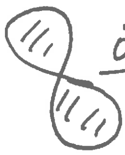
Θεώρημα Green: $\iint_{D} \leftrightarrow \int_{\partial D}$

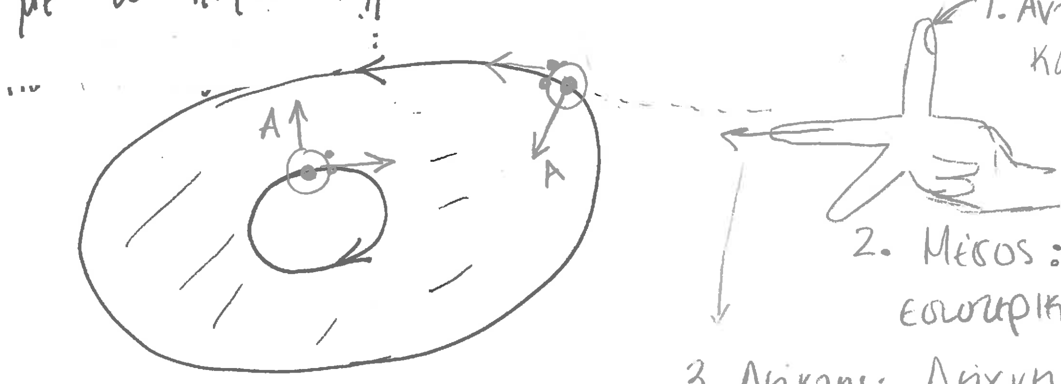
Ορισμός: Ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$ έχει κατά τμήματα ομαλό σύνορο, αν ∂D αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος απλών καμπυλών που να είναι κατά τμήματα C^1, και οι καμπύλες αυτές να είναι ανά δύο ξένες μεταξύ τους.

Αν το D είναι συνεκτικό, τότε έχει εξωτερική καμπύλη Γ και $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ εσωτερικές καμπύλες.



όχι (D ανοικτό $\Rightarrow \partial D \cap D = \emptyset$).

Παραμετρικοποιούμε κάθε τμήμα του ∂D με τέτοια φορά έτσι ώστε το D να μένει στα αριστερά μας όταν διανύουμε το ∂D με το κεφάλι προς τα πάνω: Κανόνας δεξιού χεριού:



1. Αντίχειρας: προς τα πάνω κάθετος στο χαρτί
2. Μέσος: κατεύθυνση στο εσωτερικό του D
3. Δείκτης: Δείχνει τη φορά της κίνησης στο ∂D

Η φορά της γ: ο προσανατολισμός του συνόρου

Ορισμός Το ∂D ονομάζεται θετικά προσανατολισμένο αν είναι προσανατολισμένο σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

<u>Θεώρημα Green:</u> Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, φραγμένο με ∂D κατά τμήματα ομαλό και θετικά προσανατολισμένο.
Έστω $\phi(x,y) = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ μια C^1 1-μορφή στο $\overline{D}$.

Τότε $$\int_{\partial D} \phi = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Αν $\partial D = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_N$ $\quad \int_{\partial D} \phi = \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} \phi \quad$ γ_i: με θετικό προσανατολισμό.

• Υπενθύμιση $\int_{\gamma_i} \phi$ $\quad \gamma_i : C^1$ ανεξάρτητο παραμετρικοποίησης όταν η φορά είναι η ίδια

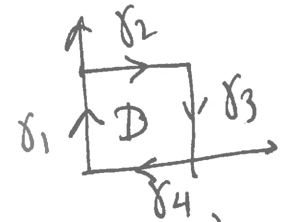
: αλλάζει μόνο πρόσημο όταν αλλάζει η φορά.

<u>Παραδείγματα:</u>

① $\vec{\gamma}$: η καμπύλη $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = R^2\}$ με φορά αντίθετη των δεικτών

$$\int_\gamma (-y\,dx + x\,dy) = \iint_D (1+1)\,dx\,dy = 2\pi R^2 \qquad D = \{x^2+y^2 \le R^2\}$$

② γ: το σύνορο του $[0,1]\times[0,1]$ με φορά των δεικτών



$$\int_\gamma (\underset{p}{y^2x^3}\,dx + \underset{q}{x^4}\,dy) = \underset{\substack{\text{αντίθετος}\\ \text{προσανατολισμός από Θ. Green}}}{-} \iint_D (4x^3 - 2yx^3)\,dx\,dy = -\int_0^1\int_0^1 (4x^3 - 2yx^3)\,dx\,dy$$

- πιο απλό παρά παραμέτρηση 4 πλευρών.

$$= -\left[x^4\Big|_0^1 \cdot y\Big|_0^1 - y^2\Big|_0^1 \frac{1}{4} x^4\Big|_0^1 \right] = -\left[1 - \frac{1}{4}\right] = -\frac{3}{4}$$

Επιβεβαίωση - επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

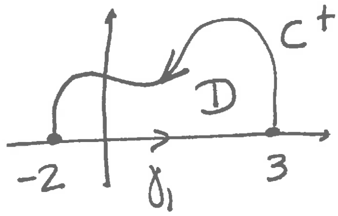
$$\gamma_1(t) = (0,0)(1-t) + (0,1)\cdot t = (0,t)$$
$$\gamma_2(t) = (0,1)(1-t) + (1,1)\cdot t = (t,1)$$
$$\gamma_3(t) = (1,1)(1-t) + (1,0)\,t = (1,1-t)$$
$$\gamma_4(t) = (1,0)(1-t) + (0,0)\,t = (1-t,0) \qquad t \in [0,1]$$

$$\int_\gamma \phi = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}\right)\phi =$$

$$= \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 t^3\,dt + \int_0^1 1(-dt) + \int_0^1 0 =$$

$$= \frac{1}{4}t^4\Big|_0^1 - t\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

③ $\int_{C^+} (x\,dx + y^2 dy)$



C^+: η πάνω καμπύλη

Green: $\iint_D (q_x - P_y)\,dxdy = \iint_D 0\,dxdy = 0 = \int_{C^+} \phi + \int_{\gamma_1} \phi \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{C^+} \phi = -\int_{\gamma_1} \phi$

$\gamma_1(t) = (-2,0)\cdot(1-t) + (3,0)\cdot t \qquad t \in [0,1]$

$= (-2+5t,\ 0)$

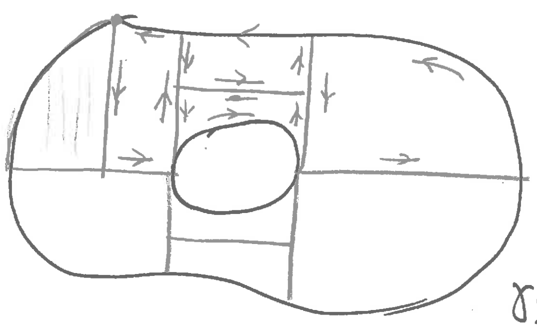
$= -\int_0^1 (-2+5t)\,5\,dt = 5\left(2t - \frac{5}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = -\frac{5}{2}$

Παρατήρηση: $\phi = d\underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3\right)}_{f}$ $\quad \therefore \int_{C^+} \phi = f(-2,0) - f(3,0) =$

$= 2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}$

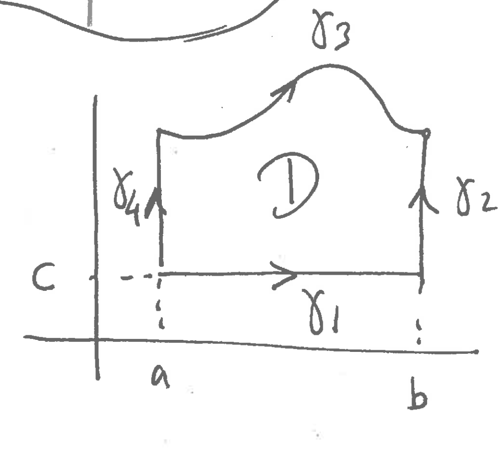
<u>Απόδειξη: Θ. Green</u>

Χωρίζουμε το D σε βασικά χωρία:



Στα εσωτερικά κοινά σύνορα ακυρώνεται το επικαμπύλιο - παραμένει μόνο στο ∂D.

<u>Βασικό χωρίο:</u>



$a \le x \le b$

$c \le y \le \phi(x)$

(Γίνεται παρόμοια για $\psi(x) \leq y \leq d$, $a \leq x \leq b$, ή για $y \in [c,d]$ κ $a \leq x \leq \psi(y)$ ή $\psi^{-1}(y) \leq x \leq b$)

Ν.Δ.Ο. $\int_{\partial D} p\,dx = \iint_D -p_y\,dx\,dy$ και $\int_{\partial D} q\,dy = \iint_D q_x\,dx\,dy$

$$\int_{\partial D} p = \int_{\gamma_1} p\,dx + \cancel{\int_{\gamma_2} p\,dx}^{\,0} - \int_{\gamma_3} p\,dx - \cancel{\int_{\gamma_4} p\,dx}^{\,0}$$

$$= \int_a^b p(t,c)\,dt - \int_a^b p(t,\phi(t))\,dt \quad (*)$$

$\gamma_1(t) = (t, c)$ $t \in [a,b]$

$\gamma_2(t) = (b, t)$ $t \in [c, \psi(b)]$

$\gamma_3(t) = (t, \psi(t))$ $t \in [a,b]$

$\gamma_4(t) = (a, t)$ $t \in [c, \psi(a)]$

$$-\iint_D p_y\,dx\,dy = -\int_a^b \int_c^{\psi(x)} \frac{\partial p}{\partial y}\,dy\cdot dx \underset{p_y\ C^0}{\overset{\text{ΘΘΑΛ}}{=}} -\int_a^b p(x,y)\Big|_{y=c}^{y=\psi(x)} dx$$

$$= -\int_a^b p(x,\psi(x))\,dx + \int_a^b p(x,c)\,dx = (*)$$

<u>Παρόμοια:</u>

$$\int_{\partial D} q\,dy = \Big(\cancel{\int_{\gamma_1}}^{\,0} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3} - \int_{\gamma_4}\Big) q\,dy =$$

$$= \int_c^{\psi(b)} q(b,t)\,dt - \int_a^b q(t,\psi(t))\,\psi'(t)\,dt - \int_c^{\psi(a)} q(a,t)\,dt = (**)$$

Παρατήρηση: $\frac{d}{dx}\Big(\int_c^{\psi(x)} q(x,y)\,dy\Big) = q(x,\psi(x))\,\psi'(x) + \int_c^{\psi(x)} q_x(x,y)\,dy$

$$\iint_D q_x\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^{\psi(x)} q_x\,dy\,dx = -\int_a^b q(x,\psi(x))\psi'(x)\,dx + \int_a^b \frac{d}{dx}\Big(\int_c^{\psi(x)} q(x,y)\,dy\Big)dx$$

$$\underset{\text{ΘΘΑΛ Ι}}{=} -\int_a^b q(x,y)\,\phi'(x)\,dx - \int_c^{\psi(a)} q(a,y)\,dy + \int_c^{\psi(b)} q(b,y)\,dy = (**)$$

$\square$

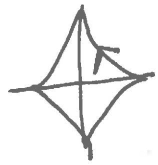
<u>Θεώρημα:</u> Έστω γ απλή κλειστή καμπύλη (χωρίς τομές) κατά τμήματα ομαλή που περικλείει τη φραγμένη περιοχή $D \subset \mathbb{R}^2$ και γ θετικά προσανατολισμένη ως προς D.

Τότε $$\mathrm{Vol}_2(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

<u>Απ.</u> Green: $$\int_{\partial D} \underset{q}{\underset{\uparrow}{x}}\,dy - \underset{p}{\underset{\uparrow}{y}}\,dx = \iint_D 2\,dx\,dy = 2\,\mathrm{Vol}_2(D).$$

<u>Παράδειγμα:</u> Υπολογίστε το εμβαδό του υποκυκλοειδούς $\{x^{2/3}+y^{2/3} \le a^{2/3}\}$

$x(\theta) = a\cos^3\theta \qquad y(\theta) = a\sin^3\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$



παραμετρικοποιεί ∂D με $\oplus$ προσαν.

$$\mathrm{Vol}_2(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\big(a\cos^3\theta\cdot 3a\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta + a\sin^3\theta\cdot 3a\cos^2\theta\cdot\sin\theta\big)\,d\theta$$

$$= \frac{3}{2}a^2\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,d\theta = \frac{3}{2}a^2\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cdot\sin^2 2\theta\,d\theta$$

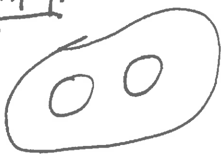
$$= \frac{3}{8}a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)\,d\theta = \frac{3}{16}a^2\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{8}a^2\pi.$$

Ή $\quad x = r\cos^3\theta \qquad y = r\sin^3\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le r \le a$

ολοκλήρωση με μετασχηματισμό για $\mathrm{Vol}_2(D)$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|dr\,d\theta$$

Παρατήρηση:



Στο $\mathbb{R}^2$ $\quad df = f_x dx + f_y dy \quad f : C^2$

Για D όπως Θ. Green

$$\int_{\partial D} df = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} f_y - \frac{\partial}{\partial y}(f_x)\right] dx\,dy = 0.$$

Επίσης $\displaystyle\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$

Πότε μπορούμε να γράψουμε μια 1-μορφή ϕ σαν $\phi = df$ (πότε η ϕ είναι ακριβής;)

$\phi = p\,dx + q\,dy = f_x dx + f_y dy \iff p = f_x$ & $q = f_y$

$\iff \exists f$ με $\left.\begin{matrix} f_x = p \\ f_y = q \end{matrix}\right\}$ - δεν έχει πάντα λύση το σύστημα. (Σ.Δ.Ε.).

Αν f C^2 τότε πρέπει $f_{xy} = f_{yx} \Rightarrow p_y = q_x$ (αναγκαία συνθήκη).

Ορισμός: Μια C^1 1-μορφή $\phi = p\,dx + q\,dy$ ονομάζεται κλειστή αν ικανοποιεί $p_y = q_x$

Παρατήρηση: ϕ ακριβής στο D : $(p = f_x$ & $q = f_y) \Rightarrow \phi$ κλειστή

ϕ κλειστή στο $D \not\Rightarrow \phi$ ακριβής.

Παράδειγμα: $\phi = \dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ $\quad C^1$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$q_x = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = p_y = \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$$

~~$\phi = df$ με $f = \arg(x,y)$ μόνο στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{$ημιευθεία$\}$~~

$q_x = p_y$ στο Π.Ο. $\Rightarrow \phi$ κλειστή στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ όχι όμως ακριβής

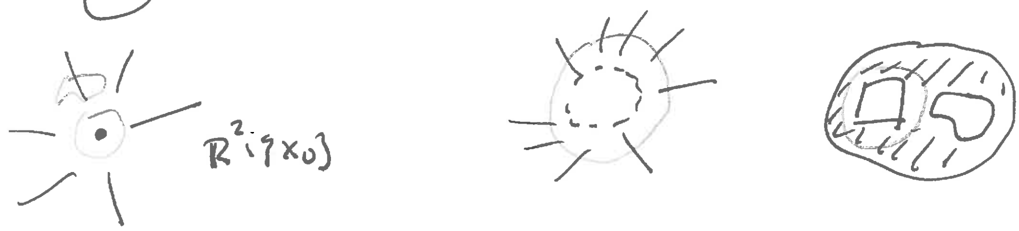
αφού $\phi = df$ με $f = \arg(x,y)$ μόνο στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{$ημιευθεία$\}$

<u>Ορισμός</u> $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι <u>απλά συνεκτικό</u> αν το εσωτερικό κάθε απλής κλειστής C^0 καμπύλης περιέχεται στο D.

• τραβάμε γ σαν λάσο και "κλείνει" σε σημείο. – D δεν έχει τρύπες.

π.χ.

: απλά συνεκτικά



: όχι απλά συνεκτικά.

<u>Θεώρημα Poincaré</u>: Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα απλά συνεκτικό σύνολο και $\phi = p\,dx + q\,dy$ μια κλειστή $(q_x = p_y)$ 1-μορφή στο D. Τότε η ϕ είναι ακριβής, δηλαδή $\phi = df$.

• Δείχνουμε ότι η $f(\vec{x}) = \int_\gamma \phi$ ανεξάρτητη του γ
  - δηλαδή καλώς ορισμένη. $\gamma(\vec{a} \to \vec{x})$
  - Η f είναι ένα δυναμικό για τη ϕ, όχι όμως μοναδικό. ($f+c$ επίσης ικανοποιεί $df = \phi$).

<u>Παραδείγματα</u>: (1) $\phi = \left(y\cos(xy) + 6xy\right)dx + \left(x\cos(xy) + 3x^2\right)dy$

$$p_y = \cos(xy) - x \cdot y\sin(xy) + 6x = q_x \quad \text{στο } \mathbb{R}^2$$

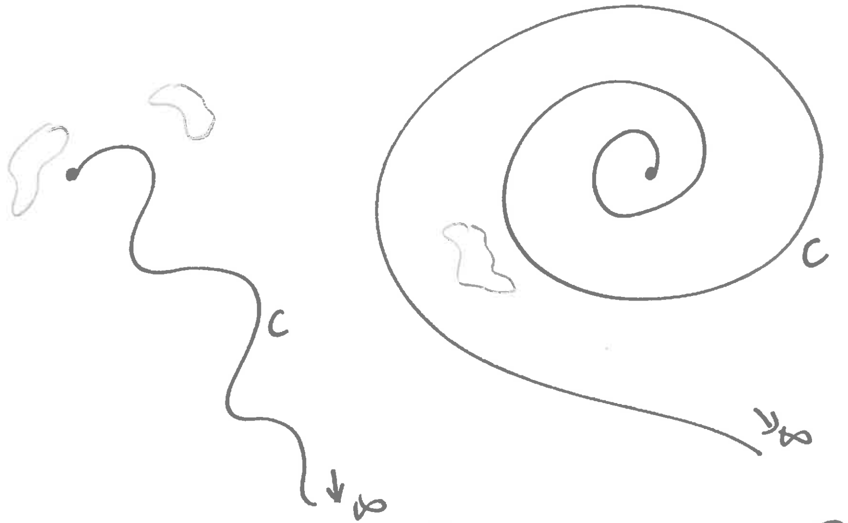
$$f = \sin(xy) + 3x^2 y \quad (+c)$$

(2) $\phi = \dfrac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \dfrac{x\,dy}{x^2+y^2}$ ικανοποιεί $p_y = q_x$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\nexists f$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ τ.ω. $df = \phi$.
(μόνο στο $\mathbb{R}^2 \setminus$ ημιευθεία)

- Το $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ δεν είναι απλά συνεκτικό και γι' αυτό δεν αναμένουμε η ϕ να είναι ακριβής.

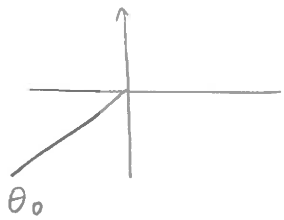
Αν όμως δούμε το $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underbrace{\text{καμπύλη από το } (0,0)}_{C} \text{ που } \to \infty\}$



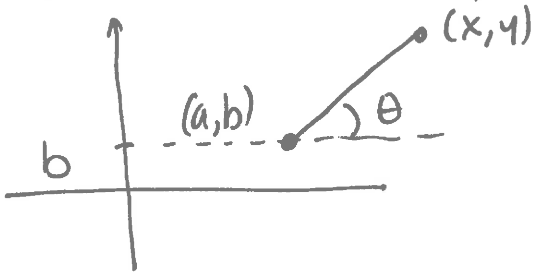
τότε αυτό το σύνολο είναι απλά συνεκτικό

Άρα από το θεώρημα Poincaré στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{C\}$ υπάρχει f τ.ω. $\phi = df$.

Αυτή η f μπορεί να είναι η $f = \arg(x,y)$ όταν C η ημιευθεία θ_0 με $\arg(x,y) \in (\theta_0, 2\pi + \theta_0)$



③ ... $\tilde{\phi} = \dfrac{-(y-b)dx + (x-a)dy}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ συμπεριφέρεται ακριβώς όπως η ϕ στο ②, αλλά γύρω από το (a,b).



Αν $\tilde{f} = \arg_{(a,b)}(x,y)$ = η γωνία θ του (x,y) με $y=b$ θετικό, τότε

$\tilde{\phi} = d\tilde{f}$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{C\}$ όπου C ημιευθεία από το (a,b). Αν θ_0 η γωνία της C, τότε $\arg_{(a,b)}(x,y) \in (\theta_0, 2\pi + \theta_0)$.

Παρόμοια: $\int_\gamma \tilde{\phi} = 2\pi$ (δείκτης της γ) για γ ~~απλή~~ κλειστή

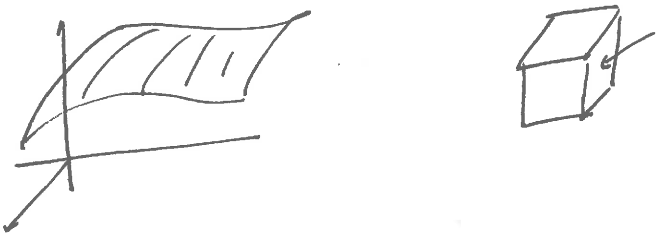
'' # περιστροφών της γ γύρω από το (a,b) $\pm$

$= 0$ αν γ δεν περικλείει το (a,b), κλειστή.

$= \tilde{f}(\gamma(b)) - \tilde{f}(\gamma(a))$ για γ που δεν τέμνει C

Επιφάνειες:

"Ορισμός" Μια επιφάνεια S στο $\mathbb{R}^n$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που τοπικά "μοιάζει" (1-1 & επί) με ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.



επιφάνεια.

όχι όμως

ή γεμάτη μπάλα

Για κάθε επιφάνεια στο $\mathbb{R}^n$ υπάρχει τοπικά μια παραμετρικοποίηση της, της μορφής:

$$T(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), \dots, x_n(u,v))$$ με $(u,v) \in G$, $G \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό. και T 1-1 και επί.

Επιφάνειες στο $\mathbb{R}^3$: $\{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \mid (u,v) \in G\}$

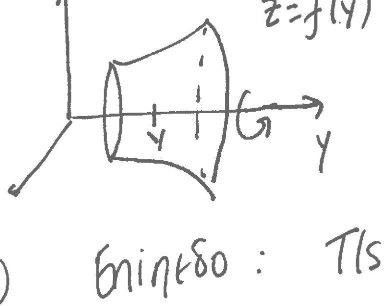
Παραδείγματα:

① $S = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in G\}$

② $S = \{(R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi) \mid (\theta,\phi) \in [0,2\pi) \times [0,\pi]\} = S^2$

$T(\theta,\phi)$ δεν είναι 1-1 σε σύνολο 2-μέτρου 0. ΟΚ. για ολοκλήρωση.

③



$S = \{(f(y)\cos\theta, y, f(y)\sin\theta) \mid y \in [a,b], \theta \in [0,2\pi)\}$

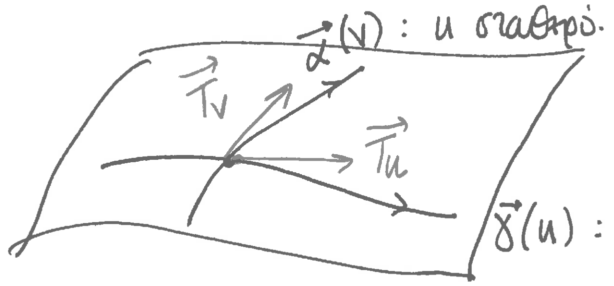
④ Επίπεδο: $T(s,t) = \vec{V_0} + t\vec{V_1} + s\vec{V_2}$ με $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ Γ.Α.

Για $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ στο $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{aligned} \vec{T}_u &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \\ \vec{T}_v &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) \end{aligned}\right\} \text{ Εφαπτόμενα διανύσματα στην } S$$

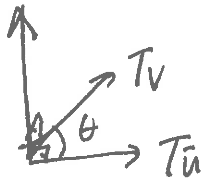
Αφού $\vec{\gamma}(u) = T(u, v_0)$ για v_0 σταθερό είναι .. καμπύλη στην S
και $\vec{\gamma}'(u) = T_u(u, v_0)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στη $\vec{\gamma}(u)$
άρα και στην S

Παρόμοια $\vec{\alpha}(v) = T(u_0, v) \subset S$ και $\vec{\alpha}'(v) = \vec{T}_v(u_0, v)$ εφάπτεται.



$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

είναι κάθετο διάνυσμα στην S με φορά που δίνεται από κανόνα δεξιού χεριού:

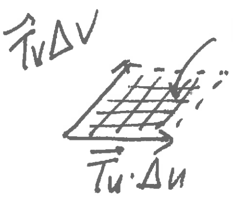


$\theta < \pi$

Υπενθύμιση: για $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ $\quad Vol_2(P(\vec{v}, \vec{w})) = \|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin\theta.$

Ολοκλήρωση συνάρτησης f στην S που είναι παραμετρικοποιημένη από T:

$$\int_S f\, d\sigma = \lim_{\substack{\|\Delta u\| \to 0 \\ \|\Delta v\| \to 0}} \sum_{\varphi} f(\xi) \, \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \cdot \Delta u \, \Delta v.$$



<u>Ορισμός:</u> Έστω S μια C^1 επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3$ με παραμετρικοποίηση $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ για $(u,v) \in G \subset \mathbb{R}^2$.
και $f: S \to \mathbb{R}$ συνεχής σ.π. στην S και φραγμένη.

Τότε $$\int_S f\, d\sigma = \iint_G f(T(u,v))\, \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|\, du\, dv$$

<u>Παρατήρηση:</u> $$\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| = \left\| \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \right\| = \sqrt{\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|^2}$$

όπου $$\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right| := \cancel{\det\begin{bmatrix} \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \\ \partial z & \end{bmatrix}} \quad \left|\det\begin{bmatrix} \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v \end{bmatrix}\right|$$

- Για $f=1$ $\int_S 1\, d\sigma := Vol_2(S)$
- Για να ορίζεται πρέπει ∂G 2-μέτρου μηδέν. Το ∂G σαν επιφάνεια, όχι στο $\mathbb{R}^3$
- $d\sigma$ ονομάζεται το στοιχείο εμβαδού $d\sigma = \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|\, du\, dv$
- $\int_S f\, d\sigma$: ανεξάρτητο της παραμετρικοποίησης!

<u>Παραδείγματα:</u>

① Σφαίρα S^2: $T(\theta,\phi) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)$ $(\theta,\phi) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$

$$\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -R\sin\phi\sin\theta & R\sin\phi\cos\theta & 0 \\ R\cos\phi\cos\theta & R\cos\phi\sin\theta & -R\sin\phi \end{vmatrix} =$$

$$= (-R^2\sin^2\phi\cos\theta, -R^2\sin^2\phi\sin\theta, -R^2\sin\phi\cdot\cos\phi)$$

$$\|\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi\| = R^2\sqrt{\sin^4\phi + \sin^2\phi\cos^2\phi} = R^2\sin\phi \quad (\geq 0 \text{ αφού } \phi \in [0,\pi])$$

$$d\sigma = R^2\sin\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$Vol_2(S^2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin\phi\, d\phi\, d\theta = 4\pi R^2$$

② S^2 σε καρτεσιανές: χρειάζεται 2 παραμετρικοποιήσεις
- Μια για βόρειο και μια για νότιο ημισφαίριο.

$$T(x,y) = (x,y, f(x,y)) \qquad f(x,y) = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

$$d\sigma = \left\| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} \right\| dx\,dy = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}\; dx\,dy$$

(ίδιος τύπος για όλες τις επιφάνειες γραφήματα μιας f).

$$f = \sqrt{R^2-x^2-y^2} \qquad d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\; dx\,dy$$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\, dx\,dy \qquad \text{ίδιο } d\sigma \text{ για } f = -\sqrt{}$$

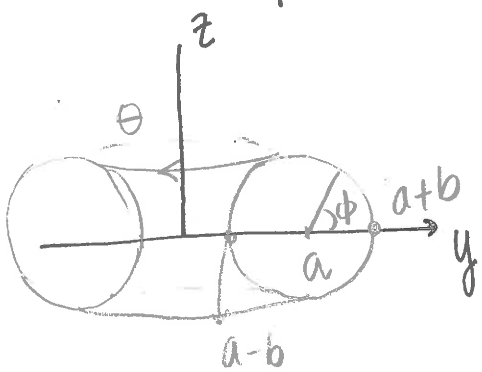
$$G = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2\}$$

$$\therefore \mathrm{Vol}_2(S^2) = 2\int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\, dy\,dx =$$

$$= 2\int_{-R}^{R} R \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\Bigg|_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} = 2R\cdot\pi\cdot\int_{-R}^{R} dx = 4\pi R^2.$$

③ Τόρος: $T = \{((a+b\cos\phi)\cos\theta,\ (a+b\cos\phi)\sin\theta,\ b\sin\phi) \mid (\theta,\phi) \in [0,2\pi)\times[0,2\pi)\}$

$a > b > 0$.



$$d\sigma = b(a+b\cos\phi)\, d\theta\, d\phi$$

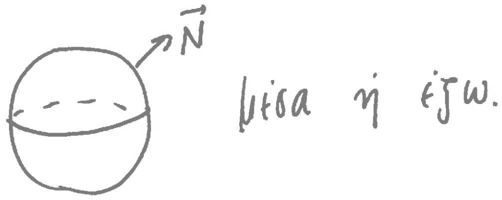
$$\therefore \mathrm{Vol}_2(T) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a+b\cos\phi)\, d\theta\, d\phi = 4\pi^2 a\cdot b.$$

Ολοκλήρωση Διανυσματικών πεδίων/ 2-μορφών σε επιφάνειες

Για παραμετρικοποιημένη επιφάνεια S που δίνεται από $T(u,v)$ στο $\mathbb{R}^3$:

$\vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$: κάθετο διάνυσμα στην S

Το $\vec{N}$ δίνει προσανατολισμό στην S, στην κατεύθυνση $\vec{N}$.



<u>Ορισμός:</u> Έστω F διαν. πεδίο στην επιφάνεια S, η οποία παραμετρικοποιείται από $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ με $T: G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ C^1 και τ.ω. T 1-1 και $\vec{T}_u \times \vec{T}_v \neq \vec{0}$ σ.π., με ∂G μηδενικού 2-μέτρου.

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διαν. πεδίου $\vec{F}$ στην S με προσανατολισμό που δίνεται από την T ορίζεται ως:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_G \vec{F}(T(u,v)) \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v)\, du\, dv \left(= \iint_G \vec{F} \cdot \underbrace{\frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|}}_{} \cdot \underbrace{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|\, du\, dv}_{d\sigma} \right)$$

$\hat{N}$: μοναδιαίο, $\parallel \vec{N}$

Το πιο πάνω ολοκλήρωμα δίνει τη <u>ροή</u> του διαν. πεδίου $\vec{F}$ διαμέσου της επιφάνειας S.

Αν $\vec{F} = (P, Q, R)$ τότε

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_S P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$$

$$\begin{array}{ccc} & & x \\ & \nearrow & \downarrow \\ z & \leftarrow & y \end{array}$$

όπου $\omega = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$ μια 2-μορφή τ.ω.

$$\omega(T(u,v)) = P(T(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right] + Q(T(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right] + R(T(u,v)) \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]$$

Δηλαδή ορίζουμε

$$dy\wedge dz\,(T(u,v)) = \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right] \quad \left(= \det\begin{bmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}\right)$$

$$dz\wedge dx\,(T(u,v)) = \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]$$

$$dx\wedge dy\,(T(u,v)) = \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]$$

και $dy\wedge dz = -dz\wedge dy$, $\quad dz\wedge dx = -dx\wedge dz \quad dx\wedge dy = -dy\wedge dx$

επί $dx\wedge dx = dy\wedge dy = dz\wedge dz = 0$.

Η σειρά έχει σημασία!

• Παρατήρηση: $\vec{T}_u \times \vec{T}_v = -\vec{T}_v \times \vec{T}_u$

Άρα αν $\tilde{T}(v,u) = T(u,v)$ τότε

$\tilde{N} = \vec{T}_v \times \vec{T}_u = -\vec{T}_u \times \vec{T}_v = -\vec{N}$: αντίθετος προσανατολισμός

-αλλάζει το πρόσημο της ροής.

Παραδείγματα:

① $T(u,v) = \{ (u,v,1) \mid (u,v) \in \mathbb{R}^2 \}$

$\Phi(u,v) = \{ (v,u,1) \mid (u,v) \in \mathbb{R}^2 \}$

$\vec{T}_u = (1,0,0) = \hat{\imath}$ $\quad \vec{T}_v = (0,1,0) = \hat{\jmath}$ $\quad \vec{N}_T = \vec{T}_u \times \vec{T}_v = \hat{k}$

$\vec{\Phi}_u = (0,1,0) = \hat{\jmath}$ $\quad \vec{\Phi}_v = (1,0,0) = \hat{\imath}$ $\quad \vec{N}_\Phi = \vec{\Phi}_u \times \vec{\Phi}_v = -\hat{k}$

$\updownarrow$ αντίθετος προσανατολισμός.

Γενικά αντιαλλαγή $u \Leftrightarrow v$ αλλάζει τον προσανατολισμό.

② S: η επιφάνεια του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ με $(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$, προσανατολισμένη προς τα πάνω.

Υπολογίστε $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ όπου $\vec{F}(x,y,z) = (x, -y, xz)$

(Ισοδύναμα: υπολογίστε $\iint_S x\, dy \wedge dz - y\, dz \wedge dx + xz\, dx \wedge dy$)

$T(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$

$T_u = (1,0,2u)$ $\quad T_v = (0,1,2v)$ $\quad \vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1)$

$\uparrow$ πάνω!!

$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [u \cdot (-2u) - v \cdot (-2v) + u(u^2+v^2) \cdot 1] \, du\, dv = (*)$

Αν θέλαμε S προσανατολισμένη προς τα κάτω, τότε

$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = -(*)$ $\quad$ παίρνουμε το $-\vec{N}$.

- Άρα δε χρειάζεται να ξαναπαραμετρικοποιήσουμε για το σωστό προσανατολισμό - αλλάζουμε μόνο το πρόσημο.

③ $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ $\vec{F}=(x,y,z)$ $S=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=R^2\}$
προσανατολισμένη προς τα έξω.

$$T(\theta,\phi)=(R\sin\phi\cos\theta,\ R\sin\phi\sin\theta,\ R\cos\phi)$$

$$\vec{N}=\vec{T}_\theta\times\vec{T}_\phi=\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -R\sin\phi\sin\theta & R\sin\phi\cos\theta & 0 \\ R\cos\phi\cos\theta & R\cos\phi\sin\theta & -R\sin\phi \end{vmatrix}=$$

$$=-R^2\sin\phi(\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi).$$

$\phi=0,\pi$ μηδενίζεται $\phi=\frac{\pi}{2}$ $\theta=0$: $\vec{N}=-R^2(1,0,0)$
μέσα!!

- $\vec{N}$: συνεχές διαν. πεδίο που μηδενίζεται μόνο στους πόλους, άρα βλέπει πάντα προς τα μέσα.

$$\therefore \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=-\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\vec{F}(T(\theta,\phi))\cdot\vec{N}(\theta,\phi)\,d\theta d\phi=$$

$$=-\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[R\sin\phi\cdot\cos\theta(-R^2)\sin^2\phi\cos\theta+R\sin\phi\sin\theta\cdot(-R^2)\cdot\sin^2\phi\cdot\sin\theta + R\cos\phi(-R^2)\cdot\sin\phi\cdot\cos\phi\right]d\theta d\phi=$$

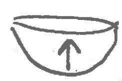
$$=R^3\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\phi\,d\theta d\phi=4\pi R^3.$$

2ος τρόπος: $\Phi_1(x,y)=(x,y,\underbrace{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}_{f})$ $\Phi_2(x,y)=(x,y,-\sqrt{R^2-x^2-y^2})$

$$\vec{N}=\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix}=(-f_x,\ -f_y,\ 1)$$

$N_1=\left(\frac{+x}{\sqrt{\ }},\frac{+y}{\sqrt{\ }},1\right)$ ↑ έξω

$\vec{N}_2=\left(\frac{-x}{\sqrt{\ }},\frac{-y}{\sqrt{\ }},1\right)$



μέσα.

$$\therefore \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2\le R^2} F(\Phi_1(x,y))\cdot \overline{N_1} - \iint_{x^2+y^2\le R^2} F(\Phi_2(x,y))\cdot \overline{N_2}\, dx\,dy$$

πιο εύκολο να ~~...~~ υπολογιστεί σε πολικές με αλλαγή μεταβλητών (όχι προσήμου). $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

$$= 2\int_0^R \int_0^{2\pi} \left((r\cos\theta)^2 \frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}} + (r\sin\theta)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}} + \sqrt{R^2-r^2} \right) r\, d\theta\, dr$$

είναι ίσα τα δύο ολοκληρώματα με αντίθετο πρόσημο.

$$= 4\pi \cdot \int_0^R \frac{R^2}{\sqrt{R^2-r^2}} \cdot r\, dr = 4\pi R^2 \cdot (R^2-r^2)^{1/2}\, 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)\Big|_0^R = 4\pi R^3.$$

<u>Θεώρημα:</u> Αν $\Phi_1 : G_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ και $\Phi_2 : G_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ δύο παραμετρικοποιήσεις μιας επιφάνειας S, με τον ίδιο προσανατολισμό $(\vec{N_1}\cdot\vec{N_2} > 0)$ τότε

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{G_1} \vec{F}(\Phi_1(u,v)) \cdot \vec{N_1}\, du\,dv = \iint_{G_2} \vec{F}(\Phi_2(u,v)) \cdot \vec{N_2}\, du\,dv$$

- Το επιφανειακό ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από την παραμετρικοποίηση
- Αν ο προσανατολισμός είναι αντίθετος τότε αλλάζει μόνο το πρόσημο.
- Μιλούμε για Φ_i & $\vec{F}$ τ.ω. τα ολοκληρώματα να ορίζονται.
- & ∂G_i 2-μέτρου 0.

Το Θεώρημα Stokes: ΘΘΑΛ για επιφανειακά ολοκληρώματα

$$\int_a^b \underbrace{dF}_{\text{1-μορφή}} \left(= \int_a^b F'(x)\,dx\right) = F(b) - F(a)$$

συνάρτηση στο σύνορο. $\{a,b\} = \partial([a,b])$
προσανατολισμός από το a στο b.

Stokes: $\displaystyle\iint_S \underbrace{\omega}_{\text{2-μορφή}} = \int_{\partial S} \underbrace{\phi}_{\text{1-μορφή}}$ όταν $\omega = d\phi$ ακριβής.

Έστω S επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3$ με προσανατολισμό που δίνεται από μη-μηδενικό κάθετο διαν. πεδίο $\vec{N}$, και το ∂S: αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό κατά τμήματα C^1 καμπυλών.

Ο επαγόμενος προσανατολισμός στο ∂S από τον δεδομένο προσανατολισμό της S γίνεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπου τώρα η κατεύθυνση του κεφαλιού (αντίχειρα) είναι προς το $\vec{N}$.