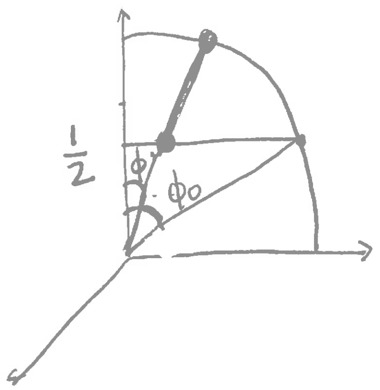
Σε σφαιρικές:



$0 \leq \theta < 2\pi$

Σε κάθε θ

$0 \leq \phi \leq \phi_0 \qquad \phi_0 : \quad \cos\phi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{3}$

Σε κάθε ϕ: $z \geq \frac{1}{2}$

$z = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \rho \cdot \cos\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = \frac{1}{2\cos\phi}$

$$\frac{1}{2\cos\phi} \leq \rho \leq 1$$

$$\therefore I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{1/(2\cos\phi)}^{1} \rho^{2\alpha} \cdot \rho^2 \cdot \sin\phi \cdot d\rho\, d\phi\, d\theta =$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\pi/3} \rho^{2\alpha+3} \frac{1}{2\alpha+3} \Big|_{\rho = \frac{1}{2}(\cos\phi)^{-1}}^{1} \sin\phi \cdot d\phi = \frac{2\pi}{2\alpha+3} \int_0^{\pi/3} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+3} \cdot (\cos\phi)^{-2\alpha-3} \right] \sin\phi\, d\phi$$

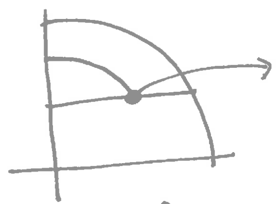
$$= \frac{2\pi}{2\alpha+3} \left[-\cos\phi - \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+3} \frac{(\cos\phi)^{-2\alpha-2}}{2(\alpha+1)} \right]_0^{\pi/3} = \frac{2\pi}{2\alpha+3} \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{4(\alpha+1)} + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+4} \frac{1}{\alpha+1} \right]$$

$1 - \frac{1}{2(\alpha+1)}$

$$= \frac{\pi}{(2\alpha+3)(\alpha+1)} \cdot \left[\frac{2\alpha+1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+3} \right]$$

ή Σε κάθε θ:

$\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$



$\rho \cdot \cos\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \arccos\left(\frac{1}{2\rho}\right)$

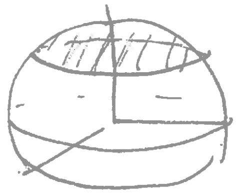
Στο ρ: $0 \leq \phi \leq \arccos\left(\frac{1}{2\rho}\right)$

$$\therefore I = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^{1} \int_0^{\arccos(1/2\rho)} \rho^{2\alpha+2} \cdot \sin\phi\, d\phi\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_{1/2}^{1} \rho^{2\alpha+2} \cdot (-\cos\phi) \Big|_{\phi=0}^{\phi = \arccos(1/2\rho)} d\rho = 2\pi \int_{1/2}^{1} \rho^{2\alpha+2} \left[1 - \left(\frac{1}{2\rho}\right) \right] d\rho$$

$$= \ldots$$

④ $B = \{(x,y,z) \mid z \geq \frac{1}{2}$ και $x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$



Υπολογίστε $\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^{\alpha} = I$

B: $(x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 3/4\}$

και σε καθε (x,y) $\quad \frac{1}{2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$

Πιο απλή περιγραφή σε κυλινδρική:

$B = C(G) \qquad G = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{3/4},\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ \frac{1}{2} \leq z \leq \sqrt{1-r^2}\}$

$$I = \int_0^{\sqrt{3/4}} \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^{\sqrt{1-r^2}} (r^2+z^2)^{\alpha} \cdot r\, dz\, d\theta\, dr \quad ??$$

Τομές με $z =$ σταθερό $\quad \frac{1}{2} \leq z \leq 1$

Σε καθε z δίσκος $x^2+y^2 \leq 1-z^2 \iff r^2 \leq 1-z^2$

Περιγραφή δίσκου σε πολική / κυλινδρική:

$$G_z = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{1-z^2},\ 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

$$\therefore I = \int_{1/2}^{1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} (r^2+z^2)^{\alpha} \cdot r\, dr\, d\theta\, dz =$$

$\alpha \neq -1$

$$= 2\pi \cdot \int_{1/2}^{1} \frac{1}{2} (r^2+z^2)^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{\alpha+1} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{1-z^2}} dz = \pi \int_{1/2}^{1} \left[\frac{1}{\alpha+1}(1-z^{2\alpha+2}) \right] dz$$

$$= \frac{\pi}{\alpha+1} \left[z - \frac{1}{2\alpha+3} z^{2\alpha+3} \right]_{1/2}^{1} = \frac{\pi}{\alpha+1} \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha+3} + \frac{1}{2\alpha+3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+3} \right]$$

$$= \frac{\pi}{(\alpha+1)(2\alpha+3)} \cdot \left[\frac{2\alpha+1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+3} \right]$$

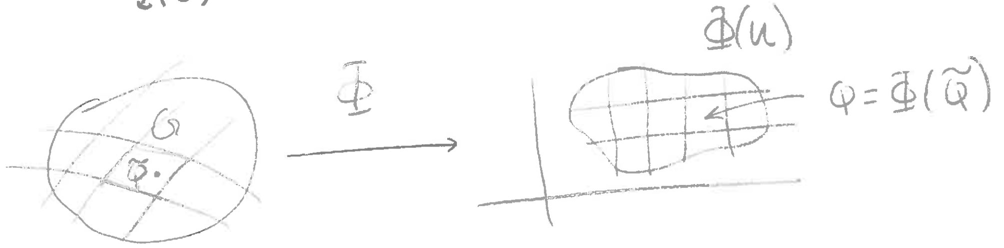
$\alpha = -1 \to \log$

Γενικό Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών

Θεώρημα 7 Έστω $G\subset\mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές υποσύνολο με ∂G να έχει n-μέτρο 0.
Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $G\subset U$.
και $\vec{\Phi}: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ένας C^2 μετασχηματισμός που είναι 1-1 στο $G\setminus\partial G$ με $\det[D\vec{\Phi}]\neq 0$ στο $G\setminus\partial G$.
Αν η f είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\vec{\Phi}(G)$ τότε η $f\circ\vec{\Phi}$ είναι ολοκληρώσιμη στο G και

$$\int_{\vec{\Phi}(G)} f = \int_G f\circ\vec{\Phi}\cdot\left|\det[D\vec{\Phi}]\right|$$

(Δηλαδή $\displaystyle\int_{\vec{\Phi}(G)} f(\vec{x})\cdot|d^n\vec{x}| = \int_G f\circ\vec{\Phi}(\vec{u})\,\left|\det[D\vec{\Phi}]\right|\cdot|d^n\vec{u}|$



$$\int_{\phi(G)} f = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{Q\in P} f(\xi_Q)\cdot \mathrm{Vol}_n(Q) = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{\vec{\Phi}(\tilde{Q})} f(\xi_{\vec{\Phi}(\tilde{Q})})\cdot \mathrm{Vol}_n(\vec{\Phi}(\tilde{Q}))$$

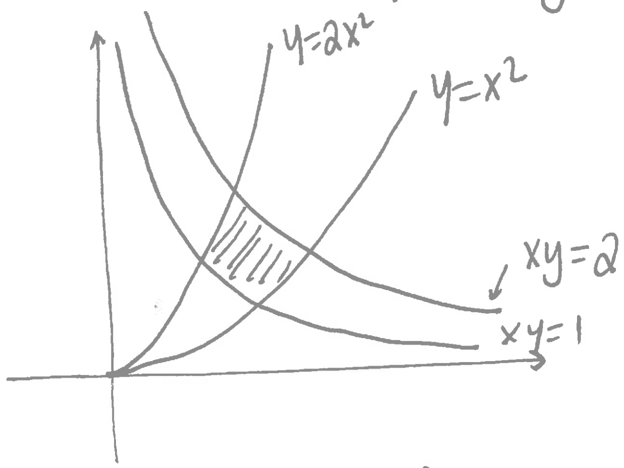
$$= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{\tilde{Q}} f\circ\vec{\Phi}(\xi_{\tilde{Q}})\underbrace{\frac{\mathrm{Vol}_n(\vec{\Phi}(\tilde{Q}))}{\mathrm{Vol}_n(\tilde{Q})}}_{\sim\,\left|\det[D\vec{\Phi}]\right| \text{ για } Q \text{ μικρό}}\mathrm{Vol}_n(\tilde{Q})$$

$\|P\|\to 0 \iff \|\tilde{P}\|\to 0$
για ϕ 1-1 & $|D\phi|\neq 0$

- $\left|\det[D\vec{\Phi}]\right|\neq 0 \ \& \ \phi$ 1-1 $\Rightarrow \vec{\Phi}$ αντιστρέψιμη / η $\vec{\Phi}$ διατηρεί τη διάσταση του χωρίου - δεν παίρνει στερεά σε επιφάνειες για παράδειγμα.

Παραδείγματα:

① $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le xy\le 2 \quad x^2\le y\le 2x^2\}$ Υπολογίστε $Vol_2(A)$.



$$\left.\begin{aligned} u&=xy\\ v&=y/x^2 \end{aligned}\right\} \quad A=\Phi(G) \text{ με } G=[1,2]\times[1,2]$$

$\Phi(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$ χρησιμοποιούμε τα (x,y) ως προς (u,v) για υπολογισμό $|D\Phi|$.

$$\left.\begin{aligned} u/v=x^3 &\Rightarrow x=\sqrt[3]{u/v}\\ u^2v=y^3 &\Rightarrow y=\sqrt[3]{u^2v} \end{aligned}\right\} \quad \Phi(u,v)=\left(\sqrt[3]{u/v},\ \sqrt[3]{u^2v}\right)$$

Φ: είναι 1-1 για $(u,v)\in G$ αφού $v\neq 0$ και Φ^{-1} ορίζεται

$(\Phi^{-1}(x,y)=(u(x,y),v(x,y))=(xy,\ y/x^2)$ ορίζονται στο χωρίο μας$)$

• Προσοχή: $\det[D\Phi]\neq 0$ & Φ C^1 συνεπάγεται Φ τοπικά αντιστρέψιμη όχι όμως υπαρκτή σε όλο το G (Θεώρημα Αντιστρόφου) - θέλουμε Φ 1-1 παντού - άρα να βρίσκουμε Φ^{-1}).

• Ζητάμε $\det[D\Phi]\neq 0$ εκτός σε σύνολο μέτρου μηδέν, διαφορετικά δεν ισχύει ο τύπος, χάνουμε από την αντιστοιχία των όγκων. - χάνουμε σε διάσταση.

$$\det[D\Phi]=\begin{vmatrix} \frac13\left(\frac uv\right)^{-2/3}\cdot\frac1v & \frac13\left(\frac uv\right)^{-2/3}\left(-\frac{u}{v^2}\right)\\ \frac13(u^2v)^{-2/3}\cdot 2uv & \frac13(u^2v)^{-2/3}\cdot u^2 \end{vmatrix}=\frac19\left[\frac{u^2}{v}\cdot u^{-2}+\frac{2u^2}{v}u^{-2}\right]$$

$$=\frac13\,\frac1v$$

$\therefore \mathrm{Vol}_2(A) = \iint_A 1 = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{3v}\, du\, dv = \int_1^2 du \int_1^2 \frac{1}{3v} dv =$

$= u\Big|_1^2 \cdot \frac{1}{3}\ln v\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\ln 2$

---

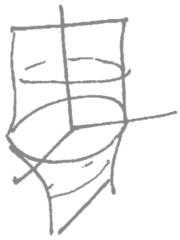
② $T = \left\{ \left(\frac{x}{1-z}\right)^2 + \left(\frac{y}{1+z}\right)^2 \leq 1,\ \mu\varepsilon\ -1 < z < 1 \right\}$
Υπολογίστε $\mathrm{Vol}_3(T)$.

$\frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1+z)^2} = 1$ για $z =$ σταθερό είναι έλλειψη

$(\Leftrightarrow (1+z)^2 x^2 + (1-z)^2 \cdot y^2 = (1-z^2)^2$ - ορίζεται για $-1 < z < 1)$

- όταν $z = \pm 1$: 2 ευθείες.

$z = 0$: $x^2 + y^2 = 1$: κύκλος



Για $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ $\quad \Phi: (r,\theta) \mapsto (ar\cos\theta, br\sin\theta)$
για $0 \leq r \leq 1$ & $0 \leq \theta < 2\pi$
παραμετρικοποιεί την έλλειψη.

$a = 1-z \qquad b = 1+z$

$\Psi: (r,\theta,z) = \left((1-z)r\cos\theta,\ (1+z)r\sin\theta,\ z\right)$ για $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-1 < z < 1$

Παραμετρικοποιεί το T. και είναι όμως 1-1 λόγω των πιο πάνω για $r \neq 0$.

$\det[D\Psi] = \begin{vmatrix} (1-z)\cos\theta & -(1-z)r\sin\theta & -r\cos\theta \\ (1+z)\sin\theta & (1+z)r\cos\theta & r\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-z^2)\cdot r$

$\mathrm{Vol}_3(T) = \iiint_T 1 = \int_{-1}^{1}\int_0^1\int_0^{2\pi} (1-z^2) r\, d\theta\, dr\, dz = 2\pi \cdot \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^1 \cdot \left[z - \frac{1}{3}z^3\right]_{-1}^{1}$

$= \pi \cdot \frac{4}{3}$

Γενικευμένα ολοκληρώματα:

• Ασυνέχεια f σε σύνολο μέτρο μηδέν και f μη-φραγμένη.

$D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f \quad \Delta.\text{O.} \qquad \text{- μη φραγμένη.}$$

$\mathbb{R}$: $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx \quad \Delta.\text{O.}$$

$\alpha \neq -1$: $$\int_0^1 x^\alpha\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\alpha+1}\left(1-\varepsilon^{\alpha+1}\right)\right) \begin{cases} \alpha+1>0 & \text{ορίζεται} \\ \alpha+1<0 & \Delta.\text{O.} \end{cases}$$

Στο $\mathbb{R}^n$, παρόμοια παίρνουμε υποσύνολα $D_\varepsilon \subset D$, με f συνεχή στο D_ε, και $\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon = D$ (εκτός πιθανόν από ∂D ή υποσύνολο του D με n-μέτρο 0).

Αν $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{D_\varepsilon} f$ ορίζεται, τότε ονομάζουμε αυτό το όριο $\int_D f$.

- Δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος να επιλεγούν τα D_ε.
- Αν $\int_D f$ ορίζεται, είναι ανεξάρτητο της επιλογής.

Προσοχή: $$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln|x|\Big|_{-1}^{\varepsilon} + \ln|x|\Big|_\varepsilon^1\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln\varepsilon - \ln\varepsilon) = 0 \qquad \text{ενώ} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} \ \Delta.\text{O.}\ !!$$

Το πρόβλημα εμφανίζεται γιατί $\frac{1}{x}$ παίρνει + ει - τιμές.

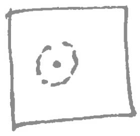
<u>Ορισμός:</u> Έστω $f: \Pi \to \mathbb{R}$ μια <u>μη-αρνητική</u> συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σ.π. στο Π.

Για κάθε $M>0$ θέτουμε $f^M(x) = \min\{f(x), M\}$.

Ορίζουμε $\displaystyle\int_\Pi f = \lim_{M\to\infty} \int_\Pi f^M$ (f μη-φραγμένη).

• Αν η f μη-φραγμένη για $x \to x_0$ τότε ισοδύναμα

$$\int_\Pi f = \lim_{\delta\to 0} \int_{\Pi \setminus B_\delta(x_0)} f \qquad \text{όπου } B_\delta(x_0) = \{x \mid \|x-x_0\| < \delta\}$$



• Παρόμοια αν η f μη-φραγμένη σε πεπερασμένο αριθμό σημείων, τότε αφαιρούμε μπάλα (διαφορετικής πιθανόν ακτίνας) γύρω από το καθένα.

• Αν η f μη φραγμένη σε μια ευθεία ή υποσύνολο του Π με μέτρο 0, αφαιρούμε κυλινδρική περιοχή γύρω από αυτό το σύνολο, με ακτίνα ε.

• Αν το π.τ. της f είναι το $\mathbb{R}$, τότε ορίζουμε $\displaystyle\int_\Pi f = \int_\Pi f^+ - \int_\Pi f^-$

όπου $f^+ = \max\{f, 0\}$ $\quad f^- = -\min\{f, 0\}$.

Παραδείγματα:

① $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$ $\quad \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\lambda}$

Για $\lambda>0$. η f Δ.Ο. στο $(0,0)$.

$D_\varepsilon = D \setminus B_\varepsilon((0,0)) \quad = P(\{(r,\theta) \mid \varepsilon \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi\})$

-που απλή η ολοκλήρωση σε πολικές.

$$\therefore \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2+y^2)^\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{r^{2\lambda}} \cdot r\, dr d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi \cdot \int_\varepsilon^1 r^{1-2\lambda}\, dr$$

Για: $1-2\lambda > -1 \Leftrightarrow \lambda < 1$ $\quad : \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2\pi}{2-2\lambda} \cdot r^{2-2\lambda}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{\pi}{1-\lambda}$

Για $1-2\lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = 1$ $\quad : \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi \cdot \ln r\Big|_\varepsilon^1 = +\infty$ Δ.Ο.

Για $1-2\lambda < -1 \Leftrightarrow \lambda > 1$ $\quad : \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2\pi}{2-2\lambda} \cdot r^{2-2\lambda}\Big|_\varepsilon^1 = +\infty$ Δ.Ο.

$(2-2\lambda < 0)$

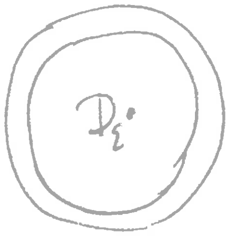
Παρατήρηση: $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ορίζεται ενώ $\int_0^1 \frac{1}{|x|}$ Δ.Ο.

- $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}$: η 1η δύναμη στην οποία Δ.Ο.

② $I = \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}}$. $\quad D = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$

$f \to \infty$ όταν $(x,y) \to \partial D = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$

$-\varepsilon$ κτλ 2- ψηφο 0.



$D_\varepsilon = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1-\varepsilon\}$. - σε πολική πιο απλό.

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{D_\varepsilon} f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-r}}\, r\,dr\,d\theta$$

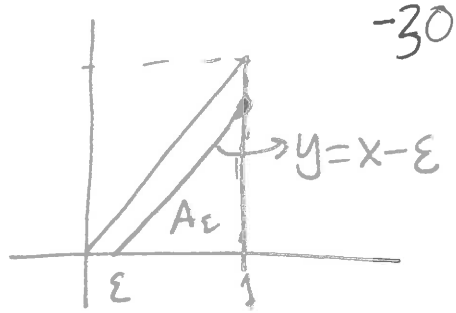
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi \cdot \int_0^{1-\varepsilon} \left(-\sqrt{1-r} + \frac{1}{\sqrt{1-r}}\right) dr$$ -31-

Αφού
$r = -(1-r)+1$
$= -(\sqrt{1-r})^2 + 1$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi \cdot \left[\frac{2}{3}(1-r)^{3/2} - 2(1-r)^{1/2}\right]_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi \left[\frac{2}{3}\cdot\varepsilon^{3/2} - 2\cdot\varepsilon^{1/2} - \frac{2}{3} + 2\right] = 2\pi \frac{4}{3}$$ Ορίζεται!

③ $\iint\limits_A \frac{1}{x-y}$ $\qquad A=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y<x\}$



$f\to\infty$ όταν $(x,y)\to L=\{(x,x) \mid 0\le x\le 1\}$

έχει 2-μέτρο 0.

$A_\varepsilon=\{(x,y) \mid \varepsilon\le x\le 1,\ 0\le y\le x-\varepsilon\}$ $\quad$ ($f>0$ στο A).

$$\iint\limits_A \frac{1}{x-y}=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{A_\varepsilon}\frac{1}{x-y}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\int_0^{x-\varepsilon}\frac{1}{x-y}\,dy\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 -\ln|x-y|\Big|_{y=0}^{y=x-\varepsilon}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1(-\ln\varepsilon+\ln x)\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-(\ln\varepsilon)\cdot x+x\ln x-x\right]_\varepsilon^1=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\overbrace{\cancel{-\ln\varepsilon}}^{\to+\infty}-1+\cancel{\varepsilon\ln\varepsilon}-\cancel{\varepsilon\ln\varepsilon}-\varepsilon\right]=+\infty$$

Δεν ορίζεται

- Αποκλίνει.

Μη φραγμένα σύνολα:

Ορισμός: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ μη-φραγμένο με ∂A να έχει μηδενικό n-μέτρο και $f: A \to \mathbb{R}$ μια σχεδόν παντού συνεχής συνάρτηση, μη-αρνητική $(f \geq 0)$.
Έστω $\{K_j\}_j$ μια αύξουσα ακολουθία συνόλων $(K_j \subset K_{j+1})$ με ∂K_j μηδενικού n-μέτρου $\forall j$ και τ.ω. $\bigcup_j K_j = \mathbb{R}^n$.

Τότε ορίζουμε $\int_A f = \lim_{j \to \infty} \int_{A \cap K_j} f$

- K_j συνήθως δίσκοι/μπάλες ή ορθογώνια.
- $\{A \cap K_j\}_j$: ονομάζεται εξάντληση του A.
- Αν το π.τ. της f περιέχει αρνητικές και θετικές τιμές

τότε $\int_A f := \int_A f^+ - \int_A f^-$.

- Η ύπαρξη $\int_A f$ είναι ανεξάρτητη του $\{K_j\}$

Παραδείγματα:

① $B = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \geq 1\}$ $\qquad \iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\lambda}$

$B_j = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq j^2\}$ για $j \geq 2$ — σε πολικές

$\iint_B f = \lim_{j\to\infty} \iint_{B_j} f = \lim_{j\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_1^j \frac{1}{r^{2\lambda}} \cdot r \, dr\, d\theta =$

$= \lim_{j\to\infty} 2\pi \cdot \int_1^j r^{1-2\lambda}\, dr$

$$\begin{array}{l} -2\lambda+1<-1 \\ \Leftrightarrow 2-2\lambda<0 \end{array} \quad = \lim_{j\to\infty} \frac{2\pi}{2-2\lambda}\cdot r^{-2\lambda+2}\Big|_1^j =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{\pi}{1-\lambda}\cdot\left[j^{2-2\lambda} - 1\right] = \frac{\pi}{\lambda-1} \quad \text{ορίζεται}$$

$$-2\lambda+1=-1 \quad = \lim_{j\to\infty} 2\pi\cdot \ln r\Big|_1^j = +\infty \quad \text{Δ.Ο.}$$

$$\begin{array}{l} -2\lambda+1>-1 \\ \Leftrightarrow 2-2\lambda>0 \end{array} \quad = \lim_{j\to\infty} \frac{2\pi}{2-2\lambda}\cdot r^{2-2\lambda}\Big|_1^j = \lim_{j\to\infty}\frac{\pi}{1-\lambda}\left[j^{2-2\lambda}-1\right] =$$

$$= +\infty \quad \text{Δ.Ο.}$$

Ορίζεται ανν $2-2\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>1$.

② $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\lambda} = \lim_{j\to\infty} 2\pi\cdot\int_0^j \frac{1}{(1+r^2)^\lambda}\cdot r\, dr =$$

$\lambda\neq 1$: $$\lim_{j\to\infty} \frac{2\pi}{2(1-\lambda)}(1+r^2)^{-\lambda+1}\Big|_0^j = \lim_{j\to\infty}\frac{\pi}{1-\lambda}\left[(1+j^2)^{1-\lambda}-1\right] \begin{cases} \to \frac{\pi}{\lambda-1} & 1-\lambda<0 \\ \to +\infty & 1-\lambda>0 \end{cases}$$

$\lambda=1$: $$\lim_{j\to\infty}\frac{2\pi}{2}\cdot\ln(1+r^2)\Big|_0^j = \lim_{j\to\infty}\pi\cdot\ln(1+j^2) = +\infty$$

Ορίζεται ανν $\lambda>1$.

$$\frac{1}{(1+x^2+y^2)^\lambda} \sim \frac{1}{(x^2+y^2)^\lambda} \quad \text{για } x^2+y^2 \text{ μεγάλα.}$$

Κριτήρια Σύγκρισης:

$0 \le f(x) \le g(x)$

Με f, g συνεχής εκτός σε σύνολο μέτρου 0 -(Μη-φραγμένες).

Αν $\int_D f = +\infty$ τότε $\int_D g = +\infty$

Αν $\int_D g$ ορίζεται τότε $\int_D f$ ορίζεται.

① $I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}}$ $D = \{x^2+y^2 \le 1\}$ $\frac{1}{r} \cdot r$ ή $\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot r \to$ συγκλίνει

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f$ Δ.Ο.

$\therefore |y| \ge y^2$ για $|y| \le 1$

$\therefore x^2+|y| \ge x^2+y^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+|y|}} \le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\therefore I \le \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\lambda = \frac{1}{2}$ συγκλίνει από ①.

- Ο υπολογισμός δύσκολος.

② $\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+|y|}}$ $A = \{x^2+y^2 \le 2\}$.

$A \subset D$ -παρόλο που $|y| \not\ge y^2$ στο A, γίνεται η σύγκριση στο D και αφού

$\iint_A f = \iint_D f + \iint_{A \setminus D} f \le C + C'$

$A \setminus D$: φραγμένη, συνεχής σε συμπαγή χωρίο. → ολοκλ.

③ $\iint_D \frac{1}{(x^4+y^6)^{5/2}}$ $(x^4+y^6)^{5/2} \sim (x^2+y^2)^{2\cdot\frac{5}{2}} = (x^2+y^2)^5$

$r^{-10} \cdot r$ Δ.Ο. - Βρίσκουμε μικρότερη συνάρτηση που Δ.Ο.

ή $r^{-15} \cdot r$ Δ.Ο.

$x^4+y^6 \le x^4+y^4 \le (x^2+y^2)^2$ $\therefore f \ge \frac{1}{(x^2+y^2)^{2\cdot\frac{5}{2}}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^5}$

αφού $|y| \le 1$

$\therefore \iint_D \frac{1}{(x^4+y^6)^{5/2}} \geq \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^5}$ Δ.Ο. από ①.

④ $\iint_D \frac{(|x|+|y|)^{15/4}}{(x^4+y^6)^{3/2}}$

$\frac{r^{15/4}}{r^6} \cdot r = r^{15/4-5} = r^{-5/4}$ αποκλίνει

ή $\frac{r^{15/4}}{r^9} r = r^{-17/4}$ αποκλίνει

$|x|+|y| \geq \sqrt{x^2+y^2}$

$\therefore (|x|+|y|)^{15/4} \geq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{15/4}$

$(x^4+y^6)^{3/2} \leq (x^4+y^4)^{3/2} \leq (x^2+y^2)^3$

$\therefore \iint_D f \geq \iint_D \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{15/4}}{(x^2+y^2)^3} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{15/4} \cdot r^{-6} \cdot r \, dr d\theta$

$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi \cdot \int_\varepsilon^1 r^{-5/4} dr = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi \left((-4) \cdot (1-\varepsilon^{-1/4})\right)$ Δ.Ο.

$f \to \infty$ σε καμπύλη

(3) Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|x|+|y|}{(1+|x|+|y|)^7} \qquad f \sim \frac{r}{(1+r)^7} \sim \frac{1}{r^6} \text{ στο } \mathbb{R}^2$$

συγκλίνει.

$$\left.\begin{aligned} |x|+|y| &\leq 2\sqrt{x^2+y^2} \\ |x|+|y| &\geq \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{|x|+|y|}{(1+|x|+|y|)^7} \leq \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^7}$$

$(|x|+|y| \leq \sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2})$.

$$\therefore \iint_{\mathbb{R}^2} f \leq \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^7} = \lim_{j\to\infty} 2\pi \cdot \int_0^j \frac{2r}{(1+r)^7}\, r\,dr$$

$$\frac{r}{1+r} \leq 1 \qquad \therefore \leq \lim_{j\to\infty} 2\pi \cdot \int_0^j \frac{2}{(1+r)^5}\,dr =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{4\pi(1+r)^{-4}}{-4}\Big|_0^j = \lim_{j\to\infty} \pi\left[-(1+j)^{-4}+1\right] = \pi$$

$\therefore$ Συγκλίνει.

(16) $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$ $\qquad e^{-x^2}$ δεν έχει αντιπαράγωγο

<u>Παρατήρηση</u>: $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{-2}\cdot \lim_{R\to\infty} e^{-r^2}\Big|_0^R =$$

$$= -\pi \cdot \lim_{R\to\infty}\left[e^{-R^2}-1\right] = \pi$$

$$\therefore \boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$$

7 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ $\qquad -x \le \sin x \le x \Rightarrow -1 \le \frac{\sin x}{x} \le 1$

για $x>0$ ∴ φραγμένη.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_0^{(j+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{\sin x}{x} = a_j$

j άρτιο: $\oplus$ $\le \frac{1}{j\pi}\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \sin x\,dx = \frac{1}{j\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{2}{j\pi}$

j περιττό $\ominus$ $\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} -\frac{\sin x}{x}\,dx \le \frac{2}{j\pi} \Rightarrow -\frac{2}{j\pi} \le a_j \le 0.$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

a_j εναλλάσσουσα με $|a_j| \le \frac{2}{j\pi} \to 0$

$\therefore \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ συγκλίνει.

$\frac{\sin x}{x}$ δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.