_{12} = g_{21} = 0$ $\quad g_{22} = \sin^2\phi$

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^{-2}\phi \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2} g^{11}\left[g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right] + \frac{1}{2} g^{12}\left[g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2}\right] = 0$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2} g^{21}\left[g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right] + \frac{1}{2} g^{22}\left[g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2}\right] = 0$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{21}^{1} = \frac{1}{2} \cdot g^{11}\left[g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}\right] + \frac{1}{2} g^{12}\left[g_{12,2} + g_{22,1} - g_{12,2}\right] = 0$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{1}{2} g^{21}\left[g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}\right] + \frac{1}{2} g^{22}\left[g_{12,2} + g_{22,1} - g_{12,2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sin^{-2}\phi \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}(\sin^2\phi) = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{1}{2} g^{11}\left[g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,1}\right] + \frac{1}{2} g^{12}\left[g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right] =$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}(\sin^2\phi) = -\sin\phi\cos\phi$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2} g^{21}\left[g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,1}\right] + \frac{1}{2} \cdot g^{22}\left[g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right] = 0$$

Για πιο απλό συμβολισμό $\partial\phi = \partial/\partial\phi$ $\quad \partial\theta = \partial/\partial\theta$.

$$\nabla_{\partial\phi}\partial\phi = \Gamma_{11}^{1}\partial\phi + \Gamma_{11}^{2}\partial\theta = 0$$

$$\nabla_{\partial\theta}\partial\phi = \nabla_{\partial\phi}\partial\theta = \Gamma_{12}^{1}\partial\phi + \Gamma_{12}^{2}\partial\theta = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\partial\theta$$

$$\nabla_{\partial\theta}\partial\theta = \Gamma_{22}^{1}\partial\phi + \Gamma_{22}^{2}\partial\theta = -\sin\phi\cdot\cos\phi\,\partial\phi.$$

Εναλλακτικά:

$$\langle\nabla_{\partial\phi}\partial\phi, \partial\theta\rangle = \partial\phi\langle\partial\phi,\partial\theta\rangle - \langle\partial\phi, \nabla_{\partial\phi}\partial\theta\rangle = -\langle\partial\phi, \nabla_{\partial\theta}\partial\phi\rangle =$$

$$= -\frac{1}{2}\partial\theta\langle\partial\phi,\partial\phi\rangle = 0$$

$$\langle\nabla_{\partial\phi}\partial\phi, \partial\phi\rangle = \frac{1}{2}\partial\phi\langle\partial\phi,\partial\phi\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_{\partial\phi}\partial\phi = 0.$$

$$\langle\nabla_{\partial\theta}\partial\phi, \partial\phi\rangle = \frac{1}{2}\partial\theta\langle\partial\phi,\partial\phi\rangle = 0$$

$$\langle\nabla_{\partial\theta}\partial\phi, \partial\theta\rangle = \langle\nabla_{\partial\phi}\partial\theta, \partial\theta\rangle = \frac{1}{2}\partial\phi\langle\partial\theta,\partial\theta\rangle = \sin\phi\cdot\cos\phi.$$

$$\therefore\ \nabla_{\partial\theta}\partial\phi = \langle\nabla_{\partial\theta}\partial\phi,\partial\theta\rangle\cdot\frac{\partial\theta}{|\partial\theta|^2} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\partial\theta$$

$$\langle\nabla_{\partial\theta}\partial\theta, \partial\phi\rangle = -\langle\partial\theta, \nabla_{\partial\theta}\partial\phi\rangle = -\sin\phi\cos\phi.$$

$$\langle\nabla_{\partial\theta}\partial\theta, \partial\theta\rangle = \frac{1}{2}\partial\theta\langle\partial\theta,\partial\theta\rangle = 0$$

$$\therefore\ \nabla_{\partial\theta}\partial\theta = \langle\nabla_{\partial\theta}\partial\theta,\partial\phi\rangle\cdot\frac{1}{|\partial\phi|^2}\partial\phi = -\sin\phi\cos\phi\,\partial\phi.$$

Άσκηση: $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

Έστω $\gamma(t)$ μεγάλος κύκλος με μέτρο ταχύτητας 1.

Δείξτε ότι $\gamma'(t)$ είναι παράλληλο διαν. πεδίο στη γ.

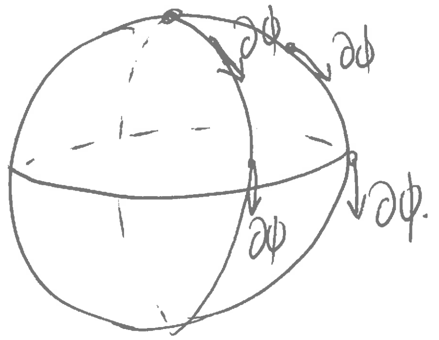
Δείξτε ότι δεν ισχύει για παράλληλους κύκλους

• Κατάλληλος χάρτης τ.ω. $\gamma(t)$ μεσημβρινός

Σε σφαιρική $\gamma(t) = (t+\phi_0, \theta_0)$ $t \in I$

Τότε $\gamma'(t) = \frac{\partial}{\partial \phi}$ και $\frac{D(\gamma'(t))}{dt} = \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = \nabla_{\partial\phi} \partial\phi = 0.$

• Παράλληλη μεταφορά του $\partial\phi$ σε μεγάλο κύκλο είναι το $\partial\phi$.



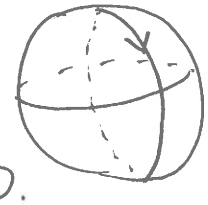
Εξισώσεις για εύρεση παράλληλου διαν. πεδίου στην $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$\frac{DV}{dt}=0 \iff V_k'(t)+\sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\,\gamma_i'(t)\,V_j(t)=0 \quad \forall k=1,2$$

$$\text{με} \quad V(0)=V_{0,1}\frac{\partial}{\partial\phi}+V_{0,2}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Στη γενική περίπτωση $\gamma(t)$ - δύσκολη η επίλυση.

Παραδείγματα: $\gamma(t)=(t+\phi_0,\theta_0)$



$$\gamma'(t)=(1,0)=\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad \gamma_1'=1, \quad \gamma_2'=0.$$

$$\therefore\ V_1'+\sum_{j=1}^{2}\Gamma_{1j}^{1}V_j=0 \Rightarrow V_1'=0 \Rightarrow V_1(t)=V_{0,1}$$

$$\Gamma_{11}^{1}=\Gamma_{12}^{1}=0$$

$$V_2'+\sum_{j=1}^{2}\Gamma_{1j}^{2}V_j=0 \Rightarrow V_2'+\left.\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\right|_{\gamma(t)}V_2=0$$

$$\Gamma_{11}^{2}=0 \qquad \Gamma_{12}^{2}=\frac{\cos\phi}{\sin\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{V_2'}{V_2}=-\frac{\cos(t+\phi_0)}{\sin(t+\phi_0)} \Rightarrow \ln|V_2|\Big|_{V_{0,2}}^{V_2}=-\ln|\sin(t+\phi_0)|\Big|_{t=0}^{t}$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_{0,2}}=\frac{\sin\phi_0}{\sin(t+\phi_0)} \Rightarrow V_2=V_{0,2}\frac{\sin(\phi_0)}{\sin(t+\phi_0)}.$$

Αν $V_{0,2}=0 \Rightarrow V(t)=V_{0,1}\dfrac{\partial}{\partial\phi}$ → διατηρεί τα διαν. πεδία στην κατεύθυνση $\partial/\partial\phi$

Αν $V_{0,1}=0 \Rightarrow V(t)=V_{0,2}\dfrac{\sin\phi_0}{\sin(t+\phi_0)}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$

με $\|V(t)\|=|V_{0,2}\sin\phi_0|=$ σταθερά.

· Εξισώσεις για παράλληλη μεταφορά στη $\gamma(t)=(\phi_0,t+\theta_0)$ πιο πολύπλοκες:

$$\left.\begin{aligned} &V_1'-\sin\phi_0\cos\phi_0 V_2=0\\ &V_2'+\frac{\cos\phi_0}{\sin\phi_0}V_1=0\end{aligned}\right\}$$ κυκλική κίνηση V_1, V_2.

Γεωδαισιακές:

Ορισμός: Μια παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma: I \to M$ ονομάζεται γεωδαισιακή αν $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)=0 \quad \forall t \in I$.

Ο περιορισμός της γ σε $[a,b] \subset I$ ονομάζεται γεωδαισιακό τόξο που ενώνει τα $\gamma(a)$ και $\gamma(b)$.

Παρατήρηση: $\frac{d}{dt}\left(\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle\right) = 2\left(\left\langle \frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle\right) = 0$

$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = c$ σταθερά $\forall t$. , δηλαδή ισοταχείς.

Για γεωδαισιακή υποθέτουμε $c \neq 0$ έτσι ώστε η γ να μην είναι σημείο.

Το μήκος τόξου της γ ισούται με: $s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt = c(t-t_0)$.

Η γ ονομάζεται κανονικοποιημένη γεωδαισιακή αν $c=1$.

Εξισώσεις γεωδαισιακής σε τοπικές συντεταγμένες:

Η $\gamma(t)$ είναι γεωδαισιακή ανν.

$$\sum_k \left(\gamma_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \gamma_i'(t)\gamma_j'(t)\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \gamma_i'(t)\gamma_j'(t) = 0 \qquad \forall k=1,\dots,n.$$

για $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$.

- Σύστημα εξισώσεων 2ου βαθμού.

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσεων το μετατρέπουμε σε σύστημα πρώτου βαθμού.

Θεωρούμε $\alpha(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t), \gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$
$= (x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_n(t))$.

καμπύλη στην εφ. δέσμη TM.

Η γ είναι γεωδαισιακή ανν

$$\left.\begin{aligned}
x_1'(t) &= y_1(t) \\
x_2'(t) &= y_2(t) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= y_n(t) \\
y_1'(t) &= (x_1''(t) =) - \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{1} y_i(t) y_j(t) \\
&\vdots \\
y_n'(t) &= (x_n''(t) =) - \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{n} y_i(t) y_j(t).
\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Σύστημα εξισώσεων 1ου βαθμού στην εφ. δέσμη TM η οποία είναι πολλ/τα με χάρτες $(U \times \mathbb{R}^n, X \times id_{\mathbb{R}^n})$

Πρόταση.

Από θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων στο TM.

$\forall p \in M$ .. υπάρχει ανοικτή γειτονιά V του p στην M, $\delta > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ και μια C^∞ μοναδική απεικόνιση

$\alpha : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to M$ όπου $\mathcal{U} = \{(q, v) \in TM \mid q \in V, |v| < \varepsilon_1\}$

έτσι ώστε η καμπύλη $t \mapsto \alpha(t, q, v)$

για $t \in (-\delta, \delta)$ να ικανοποιεί το σύστημα $(*)$

με την ιδιότητα $\alpha(0, q, v) = (q, v)$ σε συντεταγμένες.

για κάθε $q \in V$ και $|v| < \varepsilon_1$

$$\alpha(t,q,v) = (\underbrace{x_1(t),\dots,x_n(t)}_{\gamma(t)},\ \underbrace{y_1(t),\dots,y_n(t)}_{\gamma'(t)})$$

Ορίζοντας $\gamma(t) = \pi \circ \alpha(t,q,v)$ όπου $\pi: TM \to M$ προβολή, τότε η $\gamma(t)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις γεωδαισιακής ~~με~~ $\gamma(0)=q$ και $\gamma'(0)=v$.

Δηλαδή για $|v|$ αρκετά μικρό, υπάρχει πάντα μοναδική γεωδαισιακή από το $q \in V$ με ~~ταχύ~~ αρχική ταχύτητα v.

<u>Λήμμα:</u> (Ομοιογένεια γεωδαισιακών). -

$$\alpha(ct,q,v) = \alpha(t,q,cv) \quad \forall c>0. \text{ και για } t \in \left(-\tfrac{\delta}{c}, \tfrac{\delta}{c}\right)$$

- Δηλαδή μπορούμε να ξεκινήσουμε με μεγαλύτερη αρχική ταχύτητα για γ, αλλά για μικρότερο χρονικό διάστημα.

- Από τον τύπο της εξίσωσης - λεπτομέρεια στο Do Carmo. Λήμμα 2.6.

<u>Παραδείγματα:</u>

① Γεωδαισιακές στον $\mathbb{R}^n$: $\gamma_k''=0 \ \forall k \Rightarrow \gamma(t) = p + t v_0$

② S^2: $\gamma_k'' + \Gamma_{11}^k (\gamma_1')^2 + 2\Gamma_{12}^k \gamma_1' \gamma_2' + \Gamma_{22}^k (\gamma_2')^2 = 0$ για $k=1,2$.

Πρακτικά δύσκολη η εύρεση για κάθε αρχική συνθήκη.
Όμως $\gamma(t) = (t+\phi_0, \theta_0)$ με $\gamma'(t) = \partial/\partial\phi$ ικανοποιεί

$$\nabla_{\partial/\partial\phi} \partial/\partial\phi = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\gamma'}\gamma' = 0 \quad \therefore \text{ γεωδαισιακή.}$$

Για $p \in S^2$ και $v \in T_pS^2$ έστω (ϕ,θ) σφαιρική συντεταγμ. με βόρειο πόλο το p και $v = c\,\partial/\partial\phi$

Τότε $\gamma(t) = (ct+\phi_0, \theta_0)$ είναι γεωδαισιακή με
$\gamma(0)=p$ και $\gamma'(0) = c\cdot\frac{\partial}{\partial\phi} = v$

Άρα από μοναδικότητα, η $\gamma(t)$ είναι η μοναδική γεωδαισιακή που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες.
Η $\gamma(t)$ είναι μεγάλος κύκλος, άρα όλες οι γεωδαισιακές στην S^2 είναι μεγάλοι κύκλοι.

—

Για $\tilde\gamma(t) = (\phi_0, t+\theta_0)$, $\tilde\gamma'(t) = \frac{\partial}{\partial\theta}$ και

$$\nabla_{\tilde\gamma'}\tilde\gamma' = \nabla_{\partial/\partial\theta}\partial/\partial\theta = -\sin\phi_0\cos\phi_0\frac{\partial}{\partial\theta} \neq 0$$ εκτός

αν $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ ($\phi_0 = 0, \pi$ δε είναι καμπύλη) και

$\tilde\gamma$ είναι ο ισημερινός - μεγάλος κύκλος

$\therefore$ Στην S^2 γ είναι γεωδαισιακή αν μεγάλος κύκλος

<u>Θεώρημα</u> φυσικότητας του συνδέσμου Levi-Civita:

Έστω $\phi : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ ισομετρικός διαφορομορφισμός τ.ω. $g_{\tilde{M}}(\phi_*(V), \phi_*(W)) = g_M(V, W)$, και $\nabla, \tilde{\nabla}$ οι σύνδεσμοι L-C στις M και $\tilde{M}$ αντίστοιχα. Τότε

(a) $\phi_*(\nabla_V W) = \tilde{\nabla}_{\phi_*(V)} \phi_*(W)$

(b) Αν γ καμπύλη στην M και V διαν. πεδίο στη γ τότε $\phi_*\left(\frac{DV}{dt}\right) = \frac{\tilde{D}(\phi_*(V))}{dt}$

(c) Η ϕ παίρνει γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές.
Δηλαδή αν η γ είναι γεωδ. στην M με $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = v$, τότε η $\phi\circ\gamma$ είναι γεωδ. στην $\tilde{M}$ με $\phi\circ\gamma(0) = \phi(p)$ και $(\phi\circ\gamma)'(0) = \phi_*(v)$.

Απόδειξη:

(a) Ορίζουμε $\phi^*(\tilde{\nabla})$ τ.ω. $(\phi^*\tilde{\nabla})_V W = (\phi_*)^{-1}\left(\tilde{\nabla}_{\phi_*(V)}\phi_*(W)\right)$

- Αρκεί ν.δ.ο. $\phi^*(\tilde{\nabla})$ είναι σύνδεσμος L-C στην M, άρα ισούται με ∇

(b) Έστω $\{E_k\}$ ο.κ. βάση του T_pM.
Τότε $\{\phi_*(E_k)\}$ ο.κ. του $T_{\phi(p)}\tilde{M}$ αφού ϕ ισομετρία.

$$\frac{DV}{dt} = \frac{D}{dt}\left(\sum_k v_k E_k\right) = \sum_k \left(v_k' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma_i' v_j\right) E_k$$

$$\therefore \phi_*\left(\frac{DV}{dt}\right) = \sum_k \left(v_k' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma_i' v_j\right) \phi_*(E_k)$$

με $\phi_*(V) = \sum_k v_k \phi_*(E_k)$.

Από (a), αφού $\phi_*(\nabla_{E_i} E_j) = \tilde{\nabla}_{\phi_*(E_i)}\phi_*(E_j)$ και είναι και οι δύο βάσεις ο.κ., τότε $\Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k$

Άρα
$$\frac{\tilde{D}(\phi_*(V))}{dt} = \frac{\tilde{D}}{dt}\left(\sum_k v_k \phi_*(E_k)\right) = \sum_k \left(v_k' + \sum_{i,j} \tilde{\Gamma}_{ij}^k \gamma_i' v_j\right)\phi_*(E_k)$$
$$= \sum_k \left(v_k' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma_i' v_j\right)\phi_*(E_k) = \phi_*\left(\frac{DV}{dt}\right)$$

(c)
$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & \tilde{M} \\ \uparrow \gamma & & \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

$(\phi\circ\gamma)' = \phi_*(\gamma')$

Αν $\gamma' = \sum_i \gamma_i' E_i \Rightarrow \phi_*(\gamma') = \sum_i \gamma_i' \phi_*(E_i)$

$$\frac{\tilde{D}(\phi_*(\gamma'))}{dt} \overset{(b)}{=} \phi_*\left(\frac{D\gamma'}{dt}\right)$$ άρα αν $\frac{D\gamma'}{dt} = 0 \Rightarrow$ η $\phi\circ\gamma$ είναι γεωδαισιακή.

$\square$

<u>Θεώρημα</u>. Έστω $i: M^n \hookrightarrow \tilde{M}^{n+k}$ εμβύθιση της πολλ/κας M στην πολλ/κα. Riemann $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}})$.

Έστω $g_M = i^*(g_{\tilde{M}})$.

Αν X, Y διαν. πεδία στην M, τότε γνωρίζουμε ότι αυτά επεκτείνονται σε διαν. πεδία $\tilde{X}, \tilde{Y}$ στην $\tilde{M}$ σε ανοικτό υποσύνολο της.

Έστω $(\nabla_X Y)_p$ η προβολή του $(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p$ στο T_pM.

όπου $\tilde{\nabla}$ ο σύνδεσμος L-C της $\tilde{M}$.

Άρα ∇ είναι ο σύνδεσμος L-C της M.

(Άσκηση).

<u>Πόρισμα</u>: $\frac{DV}{dt} = 0$ στην M ανν $\frac{\tilde{D}V}{dt}$ κάθετο στον υποχώρο T_pM του $T_p\tilde{M}$.

Εκθετική Απεικόνιση:

Έστω $p \in M$, $\mathcal{U} \subset TM$ με $\mathcal{U} = \{(p,v) \in TM \mid p \in V,\ v \in T_pM,\ |v| < \varepsilon_1\}$.

$\mathcal{U}$: το σύνολο στο οποίο η γεωδαισιακή με αρχική συνθήκη $\gamma(0) = p \in V$ και $\gamma'(0) = v$ ορίζονται.

$\alpha(t,p,v)$: η λύση της διαφ. εξίσωσης για γεωδαισιακές.

Ομοιομορφία γεωδ: $\alpha(ct,p,v) = \alpha(t,p,cv)$.

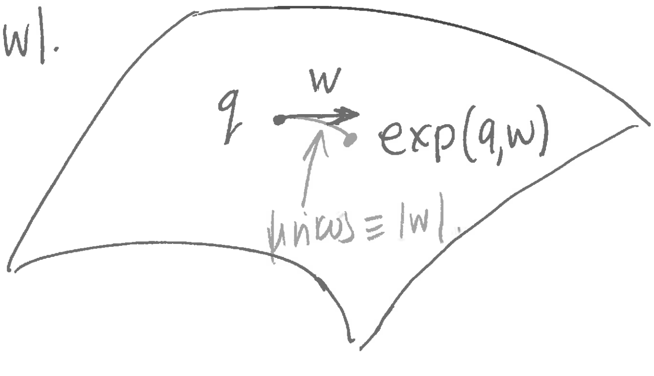
<u>Ορισμός:</u> Η απεικόνιση $\exp : \mathcal{U} \to M$. με

$$\exp(q,w) = \alpha(1,q,w) \quad \left(= \alpha\left(|w|, q, \frac{w}{|w|}\right)\right)$$

για κάθε $(q,w) \in \mathcal{U}$ ονομάζεται <u>εκθετική απεικόνιση</u> στο $\mathcal{U}$

- Οι διαφ. εξισώσεις έδιναν ότι $\alpha(t,q,w)$ είναι C^∞ ως προς q,w, άρα και η exp είναι διαφ.

- $\exp(q,w)$: Προχωράμε για χρόνο $|w| < \varepsilon_1$ στην γεωδαισιακή γ που ξεκινά στο q με αρχική ταχύτητα $\frac{w}{|w|}$. Αφού $|\gamma'(0)| = \left|\frac{w}{|w|}\right| = 1$, τότε χρόνος = μήκος, άρα το μήκος τόξου της γεωδαισιακής $\alpha\left(t,q,\frac{w}{|w|}\right)$ για $t \in [0,|w|]$ είναι $|w|$.



• Για κάθε $q \in V$ ορίζουμε $\exp_q : B_{\varepsilon_1}(0) \subset T_qM \to M$

$$w \longmapsto \exp(q,w).$$

Η $\exp_q$ είναι επίσης C^∞ και $\exp_q(0) = \alpha(1,q,0) = q$.

<u>Πρόταση 1</u> Για κάθε $q \in M$ $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω.

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$$ είναι

διαφορομορφισμός του $B_\varepsilon(0)$ επί ανοικτού συνόλου της M.

Η εικόνα $U_q = \exp_q(B_\varepsilon(0))$ ονομάζεται

<u>κανονική γειτονιά του q.</u>

<u>Απόδειξη</u>: Αρκεί ν.δ.ο. $(d\exp_q)_0$ είναι αντιστρέψιμη και να χρησιμοποιήσουμε θεώρημα αντιστρόφου.

$$(d\exp_q)_0 : T_0(T_qM) \to T_qM$$

όπου $T_0(T_qM)$ ταυτίζεται με T_qM. αφού είναι και οι δύο ισομορφικοί με $\mathbb{R}^n$.

Θα δείξουμε ότι $(d\exp_q)_0$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση

Για υπολογισμό $(d\exp_q)_0(v)$ χρειαζόμαστε μια καμπύλη στο $T_0(T_qM)$ $(\mathbb{R}^n)$ με $\beta(0)=0$ και $\beta'(0)=v$.

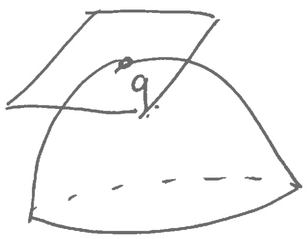
Μπορούμε να πάρουμε $\beta(t) = tv$

Τότε
$$\underset{\substack{\| \\ \phi_*(v)}}{(d\exp_q)_0(v)} = \underset{\substack{\| \\ (\phi\circ\beta)'(0)}}{\frac{d}{dt}(\exp_q(tv))\Big|_{t=0}} = \frac{d}{dt}(\alpha(1,q,tv))\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}(\alpha(t,q,v))\Big|_{t=0} = v$$ α: γεωδ. από q στο $t=0$ με ταχύτητα v στο $t=0$.

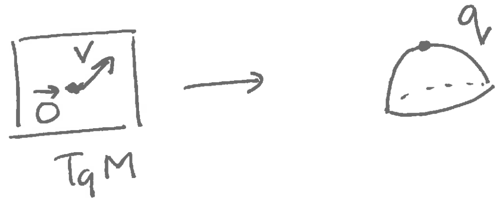
$\therefore \ (d\exp_q)_0 = Id_{T_qM}$

$\therefore \ \exp_q$ είναι διαφορομορφισμός από γειτονιά $B_\varepsilon(0)$ για ε μικρό σε ανοικτή γειτονιά του q.



$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$

$(d\exp_q)_0 : T_0(T_qM) \to T_qM.$



<u>Παραδείγματα:</u> ① $M = \mathbb{R}^n$ γεωδαισιακές είναι ευθείες γραμμές.

$\exp_q : B_\varepsilon(0) \to M$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση.

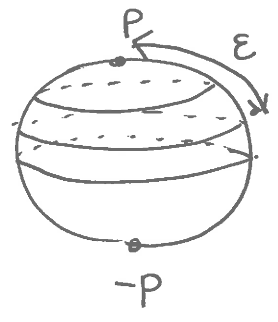
$\alpha(t,q,v) = q + tv.$

$\exp_q(v) = q + v \cong \mathbb{R}^n.$

② $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ οι μεγάλοι κύκλοι με ταχύτητα 1 είναι γεωδαισιακές.

Για $p \in S^n$ $v \in T_pS^n$ η γεωδαισιακή με $\gamma(0) = p$ $\gamma'(0) = v$ είναι ο μεγάλος κύκλος που βρίσκεται στην τομή της S^n με το επίπεδο που περνά από $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ και το $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ και είναι παράλληλο με το v.

$S^2.$



$\exp_p(\overline{B}_\varepsilon(0))$ = τμήμα πολικού τομέα μέχρι παράλληλο με μήκος τόξου $\varepsilon = \phi_0$.

$\exp_p(\overline{B}_\pi(0)) = S^2$

$\exp_p(\partial B_\pi(0)) = -p.$

Κανονικές Συντεταγμένες:

Η ιδιότητα $(d\exp_p)_0 = Id_{T_pM}$ δίνει σημαντικές πληροφορίες για μια πολλαπλότητα Riemann στο p.

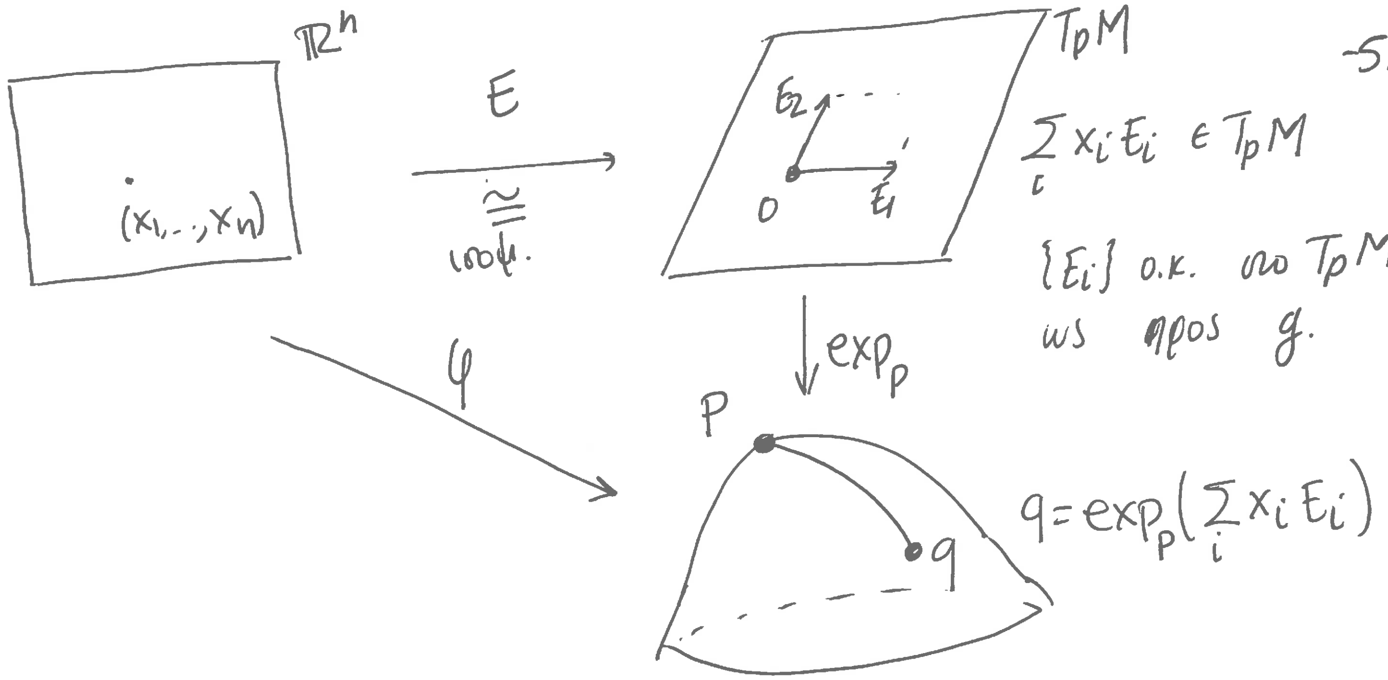
Έστω $B_\varepsilon(0) = \{\vec{v} \in T_pM \mid |\vec{v}|_g < \varepsilon\}$

Τότε $(\exp_p)(B_\varepsilon(0)) = \mathcal{U}$ ονομάζεται γεωδαισιακή μπάλα ακτίνας ε του p στην M.

Χρησιμοποιούμε την $\exp_p$ για να πάρουμε κάποιες εξειδικευμένες συντεταγμένες σε μια γειτονιά του p:

Λήμμα 2 Έστω $\{E_i\}_i$ ο.κ. βάση για T_pM στη μετρική g. Τότε έχουμε ένα ισομορφισμό
$E: \mathbb{R}^n \to T_pM$ τ.ω. $E(x_1,\dots,x_n) = \sum_i x_i E_i$

Ορισμός: Σε μια γειτονιά $U \subset M$ όπου $\exp_p$ είναι διαφορομορφισμός ορίζουμε $\varphi^{-1} = E^{-1}\exp_p^{-1} : U \to \mathbb{R}^n$.
Τότε η φ δίνει ένα χάρτη συντεταγμένων στο p
με $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \exp_p(E(x_1,\dots,x_n))$
Αυτές οι συντεταγμένες ονομάζονται κανονικές συντεταγμένες με κέντρο το p.



$q=\exp_p\left(\sum_i x_i E_i\right) = \alpha(1,p,v)$ με $\gamma(t) = \dot{\alpha}(t,p,v)$

γεωδαισιακή τ.ω. $\gamma(0)=p$ και $\gamma'(0)=v=\sum_{i=1}^{n} x_i E_i$

Τότε $\varphi^{-1}(q) = (x_1,..,x_n)$.

$\frac{\partial}{\partial x_i}$: διαν. πεδίο τ.ω. να αλλάζεις μόνο στην κατεύθυνση E_i.

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{q=\varphi(x_1,..,x_n)} = \frac{d}{dt}\left(\exp_p\left(\left(\sum_{j=1}^{n} x_j E_j\right)+tE_i\right)\right|_{t=0}$$

$$= (d\exp_p)_{\exp_p^{-1}(q)}(E_i) \qquad \text{αφού } \exp_p^{-1}(q)=\sum_j x_j E_j .$$

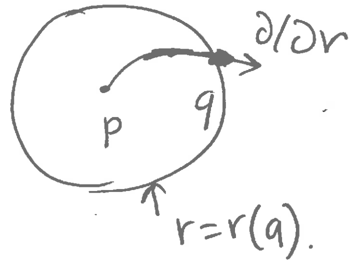
Στο p: $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{p=\varphi(\vec{0})} = \frac{d}{dt}\left(\exp_p(\vec{0}+E_i)\right) = (d\exp_p)_0(E_i) = E_i$

Έστω $r(q) = \left(\sum_i (x_i)^2\right)^{1/2}$ όπου $\varphi^{-1}(q) = (x_1, \dots, x_n)$.

η ακτινική απόσταση του q από το p.

Θέτουμε $\frac{\partial}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$

Θα δούμε ότι $\frac{\partial}{\partial r}$ είναι ένα μοναδιαίο διαν. πεδίο στην M, το ακτινικό δ.π.



Πρόταση 3 (Ιδιότητες κανονικών συντεταγμένων).

Έστω $(U,\varphi) = (\exp_p(B_\varepsilon(0)), \varphi)$ χάρτης κανονικών συντεταγμένων με κέντρο το p τ.ω. $\varphi^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_n)$ και $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_i$ πλαίσιο συντετ.

(α) Για κάθε $V = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_pM$, η γεωδαισιακή γ με $\gamma(0)=p$ και $\gamma'(0)=V$ γράφεται σε κανονικές συντεταγμένες ως: $\varphi^{-1}(\gamma(t)) = (tv_1, \dots, tv_n)$ όσο το $\gamma(t)$ παραμένει στο U.

(β) Οι συντεταγμένες του p είναι $\varphi^{-1}(p) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

(γ) Η μετρική g στο p ικανοποιεί $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_p = (g_{ij})_p = \delta_{ij}$ (μόνο στο p).

(δ) Η μπάλα $\{x \mid r(x) < \varepsilon\}$ στη U είναι γεωδαισιακή μπάλα στην M

(ε) $\forall q \in U \setminus \{p\}$ $\frac{\partial}{\partial r}$ είναι το διάνυσμα ταχύτητας της γεωδαισιακής από το p στο q, έτσι έχει νόρμα 1.

(στ) Οι πρώτες μερικές παράγωγοι των g_{ij} ως προς τις συντεταγμένες $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ είναι μηδενικές στο p. ($g_{ij,k}|_p = 0$), άρα $\Gamma_{ij}^{k}|_p = 0$ $\forall i,j,k$ - από τύπο για σύμβολο Christoffel ως προς g.

Απόδειξη: (α) Έστω $\gamma(t)$ γεωδαισιακή με $\gamma(0)=p$ $\gamma'(0)=v$ τότε εξ ορισμού $\gamma(t) = \alpha(t,p,v) = \alpha(1,p,tv) = \exp_p(tv)$

για $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_i v_i E_i|_p$

Άρα $\varphi^{-1}(\gamma(t)) = E^{-1} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{διαφορομορφ.}}}{\exp_p^{-1}} (\exp_p(tv)) = E^{-1}(tv) = (tv_1, \ldots, tv_n)$

(β) $p = \gamma(0) = \alpha(0,p,0) = \exp_p(0)$. $\Rightarrow \varphi^{-1}(p) = \vec{0}$.

(γ) $(g_{ij})_p = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle_p = \langle (d\exp_p)_0(E_i), (d\exp_p)_0(E_j) \rangle_p$

$= \langle E_i, E_j \rangle_p = \delta_{ij}$ αφού $\{E_i\}_i$ o.κ. στο T_pM.

αφού $(d\exp)_0 = Id|_{T_pM}$

(δ) $v \in B_\varepsilon(0) \subset T_pM \Leftrightarrow \left|\sum_i v_i E_i\right|_g < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\sum_i (v_i)^2\right)^{1/2} < \varepsilon$

αφού $\{E_i\}_i$ o.κ. στο T_pM.

$$\left.\begin{aligned} r(x) &= \left(\sum_i (x_i)^2\right)^{1/2} = |\varphi^{-1}(x)|_{\mathbb{R}^n} \\ |\exp_p^{-1}(x)|_g &= \left|\sum_i x_i E_i\right|_g = \left(\sum_i (x_i)^2\right)^{1/2} \end{aligned}\right\}$$