Θεώρημα 6 Έστω $f : \Pi \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής στο Π.
Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο Π.

Απόδειξη: f συνεχής σε κλειστό και φραγμένο σύνολο $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ άρα ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη.

$\therefore$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω. αν $\|x-y\| < \delta$ τότε $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Έστω P διαμέριση με $\|P\| < \delta/\sqrt{n}$

Για $x, y \in Q$ με Q υποορθογ. της P τότε

$$\|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{n} \cdot \max_i |x_i - y_i| \leq \sqrt{n}\, \|P\| < \delta$$

Άρα $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$$\therefore \sup_Q f - \inf_Q f = \sup_{x,y \in Q} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

(f φραγμένη - sup, inf ορίζονται και αφού f συνεχής από Θεωρ. Μεγ. $\sup f = f(x_0)$ $\inf f = f(\tilde{x}_0)$)

$$\therefore U(f,P) - L(f,P) = \sum_{Q \in P} \left(M_Q(f) - m_Q(f) \right) \mathrm{Vol}(Q)$$

$$\leq \varepsilon \sum_{Q \in P} \mathrm{Vol}(Q) = \varepsilon\, \mathrm{Vol}(\Pi)$$

$\therefore$ f ολοκλ.

$\square$

Κριτήρια για ολοκληρωσιμότητα:

Θεώρημα 6: Έστω $f:\Pi\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη. και $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η $\phi\circ f$ είναι ολοκληρώσιμη στο Π.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon>0$. (ΜΗ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΟ).

Από Κρ. Riem. Ελπίζουμε $P_0(\varepsilon)$ τ.ω. $\sum_{Q\in P_0}\left(M_Q(\phi\circ f)-m_Q(\phi\circ f)\right)Vol_n(Q)<\varepsilon$

$|\phi\circ f(x)-\phi\circ f(y)|<\varepsilon$ αν $|f(x)-f(y)|<\delta$ στο Q, από συνέχεια ϕ.

Αν $|f(x)-f(y)|\geq\delta$ στο Q περιορίζουμε τον όγκο αυτών των Q από ολοκλ. f (Πρ. 4)

- $m\le f\le M$ φραγμένη.

ϕ συνεχής στο $[m,M]$ $\Rightarrow$ ομοιόμορφα συνεχής.

Για το πιο πάνω $\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$ τ.ω. αν $|z-w|<\delta$ τότε $|\phi(z)-\phi(w)|<\varepsilon$.

Αν $|f(x)-f(y)|<\delta$ στο Q $\Rightarrow |\phi(f(x))-\phi(f(y))|<\varepsilon$

$\Rightarrow M_Q(\phi\circ f)-m_Q(\phi\circ f)\le\varepsilon$ στο Q

Παίρνουμε $\delta(\varepsilon)<\varepsilon$ (χωρίς απώλεια γενικότητας)

- f ολοκλ στο Π άρα υπάρχει $P_0(\delta(\varepsilon))$ διαμ. του Π τ.ω. $U(f,P_0)-L(f,P_0)<\delta^2$

A: Q με $M_Q(f)-m_Q(f)=\underset{Q}{osc}(f)<\delta$

B: Q με $\underset{Q}{osc}(f)\geq\delta \Rightarrow \sum_{Q\in B}Vol(Q)<\delta<\varepsilon$ από Πρ. 4

$$\therefore U(\phi\circ f,P_0)-L(\phi\circ f,P_0)=\sum_{Q\in A}\underbrace{\underset{Q}{osc}(f)}_{\le\varepsilon}\cdot Vol(Q)+\sum_{Q\in B}\underset{Q}{osc}(f)\,Vol(Q)$$

$$\le\varepsilon\cdot\sum_{A\in Q}Vol(Q)+2\sup_{[m,M]}|\phi|\sum_{B\in Q}Vol(Q)<\varepsilon\left[Vol(\Pi)+2\sup|\phi|\right]$$

□

Θεώρημα 7 Κριτήριο Darboux (όχι - . Μόνο για όσους τους ενδιαφέρει)

Έστω $f: \Pi \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ φραγμένη.

• Αν f ολοκληρώσιμη στο Π, τότε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω. για κάθε διαμέριση P με $\|P\| < \delta$ και για κάθε επιλογή σημείων $\xi_Q \in P$ των υπορθογωνίων Q της P ισχύει.

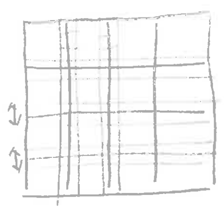
$$\left| \sum_{Q \in P} f(\xi_Q) \cdot Vol(Q) - \int_\Pi f \right| < \varepsilon.$$

• Αντίστροφα, αν $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum\limits_Q f(\xi_Q)\, Vol(Q) = I$

τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_\Pi f = I$.

..(όχι)

"Απόδειξη" $(\to)$



P_0

Για $\varepsilon > 0$ $\exists P_0(\varepsilon)$ με $U(f, P_0) - L(f, P_0) < \varepsilon$

$\Pi = I_1 \times \ldots \times I_n$ χωρίζει το I_i σε N_i υποδιαστήματα.

Έστω $\delta = \dfrac{\varepsilon}{N_1 + \ldots + N_n} \cdot \dfrac{1}{2 \cdot (\operatorname{diam} \Pi)^{n-1}}$ και $\|P\| < \delta$

A: . Τα Q της P που περιέχονται σε Q_0 της Q_0

$$\sum_{Q \in A} \left(M_Q(f) - m_Q(f)\right) Vol(Q) < \varepsilon$$

B: Τα Q της P που δεν περιέχονται - μικρού μεγέθους

$$\sum_{Q \in B} \left(M_Q(f) - m_Q(f)\right) Vol(Q) \leq 2 \sup_\Pi |f| \left(\sum_{i=1}^n N_i\right) \delta \cdot (\operatorname{diam} \Pi)^{n-1} = \varepsilon \cdot \sup_\Pi |f|$$

($\Leftarrow$) Έστω $\varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ τ.ω. αν P με $\|P\|<\delta$

$$\Big|\sum_{Q\in P} f(\xi_Q)\cdot Vol(Q) - I\Big| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{Q} f(\xi_Q)\, Vol(Q) < \varepsilon + I.$$

$\uparrow$ ομοιόμορφο άνω φράγμα, ανεξάρτητο του ξ_Q

- παίρνουμε διαδοχικά το sup της f σε κάθε Q

$$\therefore \sum_{Q} M_Q(f)\, Vol(Q) \leq \varepsilon + I \Rightarrow U(f,P) \leq I+\varepsilon$$

Παρόμοια $\sum_{Q} f(\xi_Q)\, Vol(Q) > I-\varepsilon \Rightarrow \sum_{Q} m_Q(f) Vol(Q) > I-\varepsilon$

$$\Rightarrow L(f,P) \geq I-\varepsilon$$

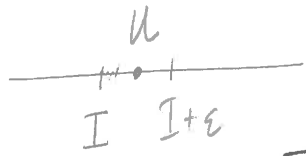
$$\therefore U(f,P) - L(f,P) \leq 2\varepsilon$$

$\therefore$ f ολοκληρώσιμη

Αφού $\forall \varepsilon>0$ $\exists P>0$ με $U(f,P) \leq I+\varepsilon \Rightarrow \mathcal{U} = \inf\{U(f,P)/P\} = I$

εξ ορισμού inf

$$\therefore \int_{\Pi} f = \mathcal{U} = I$$



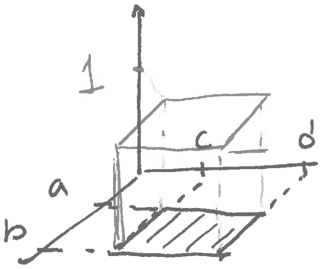
$\square$

* Κριτήριο Darboux δε μας περιορίζει να βρούμε sup & inf σε κάθε Q.

n- Διάστατος όγκος:

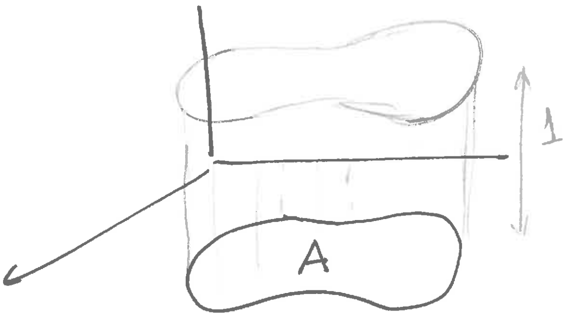
Παρατήρηση: $Vol_n(\Pi) = \int_{\Pi} 1 = (b_1 - a_1)\cdots(b_n - a_n)$

$\Pi = I_1 \times \cdots \times I_n$, $I_j = [a_j, b_j]$



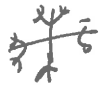
Το εμβαδό του $[a \times b] \times [c,d]$ ισούται με ολοκλήρωμα της $f=1$ πάνω στο Π ή ισούται με τον όγκο του κουτιού $[a,b) \times [c,d] \times [0,1]$.

Για $A \subset \Pi \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε τη συνάρτηση δείκτη
$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$



Ορισμός: Έστω $A \subset \Pi \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο.
Ο n-διάστατος όγκος του A ορίζεται ως
$$Vol_n(A) = \int_{\Pi} 1_A$$ όταν η 1_A είναι ολοκληρώσιμη στο Π.

(όταν $\int_{\Pi} 1_A$ Δ.Ο. τότε $Vol_n(A)$ Δ.Ο.).

- Παίρνουμε τον ορισμό στα όριά του
  - Για A ορθογώνιο / πολύεδρο / δίσκο / έλλειψη αναμένουμε $Vol_n(A)$ να ορίζεται
  - Για A : Τρίγωνο Serpinski 
    Νιφάδα - fractal  ?
    $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

<u>Παρατήρηση:</u> $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon \Leftrightarrow \sum_{Q} \underset{Q}{\operatorname{osc}}(f)\, Vol(Q)<\varepsilon$

Θέλουμε $\underset{Q}{\operatorname{osc}}(f)<\varepsilon$ για P αρκετά εκλεπτυσμένη.

και όπου $\underset{Q}{\operatorname{osc}}(f)\geq\varepsilon$ ο συνολικός όγκος $\leq\varepsilon$.

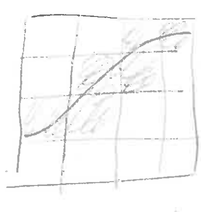
- Θέλουμε τον όγκο των σημείων ασυνέχειας να είναι 0.

<u>Πρόταση 8</u> (Μηδενικός όγκος). Για $A\subset\Pi\subset\mathbb{R}^n$ $Vol_n(A)=0$ ανν $\forall\varepsilon>0$ το A μπορεί να καλυφθεί με πεπερασμένο πλήθος ορθογωνίων των οποίων ο συνολικός όγκος είναι μικρότερος από ε.

Δηλαδή, $\forall\varepsilon>0$ $\exists R_1,\dots,R_{N(\varepsilon)}$ ορθογώνια με $A\subset\bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)}R_i$

και $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} Vol_n(R_i)<\varepsilon$

<u>Απόδειξη:</u> $(\rightarrow)$ $\int_{\Pi} 1_A=0 \Rightarrow \mathcal{U}=\inf_{P}\{U(1_A,P)\}=0$



$\therefore$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists P(\varepsilon)$ τ.ω. $U(1_A,P)<\varepsilon$.

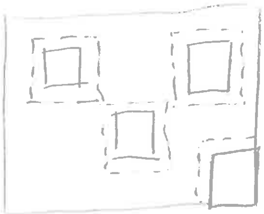
$U(1_A,P)\geq 0$ αφού $1_A\geq 0$

$\therefore \sum_{Q\in P} \sup_{Q} 1_A\, Vol(Q)<\varepsilon$ $\quad \sup_{Q} 1_A=1 \Leftrightarrow A\cap Q\neq\emptyset$

R_i: τα Q όπου $\sup_{Q} 1_A=1$ $\Rightarrow \sum Vol(R_i)<\varepsilon$

(←) $R_1, \dots, R_{N(\varepsilon)}$ ορθογώνια με $A \subset \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} R_i$

Έστω $\tilde{R}_i$ ένα ορθογώνιο που περιέχει το R_i με $Vol(\tilde{R}_i) \le 2\, Vol(R_i)$ και που να μην τέμνει τις πλευρές του του R_i εκτός αν αυτές είναι στο σύνορο του Π



Έστω P διαμέριση του Π που να περιέχει όλες τις πλευρές όλων των $\tilde{R}_i$ (πεπραφωνία).

$$\sup_Q 1_A = 1 \Leftrightarrow R_i \cap Q \neq \emptyset \quad \text{για κάποιο } i$$
$$\Rightarrow Q \subset \tilde{R}_i \qquad -''-$$

$$\therefore\ 0 \le U(1_A, P) = \sum_Q \sup_Q 1_A \, Vol_n(Q) \le \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} Vol(\tilde{R}_i)$$
$$\le 2 \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} Vol(R_i) < 2\varepsilon.$$

Αφού $L(1_A, P) \ge 0$ $\quad\therefore\ U(1_A,P) - L(1_A,P) < 2\varepsilon$

$\therefore\ 1_A$ ολοκλ.

Αφού $\mathcal{U} = \inf\{U(1_A,P)\}$ και $\forall \varepsilon\ \exists P$ με $0 \le U(1_A,P) < 2\varepsilon$

$\therefore\ \mathcal{U} = \int 1_A = 0$

QED

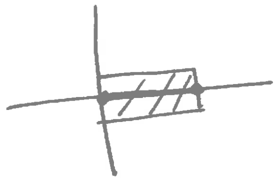
<u>Παραδείγματα:</u>

(i) $\cancel{T = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, y = 0\}}$

$\cancel{R_\varepsilon = \{(x,y)\}}$

Παραδείγματα συνόλων με όγκο 0:

(i) $T = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 \ , \ y=0\}$.



$R_\varepsilon = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, \ -\frac{\varepsilon}{2} \le y \le \frac{\varepsilon}{2}\}$

$Vol_2(R_\varepsilon) = \varepsilon$

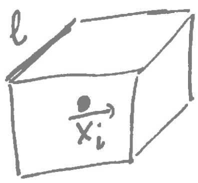
$\therefore Vol_2(T) = 0$.

(ii) $A = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N \mid \vec{x}_i \in \mathbb{R}^n\}$ N σημεία στο $\mathbb{R}^n$

N κύβοι όγκου ε/N ο καθένας.

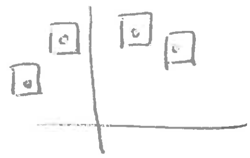
R_i : κύβος πλευράς $\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{N}}$ γύρω από το $\vec{x}_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$

$$R_i := \{\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \mid |y_j - x_{i,j}| \le \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{N}} \quad \forall j = 1, \dots, n\}$$



$$= [x_{i,1} - \tfrac{\ell}{2}, x_{i,1} + \tfrac{\ell}{2}] \times \dots \times [x_{i,n} - \tfrac{\ell}{2}, x_{i,n} + \tfrac{\ell}{2}]$$

$$Vol(R_i) = \ell^n = \left(\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{N}}\right)^n = \frac{\varepsilon}{N}$$



$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} R_i$ με $\sum_{i=1}^{N} Vol(R_i) = \varepsilon$. $\quad \therefore Vol_n(A) = 0$.

(iii) $A = \{(\vec{x}_k) \mid \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n, \ \lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{L}\}$ συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}^n$

$Vol_n(A) = 0$ Άσκηση

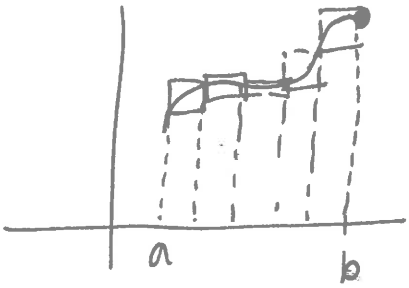
(iv) Πρόταση 9 Αν $A = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \ f$ συνεχής στο $[a,b]\}$.

τότε $Vol_2(A) = 0$ (γράφημα συνεχούς συνάρτησης).

Απόδειξη: f ομοιόμορφα συνεχής : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω.
αν $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Παίρνουμε P με $\|P\| < \delta$

$P: \quad t_0 = a < t_1 < \ldots < t_k = b$ με $t_i - t_{i-1} < \delta$



$$R_i = [t_{i-1}, t_i] \times [m_i(f), M_i(f)]$$

$$M_i(f) - m_i(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} - \inf\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

$$= \sup_{x,y \in [t_{i-1}, t_i]} |f(x) - f(y)| \underset{\uparrow}{=} \max(f) - \min(f) < \varepsilon$$

συνέχεια σε κλειστό/φραγμ.

αφού $|x-y| < \delta$ από ομοιόμορφη συνέχεια.

$A \subset \bigcup_i R_i$ και $\sum_i Vol(R_i) = \sum_i (M_i(f) - m_i(f)) \cdot (t_i - t_{i-1})$

$$\leq \varepsilon \cdot \sum_i (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon(b-a)$$

$\therefore Vol_2(A) = 0$

$\square$

(v) Παρόμοια, αν $A = \{(g(y), y) \mid y \in [c,d], g \text{ συνεχής}\} \subset \mathbb{R}^2$
τότε $Vol_2(A) = 0$

(vi) Παρόμοια αν $A = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \vec{x} \in \Pi \subset \mathbb{R}^n, f : \Pi \to \mathbb{R} \text{ συνεχής}\}$

τότε $Vol_{n+1}(A) = 0$
$\uparrow\uparrow$

Παραδείγματα:

$$B = \{ (x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in [a,b]\times[c,d] \} \subset \mathbb{R}^3$$

f συνεχής.

$$Vol_3(B) = 0$$

$$C = \{ (x, g(x,z), z) \mid (x,z) \in [a,b]\times[c,d],\ g \text{ συνεχής} \} \subset \mathbb{R}^3$$

$$D = \{ (x,y,\underbrace{2-(x^2+y^2)}_{f(x,y)}) \mid x^2+y^2 \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^3$$

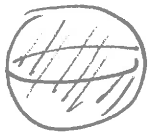
$f(x,y)$ συνεχής - παραβολοειδές

$$Vol_3(D) = \int_{\Pi} 1_D = 0 \qquad \Pi = [-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$$

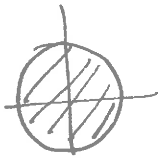
D: σφαιρικό κέλυφος στο $\mathbb{R}^3$

$$E = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1 \}$$ μπάλα στο $\mathbb{R}^3$

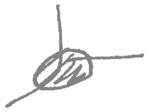
$$Vol_3(E) \neq 0$$



$$F = \{ (x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1 \} \qquad Vol_2(F) \neq 0$$

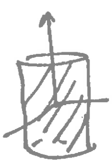


$$G = \{ (x,y,0) \mid x^2+y^2 \leq 1 \} \qquad Vol_3(G) = 0$$



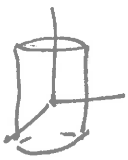
$$H = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1 \}$$ Μη φραγμένο

$$H' = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ z \in [c,d] \}$$



$$Vol_3(H') \neq 0$$

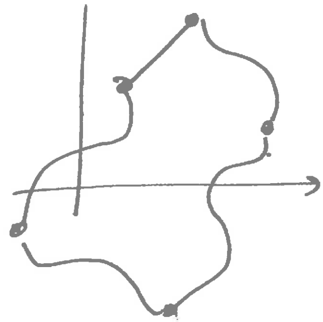
$$I = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1,\ z \in [c,d] \} \qquad Vol_3(I) = 0$$



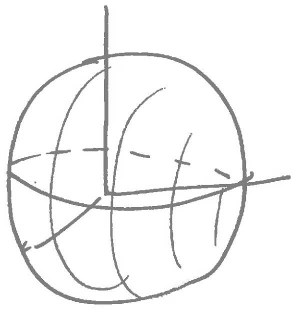
κυλινδρικό κέλυφος

(vii) Πεπερασμένη ένωση γραφημάτων του πιο πάνω τύπου είναι επίσης όγκου 0.

· Καμπύλη συνεχής κατά τμήματα στο $\mathbb{R}^2$: έχει $Vol_2 = 0$



· Επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3$ έχει $Vol_3 = 0$

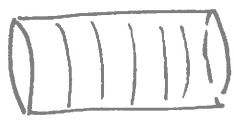


$S^2 = \{x^2+y^2+z^2 = R^2\} = \{(x,y,\sqrt{R^2-x^2-y^2}) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$

(κέλυφος) $\cup \{(x,y,-\sqrt{R^2-x^2-y^2}) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$

$S^2 = J$: παράδειγμα J.

Επιφάνεια τόρου.



Κυλινδρικό κέλυφος: $\{(x,y,z) \mid x^2+z^2 = 1,\ y \in [a,b]\}$

Κώνος: $\{(x,y,\sqrt{x^2+y^2}) \mid x^2+y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y,-\sqrt{x^2+y^2}) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

(viii) Αν $A_1, \ldots, A_N$ έχουν $Vol_n(A_i) = 0$ $\forall i$ τότε $Vol_n(\bigcup_i A_i) = 0$.

- Βάζουμε $Q_{i,j}$ για $j = 1, \ldots, K_i$ γύρω από το A_i με $\sum_j Vol_n(Q_{i,j}) = \frac{\varepsilon}{N}$

• *** Υπενθύμιση:

Αν $A = \{ x \in [0,1] \mid x \in \mathbb{Q} \}$ $\qquad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$

$\int_{[0,1]} 1_A$ Δ.Ο. (από οριακά με L ≠ U)

$\therefore \mathrm{Vol}_1(A)$ Δ.Ο.

1_A ασυνεχής στο $[0,1]$.

Για $\int_{\Pi} f$ πόσο ασυνεχής μπορεί να είναι η f;

<u>Θεώρημα 10</u> Έστω $f : \Pi \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση συνεχής στο $\Pi \setminus V$, όπου $V \subset \Pi$ με $\mathrm{Vol}_n(V) = 0$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο Π.

<u>Απόδειξη</u>: $\quad Vol_n(V)=0 \Rightarrow \int_{\Pi} 1_V = 0 = \mathcal{U}$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists P_0$ διαμ. του Π με

$U(1_V, P_0) < \varepsilon$ από ορισμό inf για το $\mathcal{U}=0$

$\mathcal{U}=0 \quad u \quad \varepsilon$

$$\therefore \sum_{Q\in P_0} \sup_Q (1_V) \, Vol_n(Q) < \varepsilon$$

$$\sup_Q (1_V) = 1 \Leftrightarrow V \cap Q \neq \emptyset$$

A: Τα Q της P_0 με $\sup_Q (1_V) = 1 \Rightarrow V \subset \bigcup_{Q\in A} Q$

B: Τα Q της P_0 με $\sup_Q (1_V) \neq 1 \quad (=0)$

Έστω $W = \bigcup_{Q\in B} Q$: κλειστό και φραγμένο $\to f$ ομοιόμορφα συνεχής.

Για το $\varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ τ.ω. αν $\|\vec{x}-\vec{y}\|<\delta$

τότε $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \varepsilon$

Έστω $\tilde{P}$ εκλέπτυνση της P_0 με $\|\tilde{P}\| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$

Αν $\vec{x},\vec{y} \in \tilde{Q}$ της $\tilde{P}$ και $\tilde{Q} \subset W$ τότε $\|\vec{x}-\vec{y}\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_i |x_i - y_i| < \delta$

άρα $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \varepsilon \Rightarrow \operatorname{osc}_{\tilde{Q}}(f) \underset{\text{συνεχία}}{\overset{\uparrow}{=}} \max_{\tilde{Q}}(f) - \min_{\tilde{Q}}(f) < \varepsilon$

$$U(f,\tilde{P}) - L(f,\tilde{P}) = \sum_{\tilde{Q}\subset W} \operatorname{osc}_{\tilde{Q}}(f)\, Vol_n(\tilde{Q}) + \sum_{\tilde{Q}\not\subset W} \operatorname{osc}_{\tilde{Q}}(f)\, Vol_n(\tilde{Q})$$

$$\leq \varepsilon \sum_{\tilde{Q}\subset W} Vol_n(\tilde{Q}) + 2\sup_{\Pi}|f| \cdot \underbrace{\sum_{\tilde{Q}\not\subset W} Vol_n(\tilde{Q})}_{= \sum_{Q\in A} Vol_n(Q)}$$

$$\leq \varepsilon \cdot Vol(\Pi) + 2\sup_{\Pi}|f| \sum_{Q\in A} Vol_n(Q) < \varepsilon \left(Vol_n(\Pi) + 2\sup_{\Pi}|f|\right)$$

<u>Πόρισμα: 11</u>. Έστω $f: \Pi \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη και $g: \Pi \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ φραγμένη τ.ω. $f = g$ στο $\Pi \setminus A$ όπου $A \subset \Pi$ με $Vol_n(A) = 0$.

Τότε η g είναι ολοκληρώσιμη στο Π και

$$\int_\Pi g = \int_\Pi f.$$

"<u>Απόδειξη</u>": $$\left|\int_\Pi g - \int_\Pi f\right| = \left|\int_\Pi (g-f)\right| \leq \left|\int_\Pi (\sup|f| + \sup|g|)\, 1_A\right|$$

$$= c \cdot \int_\Pi 1_A = 0$$

<u>Παρατήρηση</u>: $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ασυνεχής στο $x=0$.

$\int_0^1 \frac{1}{x} = \int_0^1 g(x)$ Δ.Ο. Δεν είναι φραγμένη.

Το πρόβλημα δεν είναι η ασυνέχεια στο $x=0$.

<u>Πόρισμα 12</u> Τα πολυώνυμα είναι ολοκληρώσιμα σε $\Pi \subset \mathbb{R}^n$.

<u>Πόρισμα 13</u>. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένο υποσύνολο με ∂A να αποτελείται από τα γραφήματα πεπερασμένου πλήθους συνεχών συναρτήσεων, και $f: \bar{A} \to \mathbb{R}$ $(\bar{A} = A \cup \partial A)$ συνεχής, τότε $\int_\Pi f \cdot 1_A \, dx$ ορίζεται.