Σχέση Παραγώγου με Ολοκλήρωμα:

$f:(\vec{x},y): \bar{D}\times I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\bar{D}\times I \subset \mathbb{R}^{n-1}\times \mathbb{R}$

$\bar{D}\subset \mathbb{R}^{n-1}$ & $I=(a,b)\subset \mathbb{R}$

Τότε $F(y)=\int_{\bar{D}} f(\vec{x},y)\,|d^{n-1}\vec{x}|$ είναι συνεχής.

Αν $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχής στο I, τότε

η $F'(y)$ ορίζεται ~~και~~ είναι συνεχής στο I και

$$F'(y)=\int_{\bar{D}} \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x},y)\,|d^{n-1}\vec{x}| \quad \text{για} \quad x\in I.$$

Παράδειγμα: $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t,x)\,dt\right)$

Έστω $G(x,u)=\int_0^u f(t,x)\,dt$.

Τότε $\frac{\partial G}{\partial x}=\int_0^u f_x(t,x)\,dt$ από πιο πάνω

$\frac{\partial G}{\partial u}=f(u,x)$ από ΘΘΑΛ.

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t,x)\,dt\right)=\frac{d}{dx}\big(G(x,x)\big)= \text{κανόνας αλυσίδας}$$

$$=\left[\frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}\right]_{u=x}=$$

$$=\int_0^x f_x(t,x)\,dt+f(x,x)$$

Παρόμοια $\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t,x)\,dt\right)=\frac{d}{dt}\big(G(x,g(x))\big)=\int_a^{g(x)} f_x(t,x)\,dt+f(g(x),x)\cdot g'(x)$

Καμπύλη:

Μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο το οποίο μπορεί να δοθεί σαν $C=\{\vec{\gamma}(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\dots,\gamma_n(t)) \mid t\in[a,b]\subset\mathbb{R}\}$ με $\vec{\gamma}(t): I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ μια συνεχής διανυσματική συνάρτηση.

Η $\vec{\gamma}(t)$: ονομάζεται παραμετρικοποίηση της C.
Δεν είναι μοναδική.
Αν π.χ. $\alpha(s): J \to I=[a,b]$ -επί, 1-1 και

$\tilde{\vec{\gamma}}(s)=\vec{\gamma}\circ\alpha(s): J\to C\subset\mathbb{R}^n$ είναι μια άλλη παραμετρικοποίηση της C.

1 ελεύθερη μεταβλητή t : η εικόνα είναι καμπύλη.

Παραδείγματα:

① $\vec{\ell}(t)=\vec{v_0}+t\vec{v}=(v_{0,1}+tv_1,\ \dots,\ v_{0,n}+tv_n)$: ευθεία στο $\mathbb{R}^n$

② $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=R^2\}$ κύκλος

$\vec{\gamma}_1(t)=(R\cos t,\ R\sin t)$ 

$\vec{\gamma}_2(t)=(R\sin t,\ R\cos t)$ 

$\vec{\gamma}_3(t)=(R\sin(t^2),\ R\cos(t^2))$

③ $C=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$ έλλειψη

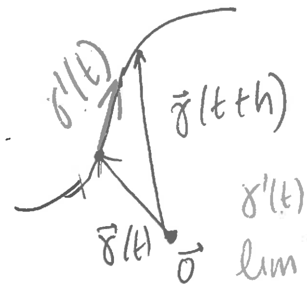
$\vec{\gamma}(t)=(a\cdot\cos t,\ b\sin t)$.

$\vec{\gamma}(t)$: Δείχνει τον τρόπο με τον οποίο διανύουμε την καμπύλη

$\vec{\gamma}'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$: διάνυσμα ταχύτητας.

$\vec{\gamma}'(t)$: εφαπτόμενο διαν. στην καμπύλη στο $\vec{\gamma}(t)$.

$\vec{\gamma}''(t) = (\gamma_1''(t), \dots, \gamma_n''(t))$: επιτάχυνση.



$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)}{h}$

Απειροστικός ΙΙΙ:

- Αν $\|\vec{\gamma}\| = c$ σταθερά $\Rightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} = c^2 \ \forall t$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma}) = 0 \Rightarrow \vec{\gamma}'(t) \cdot \vec{\gamma}(t) = 0 \Rightarrow \vec{\gamma}' \perp \vec{\gamma}$$

(παρόμοια αν $\|\gamma'\| = c \Rightarrow \vec{\gamma}' \cdot \vec{\gamma}''(t) = 0 \Rightarrow \vec{\gamma}' \perp \vec{\gamma}''$ κεντρομόλος επιτάχυνση.

- Το μήκος τόξου καμπύλης $\vec{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n$, C^1, για $t \in [a,b]$ είναι $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$

$$\Delta L = \sqrt{\sum (\Delta x_i)^2} = \sqrt{\sum \left(\frac{\Delta \gamma_i}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$

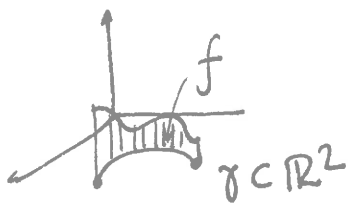
Ορισμός: Για $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ C^1 καμπύλη και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τ.ω. $f \circ \gamma(t)$ να είναι συνεχής σχεδόν παντού στο I και φραγμένη ορίζουμε

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \, \|\vec{\gamma}'(t)\| \, dt$$

Ο μέσος όρος της f στη γ δίνεται από $\frac{\int_\gamma f}{\int_\gamma 1} = \frac{\int_\gamma f}{L(\gamma)}$

π.χ.: f θερμοκρασία στο $\mathbb{R}^3$.

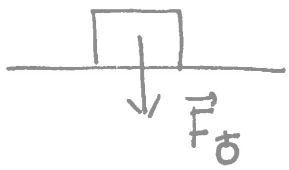
$\int_\gamma f$: το εμβαδό της επιφάνειας στο $\mathbb{R}^{n+1}$ πάνω από τη γ με ύψος f



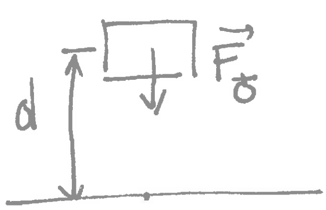
Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα:

Θέλουμε να πάρουμε διαστημόπλοιο από τη γη στο διάστημα. πόση ενέργεια/καύσιμα χρειαζόμαστε; = τόσο όσο το έργο που ασκεί το βαρυτικό πεδίο της γης στο σώμα - εξαρτάται από την πορεία του διαστημοπλοίου.

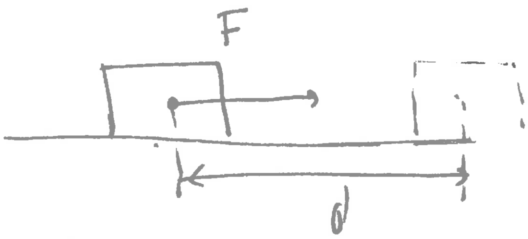
Φυσική:



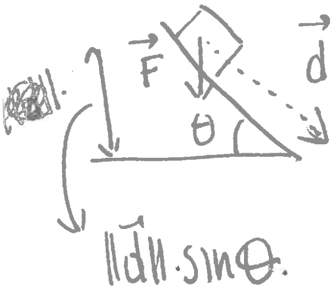
Η $\vec{F}$ δεν παράγει έργο στο σώμα.



Η $\vec{F}$ παράγει έργο στο σώμα $F \cdot d$ (το επιταχύνει). για F σταθερή



Η $\vec{F}$ (όχι βαρύτητα - το σπρώχνω) παράγει έργο στο σώμα $F \cdot d$



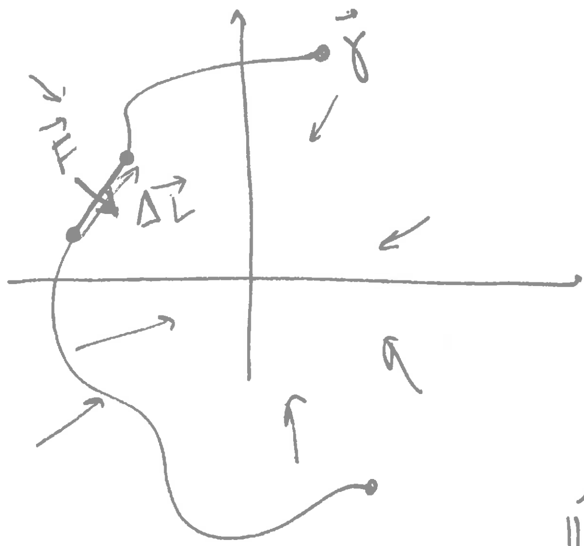
Έργο $E = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \sin\theta$

(για $\vec{F}$ = σταθερά).

Για $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια διανυσματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$ (βαρυτικό πεδίο π.χ).

$$\vec{F}(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$$

$$\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$



Σωματίδιο που κινείται στη $\vec{\gamma}$. (με ταχύτητα $\vec{\gamma}'$) - προκαθορισμένο.

Το συνολικό έργο που ασκεί το διαν. πεδίο $\vec{F}$ στο σωματίδιο

$$\lim_{\|\Delta L\| \to 0} \sum_{Q} \vec{F}(\xi) \cdot \vec{\Delta L}$$

$$(\vec{F} \cdot \vec{d})$$

$$\vec{\Delta L} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) = \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t}, \dots, \frac{\Delta x_n}{\Delta t}\right) \cdot \Delta t$$

- μετατόπιση σε μικρό διάστημα χρόνου Δt

$$\therefore E = \lim_{\|\Delta t\| \to 0} \sum_{Q} \underset{\substack{\uparrow \\ \in \vec{\gamma}(t)}}{\vec{F}(\xi)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t}, \dots, \frac{\Delta x_n}{\Delta t}\right)}_{\downarrow\ \vec{\gamma}'(t) \text{ όταν } \Delta t \to 0} \cdot \Delta t$$

$$= \int_a^b \underbrace{\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)}_{\text{βαθμωτή}} \, dt$$

Ορισμός:

Έστω $\vec{F}$ μια φραγμένη διανυσματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$ και $\vec{\gamma}$ μια C^1 καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$ για $t \in [a,b]$.
Αν η $\vec{F}(\vec{\gamma}(t))$ είναι σχεδόν παντού συνεχής στο $[a,b]$, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{F}$ στη $\vec{\gamma}$ ορίζεται ως:

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} := \int_a^b \left(\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\right) dt.$$

($d\vec{r}$ ή $d\vec{s}$ - καμία σχέση με πολικές).

- Δίνει το έργο που παράγει η $\vec{F}$ πάνω στη $\vec{\gamma}$.

Συμβολισμός με διαφορικές Μορφές:

$$\vec{\gamma}(t) = (\underset{\substack{\uparrow \\ x_1}}{\gamma_1(t)}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ x_n}}{\gamma_n(t)})$$

dx_i: το διαφορικό της συντεταγμένης x_i

Αν $x_i = \gamma_i(t)$ τότε $dx_i = \gamma_i'(t)\, dt$

ή διαφορικά γραφωμένο $dx_i(\vec{\gamma}(t)) = \gamma_i'(t)$

πάνω στη

Άρα: $$\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) = \sum_{i=1}^{n} F_i(\vec{\gamma}(t)) \cdot \gamma_i'(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F_i(\vec{\gamma}(t)) \cdot dx_i(\vec{\gamma}(t))$$

$$:= \sum_{i=1}^{n} (F_i\, dx_i)(\vec{\gamma}(t))$$

Η έκφραση $\sum_{i=1}^{n} F_i \, dx_i$ είναι μια διαφορική μορφή τάξης 1 στο $\mathbb{R}^n$.

<u>Ορισμός:</u> $\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, dx_i$ για $\phi_1, \dots, \phi_n$ βαθμωτές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται διαφορική μορφή τάξης 1 στο $\mathbb{R}^n$.

Η ϕ είναι C^k αν $\phi_1, \dots, \phi_n$ είναι C^k.

Αν $\vec{\gamma}(t)$ είναι καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\phi(\vec{\gamma}(t)) := \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t).$$

<u>Ορισμός:</u> Αν $\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, dx_i$ μια 1-διαφορική μορφή στο $\mathbb{R}^n$ και $\vec{\gamma}$ μια C^1 παραμετρικοποιημένη καμπύλη για $t \in [a,b]$ τότε ορίζουμε:

$$\int_\gamma \phi = \int_a^b \phi(\vec{\gamma}(t)) \, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\vec{\gamma}(t)) \cdot \gamma_i'(t) \, dt$$

ϕ: ολοκληρώσιμη στην γ αν. το πιο πάνω ορίζεται

ανν $\phi(\vec{\gamma}(t))$ είναι συνεχής σ.π. στο $[a,b]$.

<u>Αντιστοιχία:</u>

$\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x}))$ διαν. πεδίο στο $\mathbb{R}^n$

$\updownarrow$

$W_{\vec{F}} = \sum_{i=1}^{n} F_i(\vec{x}) \, dx_i$ 1-διαφορ. μορφή στο $\mathbb{R}^n$.

Άρα $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv \int_\gamma W_{\vec{F}}$

Παραδείγματα:

① Υπολογίστε το έργο που παράγει το δ.π.
$\vec{F}(x,y)=(-y,x)=-y\hat{\imath}+x\hat{\jmath}$ πάνω σε σωμάτιο που
κινείται στην καμπύλη $\vec{\gamma}(t)=(R\cos t, R\sin t)$ $t\in[0,2\pi]$

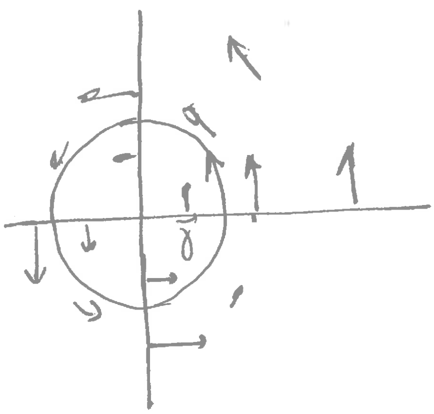
$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\vec{F}(R\cos t, R\sin t))\cdot(-R\sin t, R\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-R\sin t, R\cos t)\cdot(-R\sin t, R\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} +R^2\,dt = 2\pi R^2.$$

- Ισοδύναμα: $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma w_{\vec{F}} = \int_\gamma -y\,dx + x\,dy =$

$$= \int_0^{2\pi} [(-R\sin t)\cdot(R\cos t)' + (R\cos t)\cdot(R\sin t)']\,dt$$



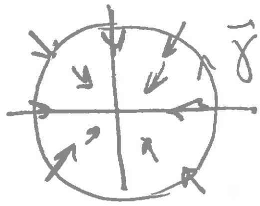
Θετικό έργο → δίνει ενέργεια στο σωματίδιο.

Αν $\beta(t)=(R\sin t, R\cos t)$ 

$$\int_\beta \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\beta [-(R\cos t)^2-(R\sin t)^2]\,dt = -2\pi R^2$$

παίρνει ενέργεια.

② ίδια $\vec{\gamma}$



$$\int_\gamma \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx - \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{(-R\cos t)(-R\sin t)}{R^3} - \frac{(R\sin t)(R\cos t)}{R^3} \right] dt = 0$$

$\vec{F} \perp \vec{\gamma}'$ - δεν παράγει έργο. - κάθετη στην κατεύθυνση κίνησης.

③ $\int_\gamma x\,dz + dy$ γ: ευθύγραμμο τμήμα από το $(1,2,0)$ στο $(3,5,1)$ στο $\mathbb{R}^3$

$$\vec{\gamma}(t) = (1-t)(1,2,0) + t(3,5,1) = (1+2t,\ 2+3t,\ t) \quad t \in [0,1]$$

$$\int_\gamma x\,dz + dy = \int_0^1 \left[(1+2t)\cdot \quad + 3\right] dt = \left[4t+t^2\right]_0^1 = 5.$$

Ιδιότητες επικαμπύλιου ολοκληρώματος:

① Αν $\phi=\phi_1+\phi_2$ ϕ_1,ϕ_2 1-μορφές στο $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\int_\gamma \phi = \int_\gamma \phi_1 + \int_\gamma \phi_2$$

② Αν $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ τότε $\tilde{\gamma}(t)=\gamma\left(\frac{t-a}{b-a}\cdot a+\frac{b-t}{b-a}\cdot b\right)$ για $t\in[a,b]$ πάει από το $\gamma(b)$ στο $\gamma(a)$ $(\tilde{\gamma}=-\gamma)$ και $\int_{\tilde{\gamma}}\phi=-\int_\gamma\phi$ για οποιαδήποτε ϕ που είναι C^1 στη γ.

③ Αν γ είναι συνεχής και τμηματικά C^1, τότε $\int_\gamma \phi=\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\phi$

④ Έστω $\psi:[a_0,b_0]\to[a,b]$ μια απεικόνιση η οποία είναι αύξουσα $(\psi'>0)$ με $\psi(a_0)=a$ και $\psi(b_0)=b$.
Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ C^1 καμπύλη. Η καμπύλη $\tilde{\gamma}(s)=\gamma(\psi(s)):[a_0,b_0]\to\mathbb{R}^n$ ονομάζεται αναπαραμέτρηση της γ που διατηρεί τον προσανατολισμό.

Τότε: $\int_\gamma\phi=\int_{\tilde{\gamma}}\phi$.

Αποδείξεις:

① ✓, ③ ✓

② $\tilde{\gamma}'(t)=\gamma'\Big(\overbrace{\frac{t-a}{b-a}\cdot a+\frac{b-t}{b-a}\cdot b}^{u(t)}\Big)\cdot\left(\frac{a}{b-a}-\frac{b}{b-a}\right)=-\gamma'\left(\frac{t-a}{b-a}a+\frac{b-a}{b-a}b\right)$

$$\therefore \int_{\tilde{\gamma}}\phi=\int_a^b\phi(\tilde{\gamma}(t))\,dt=\int_a^b\sum_{i=1}^{n}\phi_i(\tilde{\gamma}(t))\cdot\tilde{\gamma}_i'(t)\,dt=$$

$$=\int_a^b\sum_{i=1}^{n}-\phi_i(\gamma(u(t)))\cdot\gamma_i'(u(t))\cdot dt$$

$s=u(t)$ $ds=u'(t)\cdot dt=-dt$
$t=a\Rightarrow s=b=u(a)$
$t=b\Rightarrow s=a=u(b)$

$$=\int_{u(a)}^{u(b)}\sum_{i=1}^{n}\phi_i(\gamma(s))\cdot\gamma_i'(s)\,ds=-\int_a^b\sum_{i=1}^{n}\phi_i(\gamma(s))\cdot\gamma_i'(s)\,ds=-\int_\gamma\phi.$$

(4) $$\int_{\tilde{\gamma}} \phi = \int_{a_0}^{b_0} \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\tilde{\gamma}(s)) \cdot \tilde{\gamma}_i'(s) \cdot ds =$$

$$= \int_{a_0}^{b_0} \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\gamma(\psi(s))) \cdot \gamma_i'(\psi(s)) \cdot \underbrace{\psi'(s)\, ds}_{du}$$

$u = \psi(s)$

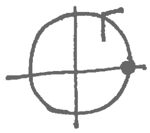
$s = a_0 \to u = a$

$s = b_0 \Rightarrow u = b$

$$= \int_{u(a_0)=a}^{u(b_0)=b} \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\gamma(u)) \cdot \gamma_i'(u)\, du = \int_{\gamma} \phi .$$

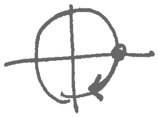
<u>Παράδειγμα</u>: ① $C = \{x^2+y^2 = R^2\}$ $\qquad \phi = -y\,dx + x\,dy$

$\vec{\gamma}(t) = (R\cos t, R\sin t)$



$$\int_{\gamma} \phi = 2\pi R^2$$

$\tilde{\gamma}(t) = (R\cos t, -R\sin t)$



$$\int_{\tilde{\gamma}} \phi = \int_0^{2\pi} [-(R\sin t)^2 - (R\cos t)^2]\, dt = -2\pi R^2 \qquad \tilde{\gamma} = -\gamma$$

$\vec{\tilde{\gamma}}(t) = (R\cos(2t), R\sin(2t)) \quad t \in [0, \pi]$

$$\int_{\tilde{\gamma}} \phi = \int_0^{\pi} 2(R\sin(2t))^2 + 2(R\cos(2t))^2\, dt = 2\int_0^{\pi} R^2\, dt = 2\pi R^2 = \int_{\gamma} \phi$$

$\tilde{\gamma}$: αναπαραμέτρηση της γ με τον ίδιο προσανατολισμό.

- $\int_{\gamma} \phi$: λαμβάνει υπόψην τη φορά της κίνησης πάνω στη γ.

Απειρ. ΙΙ: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

- Για $\int_D f\, |d^n x|$ δεν υπάρχει η έννοια της φοράς
- Υπάρχει ΘΘΑΛ; π.χ. $\iint_D F_x\, (dx\, dy) \stackrel{?}{=} \int_C F \qquad C$: σύνολο 1 διάστασης;

Υπενθύμιση:

Ορισμός: Έστω $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ C^1 συνάρτηση. Το διαφορικό της f είναι η 1-μορφή:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n=W_{\vec{\nabla f}}$$

όπου $\vec{\nabla f}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ η κλίση της f.

$\vec{\nabla f}$: μπορεί να θεωρηθεί και ως διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός Μια C^0 1-μορφή ϕ για την οποία υπάρχει C^1 συνάρτηση τ.ω. $\phi=df$ στο π.ο. της Ω, λέγεται ακριβής στο Ω.

- Αν $\vec{F}$ C^0 διανυσματικό πεδίο και $\vec{F}=\vec{\nabla f}$ το $\vec{F}$ ονομάζεται συντηρητικό δ.π. και η f το δυναμικό του $\vec{F}$

$$\vec{F}=\vec{\nabla f}\iff W_{\vec{F}}=df.$$

$\vec{F}=\vec{\nabla f_1}$ και $\vec{F}=\vec{\nabla f_2}$ σε Ω, συνεκτικό
ανν $f_1=f_2+c$.

Θεώρημα: Έστω $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ C^1, D ανοικτό και $\gamma:[a,b]\to D$ κατά τμήματα C^1.
Τότε

$$\int_\gamma df=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$$

Απόδειξη: Για γ C^1 στα $[a_i,a_{i+1}]$ με $a_0=a<a_1<\dots<a_N=b$

$$\int_\gamma df=\sum_{i=0}^{N-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}df(\gamma(t))\,dt=\sum_{i=1}^{N-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\underbrace{\sum_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma_i(t))\cdot\gamma_j'(t)}_{\text{“}\frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))\text{ καν. αλυσίδα}}\,dt$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\frac{d}{dt}\big(f(\gamma(t))\big)\,dt\underset{\text{ΘΘΑΝΙΙ}}{=}\sum_{i=0}^{N-1}\big[f(\gamma(a_{i+1}))-f(\gamma(a_i))\big]=$$

$$=f(\gamma(b))-f(\gamma(a)).$$

$\square$

Αν γ κλειστή καμπύλη $[\,\gamma(a)=\gamma(b)\,]$

τότε $\int_\gamma df = 0$.

Παραδείγματα:

① γ: έλλειψη ; με αντίθετη φορά δεικτών. $\{2x^2+y^2=1\}$

γ' $\quad \gamma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ \sin t\right) \quad t\in[0,2\pi]$.

$$\int_\gamma (3x^2+y)\,dx + x\,dy = \int_\gamma d(x^3+xy) = 0$$ αφού γ κλειστή & ϕ ακριβής.

$$\left.\begin{aligned} &3x^2+y = f_x \Rightarrow f = x^3+xy+g(y) \\ &x = f_y = x+g'(y) \Rightarrow g'(y)=0 \Rightarrow g=c \end{aligned}\right\} f = x^3+xy+\underline{c}$$

② $$\phi = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

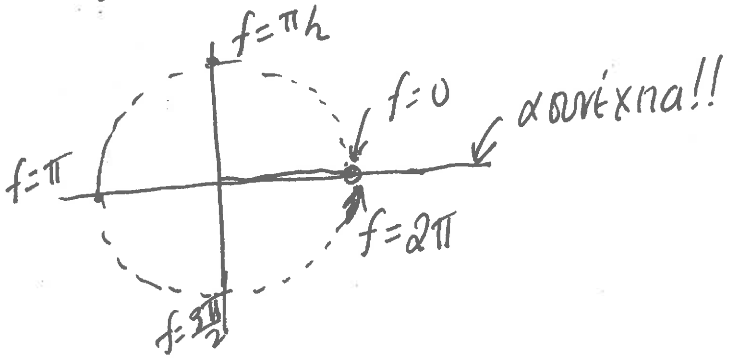
$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) \quad t\in[0,2\pi]$

$$\int_\gamma \phi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{+(R\sin t)^2}{R^2} + \frac{(R\cos t)^2}{R^2}\right]dt = 2\pi \neq 0$$

$\therefore\ \phi \neq df$ αφού $\int_\gamma \phi \neq 0$ με γ κλειστή.

Παρατήρηση: $$d\Big(\underbrace{\arctan\left(\tfrac{y}{x}\right)}_{f}\Big) = \frac{-y/x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dx + \frac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dy = \phi\,!!$$

Όμως η f δεν είναι C^1 σε ανοικτό D γύρω από την καμπύλη γ - δεν είναι καν C^0:

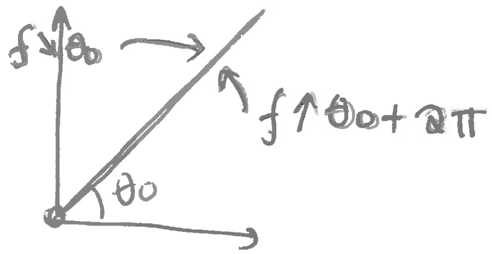


$\arctan\frac{y}{x} \rightarrow$ επεκτείνεται ως $\arg(x,y) = f$ για $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\,|\,x\geq 0\}$

η οποία είναι C^1 σε αυτό το χωρίο.

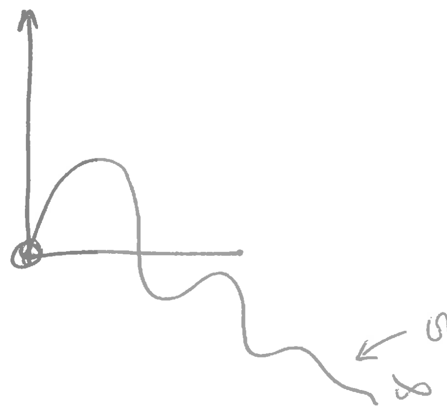
$f = \arg(x,y)$: η συνεχής επέκταση της $\arctan(\frac{y}{x})$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$.

. θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε συνεχώς την f σε οποιοδήποτε σύνολο της μορφής $\mathbb{R}^2 \setminus \{$ακτίνα από το $(0,0)\}$

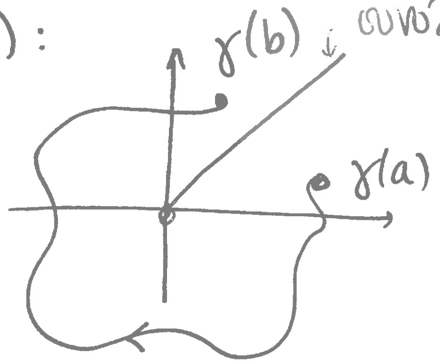


- ασυνέχεια της f στην ακτίνα γωνίας θ_0.

· Επίσης θα μπορούσε να επεκταθεί συνεχώς σε χωρίο της μορφής $\mathbb{R} \setminus C$ όπου C καμπύλη από το $(0,0)$ που τείνει στο ∞.



· Για $\gamma(t)$ που δεν τέμνει ακτίνα που περνά από το $(0,0)$:



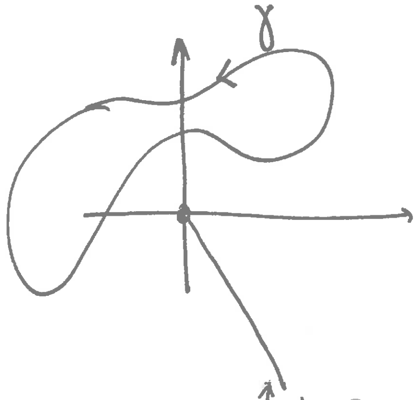
$$\int_\gamma \phi = \arg(\gamma(b)) - \arg(\gamma(a))$$

= μεταβολή στη γωνία ανάμεσα στα σημεία

>0 αν γ με φορά αντίθετη των δεικτών

<0 αν γ με φορά των δεικτών

Αν γ απλή κλειστή και δεν τέμνει ακτίνα από το $(0,0)$.



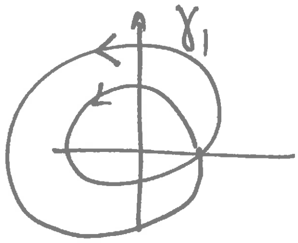
↑ σύνολο ασυνέχειας.

$\int_\gamma \phi = 0$ αφού $\phi = df$ σε γειτονιά της γ.

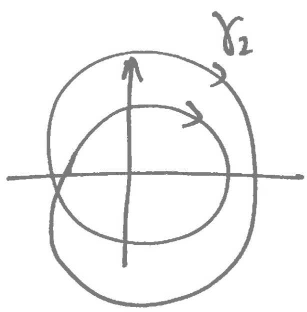
Για γ κλειστή (όχι απαραίτητα απλή)

$\int_\gamma \phi = N \cdot 2\pi$ $\quad N \in \mathbb{Z}$ δείκτης στροφής της γ γύρω από το $(0,0)$

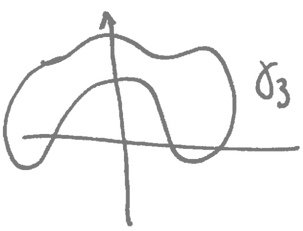
- πόσες φορές περιστρέφεται η γ γύρω από το $(0,0)$ με φορά



$\int_{\gamma_1} \phi = 2 \cdot 2\pi$



$\int_{\gamma_2} \phi = -2 \cdot 2\pi$



$\int_{\gamma_3} \phi = 0$.