• Το σύνολο ασυνέχειας της $f\cdot 1_A$ περιέχεται στο ∂A.

$Vol_n(\partial A)=0$ αφού ∂A είναι ένωση γραφημάτων.

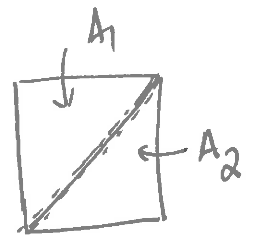
(π.χ. ∂A: σφαιρικό/κυλινδρικό "…" κέλυφος στο $\mathbb{R}^3$
και $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$)

Άρα $f\cdot 1_A$ ολοκληρώσιμη από Θεώρημα 10.

Ορισμός: Για $A\subset \Pi \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο

$$\int_A f := \int_\Pi f\cdot 1_A$$

Παράδειγμα:



$$F(x)=\begin{cases} g_1(x) & x\in A_1 \\ g_2(x) & x\in A_2. \end{cases} \qquad \bar{A}_1\cup\bar{A}_2\subset\Pi$$

Με g_i συνεχή στο A_i

∴ F ασυνεχής στο $\partial A_1\cup\partial A_2$

Αν $Vol(\partial A_1\cup\partial A_2)=0$ τότε η F είναι ολοκληρώσιμη στο Π.

• Περαιτέρω γενίκευση του χώρου ασυνέχειας.

– Ως τώρα $R_1,\dots,R_{N(\varepsilon)}$ με $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} Vol(R_i)<\varepsilon$

<u>Ορισμός:</u> Ένα σύνολο $X \subset \mathbb{R}^n$ έχει <u>n-μέτρο 0</u> αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει μια ακολουθία από ανοικτά ορθογώνια $B_i \subset \mathbb{R}^n$ $i \in \mathbb{N}$ τ.ω. $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ και $\sum_{i=1}^{\infty} Vol_n(B_i) < \varepsilon$.

(n-διάστατο μέτρο).

* Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για B_i μόνο κύβους ή μπάλες ή συμπαγή υποσύνολα.

<u>Ορισμός:</u> Μια ιδιότητα που ισχύει για όλα τα x εκτός από κάποια x που ανήκουν σε σύνολο μέτρου 0, λέγεται ότι ισχύει <u>σχεδόν παντού</u> (σ.π. / a.e. almost everywhere).

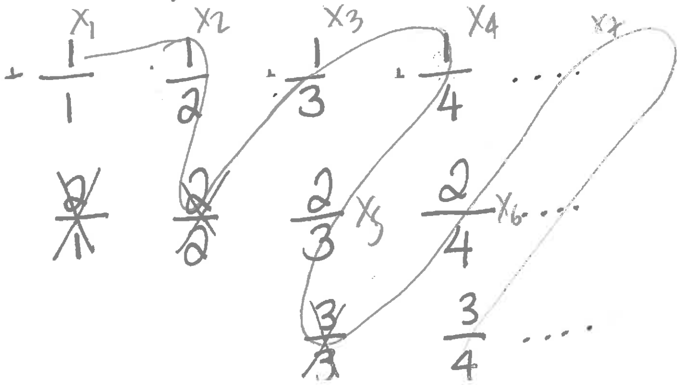
* <u>Παρατηρήσεις:</u> ① Η διαφορά ανάμεσα σε $Vol_n = 0$ και n-μέτρο 0 είναι στο πλήθος της κάλυψης.

② $Vol_n(A) = 0 \Rightarrow A$ έχει n-μέτρο 0
όχι αντίστροφα!!!

<u>Παραδείγματα:</u>

① $A = \{x \in [0,1] \mid x \in \mathbb{Q}\}$.

A: απαριθμήσιμο, δηλαδή $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots\}$



$B_i = \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2^i \cdot 2}, x_i + \frac{\varepsilon}{2^i \cdot 2} \right)$

$\sum_i Vol_1(B_i) = \sum_{i=1}^{\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$

Όμως $Vol_1(A) = \int_{[0,1]} 1_A$ Δ.Ο. (Παράδειγμα ***)

Άρα μέτρο $0 \not\Rightarrow Vol = 0$

② <u>Πρόταση 14</u>. Αν το $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (μια αριθμήσιμη ένωση συνόλων) με A_i να έχει n-μέτρο 0 ∀i, τότε το A έχει n-μέτρο 0.

<u>Απόδειξη:</u> $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ με n-μέτρο 0.

Έστω $\varepsilon > 0$.

Το A_1 καλύπτεται από $\{B_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$ με $\sum_{j=1}^{\infty} Vol_n(B_{1,j}) < \frac{\varepsilon}{2}$

Το A_k -- " -- $\{B_{k,j}\}_{j=1}^{\infty}$ με $\sum_{j=1}^{\infty} Vol_n(B_{k,j}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j} \right)$ είναι ένωση απαριθμήσιμου πλήθους συνόλων (αφού απαριθμήσ. ένωση απαρ. πλήθους συνόλων)

και $\sum_{k,j=1}^{\infty} Vol_n(B_{k,j}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} Vol_n(B_{k,j}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$

∴ A έχει μέτρο 0 □

$$\begin{array}{cccc} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & \cdots \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & \cdots \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} & \end{array}$$

- η ένωση των $B_{j,k}$
- μπορεί να γραφτεί ξανά σαν ακολουθία συνόλων

(3) $A=\{(x,0)\subset\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\}$ έχει 2-μέτρο 0.

$$A=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{\{(x,0)\mid x\in[k,k+1]\}}_{A_k} \qquad Vol_2(A_k)=0$$

$\Rightarrow A_k$ έχει 2-μέτρο 0 $\forall k$

A: απαριθμήσιμη ένωση συνόλων με 2-μέτρο 0

$\therefore$ το A έχει 2-μέτρο 0.

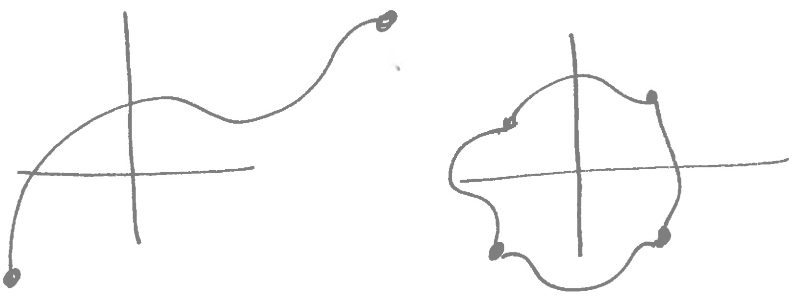
(4)  $=\{(x,y,z) \mid z=2-x^2-y^2\}$

$S^2=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

 επιφάνεια.

Επίπεδο: $\{(x,y,z) \mid Ax+By+\Gamma z=\Delta\}$

έχουν μηδενικό 3-μέτρο.



Απαριθμήσιμο πλήθος γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων 1 μεταβλητής ($f:[a,b]\to\mathbb{R}$) έχει 2-μέτρο 0.

(5) (όχι) Για $K\subset\mathbb{R}^n$ συμπαγές με $Vol_n(\partial K)=0$ (ή ∂K να έχει n-μέτρο 0). και f συνεχής στο K

$A=\{(\vec{x},f(\vec{x}))\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \vec{x}\in K\}$ έχει n+1 μέτρο 0.

Θεώρημα 15 (Ολοκληρωσιμότητα σχεδόν παντού συνεχών συναρτήσεων).

Έστω $f: \Pi \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ φραγμένη.

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο Π αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της έχει n-μέτρο 0.

Συμβολισμός: $A_f \equiv$ σύνολο σημείων ασυνέχειας της f.

- A_f έχει μέτρο 0, δείχνουμε ότι το σύνολο όπου "$\underset{\varphi}{osc}(f) > \varepsilon$" καλύπτεται από υπορθογώνια συνολικού όγκου ε.

- Δείχνουμε ότι τα υπορθογώνια όπου $osc(f) > \varepsilon/2N$ έχουν όγκο $< \frac{\varepsilon}{2^N}$ και εκεί είναι τα σημεία ασυνέχειας της f.

Hubbard: Απόδειξη.

Πόρισμα 16: Το γινόμενο δύο φραγμένων ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο Π είναι ολοκληρώσιμη

Απόδειξη: f, g ολοκληρ. $\to$ f συνεχής εκτός σε A_f με n-μέτρο 0

$\to$ g συνεχής εκτός σε A_g με n-μέτρο 0.

$\therefore$ $f \cdot g$ συνεχής εκτός σε υποσύνολο $A \subset A_f \cup A_g$.

A έχει n-μέτρο 0, άρα $f \cdot g$ ολοκληρώσιμη.!!

-πολύ πιο απλό.

$\square$

Θεώρημα 4 (Ολοκληρωσιμότητα για "σχεδόν" ~~...~~ "παντού" συνεχών συναρτήσεων) -A-

Έστω $f: \Pi \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ φραγμένη.

Η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει μέτρο 0.

Απόδειξη ($\Leftarrow$) Έστω A_f το σύνολο των σημείων ασυνέχειας και $\varepsilon > 0$.

Θέλουμε να βρούμε P τ.ω. $U(f,P) - L(f,P) = \sum_i \underset{Q_i}{osc}(f) Vol(Q_i) < \varepsilon$

A: το σύνολο των Q_i όπου $\underset{Q_i}{osc}(f) \leq \varepsilon$

B — " — όπου $\underset{Q_i}{osc}(f) > \varepsilon$

$$\therefore U(f,P) - L(f,P) \leq \varepsilon \cdot \sum_{Q_i \in A} Vol(Q_i) + 2\sup|f| \cdot \sum_{Q_i \in B} Vol(Q_i)$$

$$\leq \varepsilon \cdot Vol(\Pi) + 2\sup|f| \sum_{Q_i \in B} Vol(Q_i)$$

Θέλουμε να γίνει $< \varepsilon$.

- Θα έρθει από ότι το μέτρο του A_f είναι 0.

Έστω C_i ακολουθία κύβων με $A_f \subset \bigcup_i C_i$ και $\sum_i Vol(C_i) < \varepsilon$ (αφού μέτρο του A_f είναι 0).

Επιλέγουμε τα C_i τ.ω. να μην περιέχεται κανένα σε άλλο.

Λήμμα: Το πλήθος των C_i όπου $\underset{C_i}{osc}(f) > \varepsilon$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη: Αν όχι τότε υπάρχει υπακολουθία C_{i_j}, $j \in \mathbb{N}$ των C_i -B-

με $x_j, y_j \in C_{i_j}$ τ.ω. $|f(x_j) - f(y_j)| \geq \varepsilon$

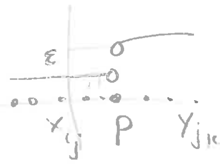
Αφού $Vol(\underbrace{C_{i_j}}_{\text{κυβοι!!}}) \to 0$ τότε $|x_j - y_j| \to 0$.

(x_j) φραγμένη ακολουθία στο P άρα έχει υπακολουθία $(x_{j_k}) \to p$ και $p \in \Pi$ αφού κλειστό. & φραγμένο

Αφού $|x_{j_k} - y_{j_k}| \to 0$ τότε και $(y_{j_k}) \to p$.

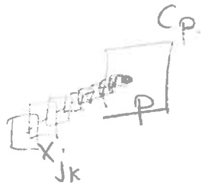
Όμως $|f(x_{j_k}) - f(y_{j_k})| > \varepsilon$ άρα το p είναι σημείο ασυνέχειας

$\Rightarrow p \in A_f$ (η f έχει σε διαφορετικές τιμές σε δυο υπακολουθίες που τείνουν στο p)



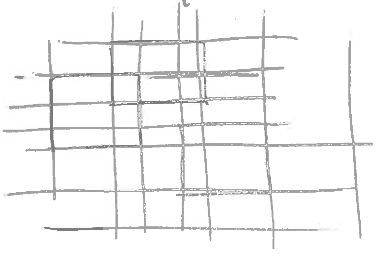
Άρα $p \in C_p$ για κάποιο από τα C_i

Όμως $Vol(C_{j_k}) \to 0$ και C_{j_k} κύβοι, άρα $C_{j_k} \subset C_p$ μετά από κάποιο p.



Άρα έστω L η ένωση αυτών των C_j πεπερασμένου πλήθους όπου $\operatorname{osc}_{C_j} f > \varepsilon$. Παρατήρηση: $Vol(L) < \varepsilon$.

Παίρνουμε P διαμέριση έτσι ώστε οι πλευρές των υποορθογωνίων Q_i να περιέχουν τις πλευρές των C_j



Άρα αν $\operatorname{osc}_{Q_i}(f) > \varepsilon$ τότε $Q_i \subset L$

$\therefore \sum_{Q_i \in B} Vol(Q_i) \leq Vol(L) < \varepsilon$.

$(\rightarrow)$ Αν f ολοκληρώσιμη τότε το A_f έχει μέτρο 0.

~~Έστω ε~~.

Κοιτώ Για κάθε $\varepsilon > 0$ ξέρουμε ότι υπάρχει διαμέριση P με υποορθογώνια Q_i τ.ω. ο συνολικός όγκος των Q_i όπου $\underset{Q_i}{osc} f > \varepsilon$ να είναι μικρότερος από ε.

• Αυτό γιατί $\exists P$ με τα Q_i να είναι κύβοι όπου $0 \leq U(f,P) - L(f,P) = \underbrace{\sum_{Q_i \in A} \underset{Q_i}{osc} f \, Vol(Q_i) + \sum_{Q_i \in B} \underset{Q_i}{osc} f \, Vol(Q_i)}_{<\varepsilon^2}$

B_ε: Q_i με $\underset{Q_i}{osc} f > \varepsilon$

$$\Rightarrow \varepsilon \cdot \sum_{Q_i \in B} Vol(Q_i) < \sum_{Q_i \in B} \underset{Q_i}{osc} f \, Vol(Q_i) < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \sum_{Q_i \in B_\varepsilon} Vol(Q_i) < \varepsilon.$$

Παρόμοια για $B_{\varepsilon/2^N}$ $\quad \sum_{Q_i \in B_{\varepsilon/2^N}} Vol(Q_i) < \frac{\varepsilon}{2^N}$.

$B_{\varepsilon/2^N}$: πεπερασμένη συλλογή ~~ορθογωνίων~~ κύβων. με συνολικό όγκο $< \frac{\varepsilon}{2^N}$.

$$B^\varepsilon = B_{\varepsilon/2} \cup B_{\varepsilon/2^2} \cup \ldots \cup B_{\varepsilon/2^N} \cup \ldots\ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\varepsilon/2^i}$$

$$\sum_{Q_i \in B^\varepsilon} Vol(Q_i) = \sum_N \sum_{Q \in B_{\varepsilon/2^N}} Vol(Q) < \varepsilon.$$

Απομένει να δείξουμε ότι f συνεχής στο $\Pi \setminus B^\varepsilon$.

Αν f μη συνεχής στο p, τότε υπάρχει ακολουθία (x_i), $(x_i) \to p$ τ.ω. $|f(x_i) - f(p)| > \frac{\varepsilon}{2^{N_k}}$ για κάποιο N_k.

$\therefore$ p ανήκει σε κάποιο κύβο του $B_{\varepsilon/2^{N_k}}$. $\Rightarrow p \in B^\varepsilon$.

$\square$

<u>Πόρισμα 17</u> Έστω $K \subset \Pi \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο.

$Vol_n(K) = \int_\Pi 1_K$ ορίζεται ανν ∂K έχει μηδενικό n-μέτρο.

• <u>Απόδειξη</u> 1_K είναι είναι ασυνεχής στο ∂K.

Άρα $\int_\Pi 1_K$ ορίζεται ανν ∂K έχει n-μέτρο 0.

<u>Παραδείγματα:</u>

① 

∂A: πεπερασμένη ή αριθμήσιμη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων 1 μεταβλητής στο $\mathbb{R}^2$.

$\therefore Vol_2(A) = \int_\Pi 1_A$ ορίζεται.

② 

∂A: τμηματικά συνεχής.

<u>Πόρισμα 18:</u> Έστω f ολοκληρώσιμη στο Π και $A \subset \Pi \subset \mathbb{R}^n$ με ∂A να έχει n-μέτρο 0, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο A. Δηλαδή $\int_A f = \int_\Pi f \cdot 1_A$ ορίζεται.

$$A_{f \cdot 1_A} \subset A_f \cup A_{1_A} = A_f \cup \partial A.$$

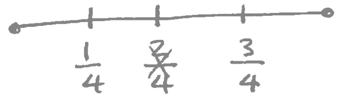
④. – Παράδειγμα συνάρτησης ασυνεχούς στο $\mathbb{Q}$.

<u>Παρ.</u> ③
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \quad p,q \in \mathbb{Z} \text{ με } \text{μκδ}(p,q) = 1 \quad x \in [0,1] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad x \notin [0,1] \end{cases}$$

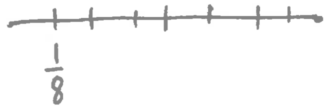
f: συνεχής στους άρρητους και ασυνεχής στους ρητούς.

Αν $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τ.ω. αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| < \varepsilon$

• αυτό συμβαίνει γιατί μπορούμε να κρατήσουμε μόνο ρητούς με μεγάλο παρονομαστή κοντά στο x_0.



$\frac{1}{q}=\frac{1}{4}$: απέχουν τουλάχιστον $\frac{1}{4}$ μεταξύ τους



$\frac{1}{q}=\frac{1}{8}$ απέχουν τουλάχιστον $\frac{1}{8}$.

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x)| \begin{cases} \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

Αν θέλω $|f(x)|<\varepsilon$ κάνω $|f(x)|<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$
για κάποιο $n_0\in\mathbb{N}$ και διαλέγω δ τ.ω.
οι ρητοί με παρονομαστή $1,2,3,4,\dots,n_0$
να μην είναι στο διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$
(είναι το πολύ $1+2+3+\dots+n_0=\frac{n_0(n_0+1)}{2}$ τέτοιους).
Όλοι οι υπόλοιποι έχουν παρονομαστή $q>n_0$
άρα $|f(x)|=\frac{1}{q}<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$.

Άρα f συνεχής στους άρρητους.

- Στους ρητούς $x_0=\frac{p_0}{q_0}$ $f(x_0)=\frac{1}{q_0}$ και $\forall\delta>0$.
$\exists z\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ (πυκνότητα αρρήτων)
με $|\underset{0}{f(z)}-f(x_0)|=\frac{1}{q_0}=\varepsilon_0$. $\therefore$ f μη συνεχής στους ρητούς

- f ασυνεχής σε ένα πυκνό σύνολο στο $[0,1]$!!

$\therefore$ $A_f\subset\mathbb{Q}\cap[-1,1]$ αριθμήσιμο στο $\mathbb{R}$ με 1-μέτρο 0

- Παρόλο που το σύνολο ασυνέχειας είναι πυκνό, αφού έχει μέτρο 0: $\int_{[0,1]} f$ ορίζεται. $\int_{[0,1]} f=\int_{[0,1]} 0=0$ αφού $f=0$ σχεδόν παντού.

(4) $h(x)=\begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ $\int_{[-1,1]} h$ Δ.Ο. αφού ασυνεχής στο $[-1,1]$ που δεν έχει μηδενικό 1-μέτρο.

Βασικές Ιδιότητες Ολοκληρώματος: Πρόταση 20

① Αν D φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^n$, D ανοικτό και ∂D έχει n-μέτρο 0 (ή n-όγκο 0)

τότε $\int_D f = \int_{\bar{D}} f$

Δηλαδή: f ολοκληρώσιμη στο D ανν ολοκλ. στο $\bar{D}$.

αφού $A_{f \cdot 1_D} = A_{f \cdot 1_{\bar{D}}} \subset A_f \cup \partial D$.

② Αν D_1, D_2 φραγμένα με $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ και f ολοκληρώσιμη στα D_1 & D_2 τότε

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$$

Για D_1, D_2 με $D_1 \cap D_2 = 0$ έχουμε $1_{D_1 \cup D_2} = 1_{D_1} + 1_{D_2}$ (Άσκηση)

Αφού $f \cdot 1_{D_1}$; $f \cdot 1_{D_2}$ ολοκληρώσιμες, τότε $f 1_{D_1 \cup D_2}$ ολοκλ.

και $\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_\Pi f \cdot 1_{D_1 \cup D_2} = \int_\Pi f \cdot 1_{D_1} + \int_\Pi f \, 1_{D_2} = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$ τότε

③ Αν $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ συνεχής σε ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο $D \subset \mathbb{R}^n$, $f \geq 0$ και $\int_D f = 0$,

τότε $f = 0$ στο D.

- Αν $f > 0$ στο $x_0 \in D \Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$

σε μπάλα ακτίνας δ γύρω από το x_0, από συνέχεια.

$\rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ $\forall x \in B(x_0, \delta)$.

$\therefore \int_D f > \int_{D \cap B(x_0, \delta)} f > \frac{f(x_0)}{2} \cdot Vol_n(B(x_0, \delta)) > 0$ $\rightarrow\leftarrow$

<u>Θεώρημα 21</u> (Μέσης Τιμής για ολοκληρώματα)

1. Έστω $f: \overline{D} \to \mathbb{R}$ συνεχής όπου $D \subset \Pi \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό συνεκτικό σύνολο (φραγμένο αφού $D \subset \Pi$) με ∂D να έχει n-μέτρο 0.

Τότε υπάρχει $x_0 \in \overline{D}$ τ.ω. $f(x_0) = \dfrac{1}{Vol_n(D)} \cdot \int_D f$.

2. Έστω f συνεχής σε ανοικτή περιοχή U του $a \in \mathbb{R}^n$

Τότε $f(a) = \lim\limits_{\substack{V \ni a \\ diam(V) \to 0 \\ V \text{ συνεκτικό, ανοικτό}}} \dfrac{1}{Vol_n(V)} \int_V f$

<u>Απόδειξη.</u>

1. f συνεχής στο $\overline{D}$ (συμπαγές) άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \overline{D}$ τ.ω. $f(x_1) = \min\limits_{\overline{D}} f = m$, $f(x_2) = \max\limits_{\overline{D}} f = M$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \overline{D}$$

$$\therefore \; m \cdot Vol_n(\overline{D}) = m\, Vol_n(D) \leq \int_D f \leq M\, Vol_n(D)$$

$$\therefore \; m \leq \underbrace{\frac{1}{Vol_n(D)} \cdot \int_D f}_{\lambda} \leq M$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ άρα από Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής στο $\mathbb{R}^n$ υπάρχει x_0 σε καμπύλη που ενώνει τα x_1, x_2 τ.ω. $f(x_0) = \lambda$.

2. $\dfrac{1}{Vol_n(V)} \int_V f = f(x_0^V)$ για κάποιο $x_0^V \in V$.

Αφού $\lim\limits_{\substack{diam V \to 0 \\ V \ni a \\ V \text{ συνεκτικό, ανοικτό}}} (x_0^V) = a$ και f συνεχής $\therefore \lim\limits_{\substack{diam V \to 0 \\ V \ni a \\ V \text{ συνεκτικό, ανοικτό}}} f(x_0^V) = f(a)$

Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων:

- Θεώρημα Fubini — μετατρέπει $\int_D f$ σε πολλαπλό ολοκλήρωμα.

- Είχαμε δει ότι $\int_{\Pi} x = \frac{1}{2}$ όταν $\Pi = [0,1]\times[0,1]$

ισούνται

Παρατήρηση: $$\int_0^1 \left[\int_0^1 x\,dx \right] dy = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 \right] dy = \int_0^1 \tfrac{1}{2}\,dy = \tfrac{1}{2}$$

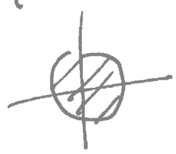
$$\parallel$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 x\,dy \right] dx = \int_0^1 \left[xy \Big|_0^1 \right] dx = \int_0^1 x\,dx = \tfrac{1}{2}$$

- Τι συμβαίνει με $\int_{[0,2]\times[0,1]} \sin(xy)$ ή $\int_{[a,b]\times[c,d]} e^{xy}$.

ή αν $f = g\cdot 1_D$ με D κάποιο άλλο χωρίο.

π.χ. $\int_D x\cdot y$ με $D = \{ x^2+y^2 \le 1 \}$;

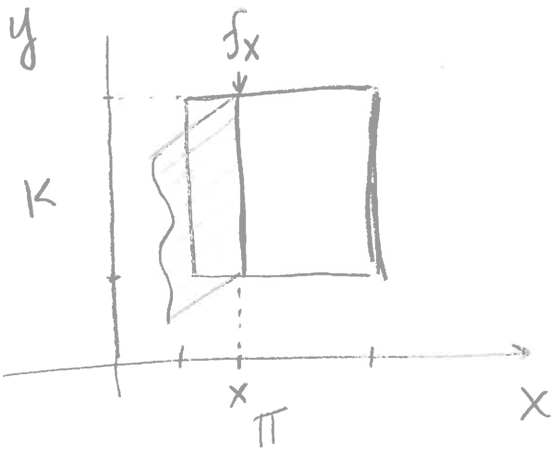


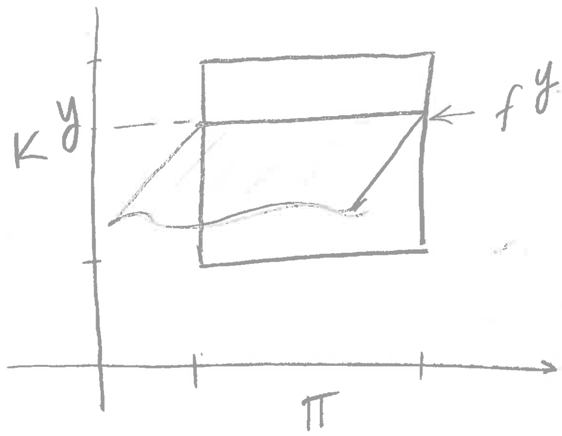
Θεώρημα Fubini 22

Έστω $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ και $K \subset \mathbb{R}^m$ κλειστά και φραγμένα ορθογώνια και $f : \Pi \times K \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\Pi \times K$.

Για κάθε $x \in \Pi$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f_x(y) := f(x,y) : K \to \mathbb{R}$

και για κάθε $y \in K$ - " - $f^y(x) := f(x,y) : \Pi \to \mathbb{R}$





Έστω $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(f_x) = \sup_{P_K} \{ L(f_x, P_K) \}$ P_K: διαμ. το K

$$\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(f_x) = \inf_{P_K} \{ U(f_x, P_K) \}$$

$\tilde{\mathcal{L}}(y) = \mathcal{L}(f^y) = \sup_{P_\Pi} \{ L(f^y, P_\Pi) \}$ P_Π: διαμ. του Π

$$\tilde{\mathcal{U}}(y) = \mathcal{U}(f^y) = \inf_{P_\Pi} \{ U(f^f, P_\Pi) \}$$

Τότε οι συναρτήσεις $\mathcal{L}(x)$, $\mathcal{U}(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο Π και οι $\tilde{\mathcal{L}}(y)$, $\tilde{\mathcal{U}}(y)$ είναι ολοκλ. στο K. και

$$\int_\Pi \mathcal{L}(x) = \int_\Pi \mathcal{U}(x) = \int_K \tilde{\mathcal{L}}(y) = \int_K \tilde{\mathcal{U}}(y) = \int_{\Pi \times K} f.$$

<u>Πόρισμα 23</u> Το σύνολο των x όπου $\mathcal{L}(x) \neq \mathcal{U}(x)$ έχει n-μέτρο 0 στο Π, και το σύνολο των y όπου $\tilde{\mathcal{L}}(y) \neq \tilde{\mathcal{U}}(y)$ έχει m-μέτρο 0 στο K.

<u>Πόρισμα 24</u>: Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\Pi \times K$ και η $f_x(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο K $\forall x \in \Pi$ τότε

τότε
$$\int_{\Pi \times K} f = \int_{\Pi} \left(\int_K f(x,y)\, dy \right) dx$$

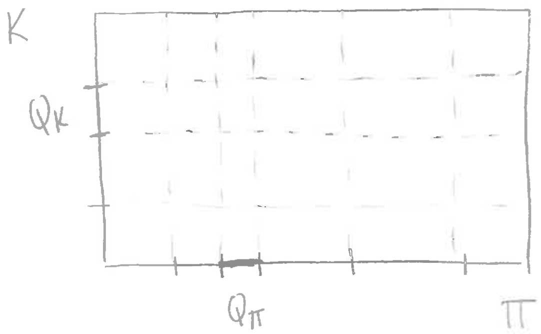
Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\Pi \times K$ και η $f^y(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο Π $\forall y \in K$ τότε
$$\int_{\Pi \times K} f = \int_K \left(\int_{\Pi} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

* Μπορεί για κάποια x η f_x να μην είναι ολοκληρώσιμη στο K, αλλά το σύνολο αυτών των x έχει n-μέτρο 0.

  - Παρόμοια για f^y

* Μπορεί το ένα ολοκλήρωμα να είναι πιο εύκολο υπολογιστικά από το άλλο.

Απόδειξη:



Διαμερίζουμε το $\Pi \times K$ με τον εξής τρόπο:

Αν P_Π διαμ. το Π με υπορθ. Q_Π και P_K διαμ. του K με υπορθ. Q_K παίρνουμε P το $\Pi \times K$ με υπορθογώνια $Q_\Pi \times Q_K = Q$

$$L(f,P) = \sum_Q \inf_Q (f)\, Vol_{n+m}(Q) = \sum_{Q_\Pi} \Big(\sum_{Q_K} \underbrace{\inf_{Q_\Pi \times Q_K} (f) \cdot Vol_m(Q_K)}_{\leq \mathcal{L}(x_0)\ \forall x_0 \in Q_\Pi} \Big) \cdot Vol_n(Q_\Pi)$$

Παρατήρηση:

$$\inf_{Q_\Pi \times Q_K}(f) = \inf\{f(x,y) \mid x \in Q_\Pi,\ y \in Q_K\} \leq \inf\{f(x_0,y) \mid y \in Q_K\} = \inf_{Q_K}(f_{x_0})$$

$$\forall x_0 \in Q_\Pi.$$

Άρα $\forall x_0 \in Q_\Pi$

$$\sum_{Q_K} \inf_{Q_\Pi \times Q_K}(f)\, Vol_m(Q_K) \leq \sum_{Q_K} \inf_{Q_K}(f_{x_0})\, Vol_m(Q_K) = L(f_{x_0}, P_K)$$

$$\leq \mathcal{L}(x_0) \quad \forall x_0 \in Q_\Pi$$

Άρα $L(f,P) \leq \sum_{Q_\Pi} \inf\{\mathcal{L}(x_0) : x_0 \in Q_\Pi\} \cdot Vol_n(Q_\Pi) = L(\mathcal{L}, P_\Pi)$

Παρόμοια: $\quad U(\mathcal{L}, P_\Pi) \leq U(f,P)$

$$\therefore\ L(f,P) \leq L(\mathcal{L}, P_\Pi) \leq U(\mathcal{L}, P_\Pi) \leq U(f,P) \quad (*)$$

f ολοκληρώσιμη άρα $U(f,P) - L(f,P) \to 0$

και άρα $U(\mathcal{L}, P_\Pi) - L(\mathcal{L}, P_\Pi) \to 0$ από $(*)$

$\therefore\ \mathcal{L}$ ολοκλ. στο Π και από $(*)$ $\displaystyle\int_\Pi \mathcal{L} = \int_{\Pi \times K} f$

Ανάλογα και $\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{U}}$ ολοκληρώσιμες $\square$

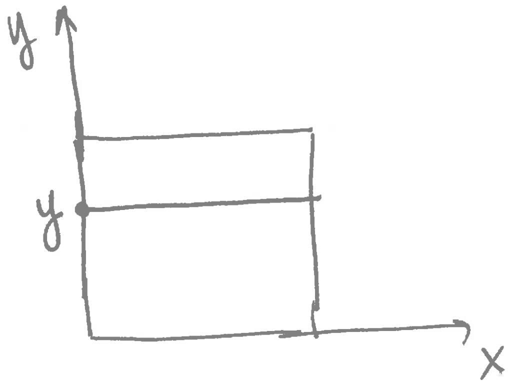
Παραδείγματα: Good - Bad - Ugly.

① Ugly:

$f: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \text{ ή } y \text{ στο } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{αν } x,y\in\mathbb{Q} \text{ και } x=\frac{p}{q} \text{ με } \text{μκδ}(p,q)=1. \end{cases}$$

(πρώτοι μεταξύ τους)



$$f^y(x) = \begin{cases} \text{Αν } y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} & f^y\equiv 0 \\ \text{Αν } y\in\mathbb{Q} & f^y(x)=\begin{cases} 0 & \text{για } x\notin\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{για } x=\frac{p}{q}\end{cases}\end{cases}$$

f^y: ασυνεχής το πολύ στα $x\in\mathbb{Q}$ (ανάλογα με το y) και συνεχής στα $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

$\therefore\ \forall y\in[0,1]$ $\quad \int_0^1 f^y(x)\,dx = 0$ αφού $\neq 0$ και ασυνεχής σε σύνολο μηδενικού 1-μέτρου

f: $|f(x,y) - f(x_0,y_0)|$

Αν $y_0 \notin \mathbb{Q}$

- $x_0\in\mathbb{Q}$ "$\frac{p_0}{q_0}$": υπάρχει ακολουθία $(x_0,y)\to(x_0,y_0)$ με $y\in\mathbb{Q}$. $|f(x_0,y)-\underbrace{f(x_0,y_0)}_{0}| = |\frac{1}{q_0}| > \varepsilon_0$

  → ασυνεχής στο (x_0,y_0).

- $x_0\notin\mathbb{Q}$ $\quad |f(x,y)-f(x_0,y_0)| = |f(x,y)| < \varepsilon$.

  υπάρχει δ που να αφήνει έξω τα ρητά x,y με μικρό παρονομαστή → συνεχής στο (x_0,y_0).

Αν $y_0\in\mathbb{Q}$

- $x_0\in\mathbb{Q}$: ασυνεχής στο (x_0,y_0)
- $x_0\notin\mathbb{Q}$: συνεχής στο (x_0,y_0) όπως πιο πάνω.

∴ f ασυνεχής στο

$$A_f = \{(x,y) \mid x\in\mathbb{Q} \text{ και } y\notin\mathbb{Q}\} \cup \{(x,y) \mid x\in\mathbb{Q} \text{ και } y\in\mathbb{Q}\}$$

$$= \{(x,y) \mid x\in\mathbb{Q}\}.$$

Το A_f έχει 2-μέτρο 0.

γιατί $\{(x,y) \mid x\in\mathbb{Q}\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{(x_i,y) \mid y\in[0,1]\}$ όπου $\mathbb{Q} := \{x_1, x_2, \dots\}$

$$R_i = \left[x_i - \frac{\varepsilon}{2^i\cdot 2},\ x_i + \frac{\varepsilon}{2^i\cdot 2}\right]\times[0,1].$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} Vol_2(R_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2\cdot 2^i}\cdot 1 = \varepsilon \quad \text{και} \quad A_f \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$$

~~παρόμοια το D έχει 2-μέτρο 0~~.

∴ A_f έχει 2-μέτρο 0.

∴ f ολοκληρώσιμη.

Από Fubini:
-Πόρισμα 24

$$\iint_{\Pi} f = \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy = \int_0^1\Big(\underbrace{\int_0^1 f^y(x)\,dx}_{=0\ \forall y}\Big)dy = 0$$

Προσοχή: $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx$ είναι πιο δύσκολο να υπολογιστεί.

Αν $x\in\mathbb{Q}$ $\int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 f^x(y)\,dy$ Δ.Ο. γιατί η $f^x(y)$ είναι ασυνεχής σε όλα τα $y\notin\mathbb{Q}$ που έχουν μη-μηδενικό 1-μέτρο.

Όμως τα x όπου $\int_0^1 f^x(y)\,dy$ Δ.Ο. είναι μηδενικού 1-μέτρου άρα η $\delta(x)$ είναι ολοκληρώσιμη.

- Βρήκαμε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση "όχι πολύ ωραία" στην οποία ισχύει το Fubini. "Όχι ωραία" = Ασυνεχής σε πυκνό σύνολο!!