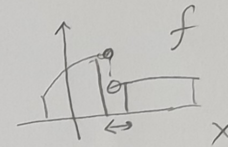
Πρόταση 4 Έστω $f:\Pi\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη στο Π. Τότε $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση $P_0(\varepsilon)$ τ.ω. αν Q_i υπορθογώνιο της $P_0(\varepsilon)$ με

$$M_{Q_i}(f)-m_{Q_i}(f)\geq\varepsilon, \quad \text{τότε}$$

$$\sum_i Vol_n(Q_i)<\varepsilon$$

* Δηλαδή, μεγάλες διακυμάνσεις μπορούν να περιοριστούν σε ορθογώνια μικρού συνολικού όγκου! όταν f ολοκληρώσιμη.



Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon>0$ και P διαμέριση του Π.

A: Τα Q για τα οποία $M_Q(f)-m_Q(f)<\varepsilon$

B: Τα Q για τα οποία $M_Q(f)-m_Q(f)\geq\varepsilon$.

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{Q\in A}\underbrace{\overset{\underset{\|}{osc_Q(f)}}{\left(M_Q(f)-m_Q(f)\right)}}_{\geq 0}Vol(Q)+\sum_{Q\in B}\underbrace{\left(M_Q(f)-m_Q(f)\right)}_{\geq\varepsilon}Vol(Q)$$

Για $\varepsilon>0$ $\exists P_0(\varepsilon)$ τ.ω. $U(f,P_0)-L(f,P_0)<\varepsilon^2$ αφού f ολοκλ.

Διαχωρίζουμε τα Q της P_0 σε κατηγορίες A & B όπως πιο πάνω.

Τότε.

$$\varepsilon\cdot\sum_{Q\in B}Vol(Q)\leq U(f,P_0)-L(f,P_0)<\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow\sum_{Q\in B}Vol(Q)<\varepsilon$$

$\square$