Παράδειγμα: ② $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y}$ συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid y=-x^2\}$ αφού σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

① Πολυώνυμα, Ρητές, Αλγεβρικές, Εκθετικές, Τριγωνομετρικές Λογαριθμικές, είναι συνεχείς στο π.ο. τους.

Ακραίες - Ενδιάμεση Τιμής:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$: ΘΕΤ & f παίρνει τη μέγιστη & ελάχιστη τιμή της.

$[a,b]$: κλειστό & φραγμένο στο $\mathbb{R}$

Το αντίστοιχο στο $\mathbb{R}^n$ είναι το συμπαγές ($\equiv$ κλειστό & φραγμένο).

(Ακραίων Τιμών)

Θεώρημα 10 Α΄ Έστω $C \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $f: C \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχουν $\vec{x}_0 \in C$ και $\vec{x}_0{}' \in C$ τ.ω.

$$f(\vec{x}_0) = \inf\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in C\}$$

$$f(\vec{x}_0{}') = \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in C\}$$

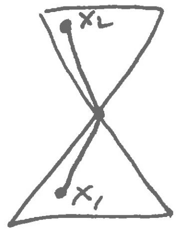
Λήμμα: f συνεχής στο C και $C \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές τότε $f(C)$ συμπαγές.

Απόδειξη Θ.10 $f(C)$ συμπαγές $\Rightarrow$ έχει inf και sup και αφού κλειστό αυτά ανήκουν στο $f(C)$.
i.e. $\exists x_0$ τ.ω. $f(x_0)=\inf$ & $\exists x_0'$ τ.ω. $f(x_0')=\sup$.

Όπως στο $\mathbb{R}$.

- Διαφορετικά με τη μέθοδο "πιάστε το λιοντάρι"

<u>Ορισμός</u> $A\subset\mathbb{R}^n$ είναι <u>συνεκτικό κατά τόξα</u>, αν, $\forall\, \vec{x}_1,\vec{x}_2\in A$ υπάρχει συνεχής καμπύλη $\vec{\gamma}:[0,1]\to A$ με $\vec{\gamma}(0)=\vec{x}_1$ και $\vec{\gamma}(1)=\vec{x}_2$



$\vec{\gamma}(t)$ είναι διαν. συνάρτηση $\quad \vec{\gamma}(t)=(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))$. - σε κάθε t δίνει σημείο του $\mathbb{R}^n$.

<u>Θεώρημα 11</u> (Ενδιάμεσης Τιμής)

Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ συνεκτικό κατά τόξα και $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ συνεχής. Αν η f παίρνει τις τιμές λ_1,λ_2 τότε για κάθε $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$ $\exists\,\vec{x}\in A$ τ.ω. $f(\vec{x})=\lambda$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\vec{x}_1,\vec{x}_2$ τ.ω. $\lambda_1=f(\vec{x}_1)$ κ $\lambda_2=f(\vec{x}_2)$

A συνεκτικό κατά τόξα $\Rightarrow \exists\,\vec{\gamma}:[0,1]\to A$ συνεχής τ.ω. $\vec{\gamma}(0)=\vec{x}_1$ κ $\vec{\gamma}(1)=\vec{x}_2$.

$g(t)=f\circ\vec{\gamma}(t)=f(\vec{\gamma}(t)):[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής από $[0,1]$ στο $\mathbb{R}$

$$g(0)=f(\vec{\gamma}(0))=f(\vec{x}_1)=\lambda_1$$
$$g(1)=f(\vec{\gamma}(1))=f(\vec{x}_2)=\lambda_2$$

ΘΕΤ στο $\mathbb{R}$: αφού $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ $\exists\, t_0\in(0,1)$ τ.ω. $g(t_0)=\lambda$.

$$\vec{x}_0=\vec{\gamma}(t_0)\in A \Rightarrow f(\vec{x}_0)=\lambda$$

$\square$

<u>Ορισμός</u> Έστω $\vec{f}: A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Η $\vec{f}$ είναι <u>ομοιόμορφα συνεχής</u> στο A αν $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta(\varepsilon)>0$ (ανεξάρτητο του $\vec{x}_0$) τ.ω. για κάθε ζεύγος $\vec{x},\vec{y}\in A$ με $\|\vec{x}-\vec{y}\|<\delta(\varepsilon)$ ισχύει ότι $\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{y})\|<\varepsilon$.

<u>Παράδειγμα:</u> ① $f(x,y)=x^2+y^2$ στο $\mathbb{R}^2$.

Αν ομοιόμορφα συνεχής τότε για $\varepsilon=1$ $\exists\delta(\varepsilon)$ τ.ω. όταν $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|<\delta$ ισχύει $\|x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2\|<1$

Για $x_1=y_1=\frac{1}{\delta}$ & $x_2=y_2=\frac{\delta}{2}+\frac{1}{\delta}$

$$\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|=\sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2+\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}=\frac{\delta}{\sqrt{2}}<\delta$$

$$|x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2|=\left|\cancel{\frac{2}{\delta^2}}-2\cdot\frac{\delta^2}{4}-\cancel{\frac{2}{\delta^2}}-2\right|$$

$$=\left|2+\frac{\delta^2}{2}\right|>2 \quad \text{για οποιοδήποτε } \delta \quad \rightarrow\leftarrow.$$

Η f δεν είναι φραγμένη!

<u>Θεώρημα 12</u> Αν $C\subset\mathbb{R}^n$ συμπαγές και $f: C\to\mathbb{R}$ συνεχής τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής

Απόδειξη όπως στο $\mathbb{R}$

<u>Θεώρημα 13:</u> $\vec{f}: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ συνεχής αν $\forall W\subset\mathbb{R}^m$ W ανοικτό $\vec{f}^{-1}(W)=U$ ανοικτό στο $\mathbb{R}^n$

Απόδειξη:

$f^{-1}(W) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) \in W\}$

Παρατήρηση:

f συνεχής: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τ.ω. αν $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ τότε

$\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τ.ω. αν $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$

τότε $\vec{f}(\vec{x}) \in B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τ.ω. $B(\vec{x}_0, \delta) \subset f^{-1}(B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon))$

($\rightarrow$) Έστω f συνεχής και W ανοικτό. Έστω $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0) \in W$

τότε $\exists \varepsilon_0 > 0$ τ.ω. $B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon_0) \subset W$

f συνεχής άρα $\exists \delta_0 > 0$ τ.ω. $B(\vec{x}_0, \delta_0) \subset f^{-1}(B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(W)$

$\Rightarrow f^{-1}(W)$ ανοικτό

($\leftarrow$) Έστω f τ.ω. $f^{-1}(W)$ ανοικτό $\forall$ W ανοικτά.

Έστω $\varepsilon > 0$ τότε $B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)$ ανοικτό στο $\mathbb{R}^m$.

άρα $f^{-1}(B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon))$ ανοικτό στο $\mathbb{R}^n$

Αφού $\vec{x}_0 \in f^{-1}(B(\vec{f}(\vec{x}_0)), \varepsilon)$ που είναι ανοικτό, τότε $\exists \delta > 0$

τ.ω. $B(\vec{x}_0, \delta) \subset f^{-1}(B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon))$

$\Rightarrow f$ συνεχής.

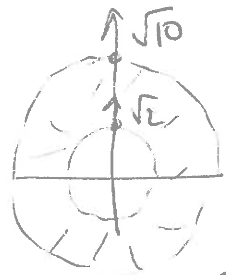
Παράδειγμα:

$f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ συνεχής.

$W=(1,\infty)$ ανοικτό στο $\mathbb{R}$

$f^{-1}(W) = \{(x,y) \mid x^2+y^2>1\}$ ανοικτό στο $\mathbb{R}^2$

αφού f συνεχής & W ανοικτό



$U=(2,10)$ ανοικτό στο $\mathbb{R}$

$f^{-1}(U) = \{(x,y) \mid 2<x^2+y^2<10\}$ ανοικτό στο $\mathbb{R}^2$

για τους ίδιους λόγους

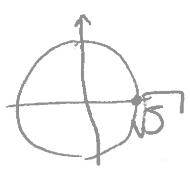
Άσκηση: f συνεχής $\quad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

αν $W\subset\mathbb{R}^m$ κλειστό τότε $f^{-1}(W)$ κλειστό στο $\mathbb{R}^n$

Άρα για $f = x^2+y^2$

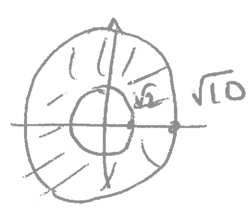
$A=\{5\}$ κλειστό στο $\mathbb{R}$

$f^{-1}(\{5\}) = \{x^2+y^2=5\}$ κλειστό στο $\mathbb{R}^2$



$B=[2,10]$ κλειστό στο $\mathbb{R}$

$f^{-1}([2,10]) = \{(x,y) \mid 2\le x^2+y^2\le 10\}$: κλειστό στο $\mathbb{R}^2$



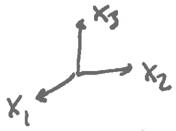
Μερικές Παράγωγοι και Διαφορισιμότητα:

$f'(x): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

"κλίση"

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. πώς να οριστεί μια "κλίση" αφού η f μεταβάλλεται σε πολλές κατευθύνσεις;

Μερικές Παράγωγοι:

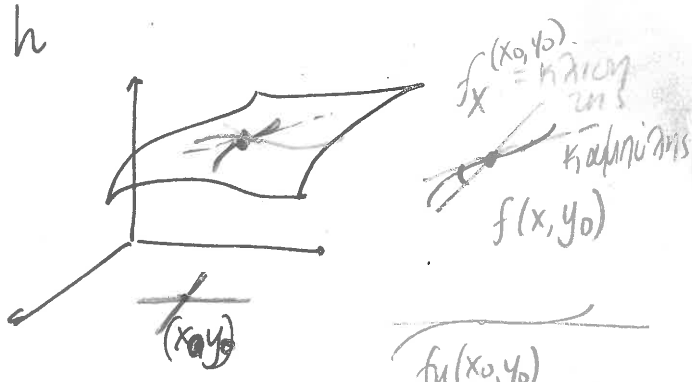


Ορισμός: Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f:A\to\mathbb{R}$.
Για $\vec{x}\in A$, η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x})$ της f στην κατεύθυνση x_j (ως προς x_j) στο σημείο $\vec{x}$ ορίζεται ως:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\dots,x_j+h,\dots,x_n)-f(\vec{x})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{e}_j)-f(\vec{x})}{h}$$

Συμβολισμός: $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_{x_j}$



Παράδειγμα ① $f(x,y)=x^2+y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = 2x.$$

- Αν η f δίνεται από ένα απλό "παραγωγίσιμο" τύπο τότε για τον υπολογισμό $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ θεωρούμε τα x_i για $i\neq j$ ως σταθερές και παραγωγίζουμε ως προς x_j (Παρ. 1)

② $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \cdot \log(x_3^2 + x_4^4)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \cdot \log(x_3^2+x_4^4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_4} = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \cdot \frac{1}{x_3^2+x_4^4} \cdot 4x_4^3.$$

• Αν η f ορίζεται κατά μέρη στο σημείο υπολογισμού της παραγώγου, τότε ανατρέχουμε στον ορισμό.

③ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{στο } (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^4/h^2}{h} = 0$$

Για $(x,y) \neq (0,0)$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{Δ.Ο. στο } (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^3-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \qquad —\text{"}—$$

④ ~~$f(x,y,z) = xyz$~~

~~$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(yz) = z$~~ ~~ίσες.~~

~~$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) = z$~~

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται μερικοί παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \equiv f_{x_j x_i} := (f_{x_j})_{x_i}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\right) \equiv f_{x_k x_j x_i} := \left((f_{x_k})_{x_j}\right)_{x_i}$$

n^2: παράγωγοι 2ας τάξης.

n^k: - " - k τάξης

Ορισμός: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι τάξης C^k, αν όλες οι μερικές της παράγωγοι τάξης $\leq k$ είναι συνεχείς.

④ $f(x,y,z) = xyz + x^2$

$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(yz + 2x) = z$

ίσες.

$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) = z$

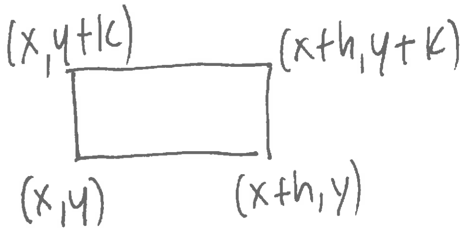
Θεώρημα 1 Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A ανοικτό, και f C^2 στο A.
Τότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\forall i,j$.

· Οι μικτές 2οι παράγωγοι είναι ίσοι για C^2 συναρτήσεις

Παρατήρηση: Το ίδιο ισχύει όταν f C^k για τις παραγώγους τάξης k.

Απόδειξη: Για $n=2$ - γενικεύεται εύκολα.

Έστω $S(h,k) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)$
με h,k μικρά τ.ω. να μη βγαίνουμε από το A.



Έστω $g(x) = f(x,y+k) - f(x,y)$
με y,k σταθερές.

Τότε $g'(x) = f_x(x,y+k) - f_x(x,y)$
$g''(x) = f_{xx}(x,y+k) - f_{xx}(x,y)$
και έχουμε ότι g είναι C^2 αφού η f_{xx} είναι συνεχής.
Άρα η g είναι συνεχής και C^1 (συνάρτηση 1 μεταβλητής).

• Παρατήρηση. $S(h,k) = g(x+h) - g(x)$
Από ΘΜΤ (Απειρ Ι) $\exists\, \bar{x}$ ανάμεσα στο $x, x+h$ τ.ω.

$$g(x+h) - g(x) = g'(\bar{x})\cdot h$$
$$= f_x(\bar{x}, y+k) - f_x(\bar{x}, y)$$

Παρόμοια, η $G(y) = f_x(\bar{x}, y)$ με $\bar{x}$ σταθερό
είναι C^1, αφού $G' = f_{xy}(\bar{x}, y)$ και άρα από
ΘΜΤ $\exists\, \bar{y}$ ανάμεσα στα $y, y+k$ τ.ω.

$$G(y+k) - G(y) = G'(\bar{y})\cdot k \iff$$
$$\iff f_x(\bar{x}, y+k) - f_x(\bar{x}, y) = f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\therefore\ S(h,k) = g(x+h) - g(x) = g'(\bar{x})\cdot h = \left[f_x(\bar{x}, y+k) - f_x(\bar{x}, y)\right] h$$
$$= G'(\bar{y})\, k \cdot h = f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot k \cdot h.$$

Παρόμοια, ορίζοντας $g_2(y) = f(x+h, y) - f(x,y)$

και $G_2(x) = f_y(x, y^*)$

έχουμε ότι $S(h,k) = g_2'(y^*)\cdot k = \left[f_y(x+h, y^*) - f_y(x, y^*)\right]\cdot k$

$$= G_2'(x^*)\cdot h\cdot k = f_{yx}(x^*, y^*)\, h\cdot k$$

για x^* ανάμεσα στα $x, x+h$

και y^* —"— $y, y+k$.

Άρα $\dfrac{S(h,k)}{h\cdot k} = f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = f_{yx}(x^* y^*)$

και αφού f_{xy}, f_{yx} συνεχής, τότε

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{S(h,k)}{h\cdot k} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{yx}(x^*, y^*)$$

$$\Rightarrow f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

($\bar{x}, x^* \to x$ όταν $h\to 0$, $\bar{y}, y^* \to y$ όταν $k \to 0$)

QED.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ βαθμωτή συνάρτηση με A ανοικτό. Αν οι μερικές παράγωγοι της f ορίζονται στο $x_0 \in A$, τότε το διάνυσμα μερικών παραγώγων

$$\nabla f(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

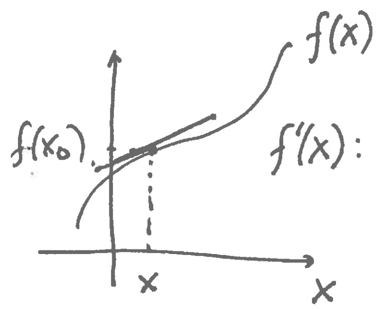
ονομάζεται <u>κλίση</u> της f στο x_0.

∇: ανάδελτα (nabla)

grad: gradient. ≡ κλίση.

<u>Παρ.</u> $f(x,y,z) = x^2 + 5xy + z^3$ $\qquad \nabla f(x,y,z) = (2x+5y,\ 5x,\ 3z^2)$

$\mathbb{R}$



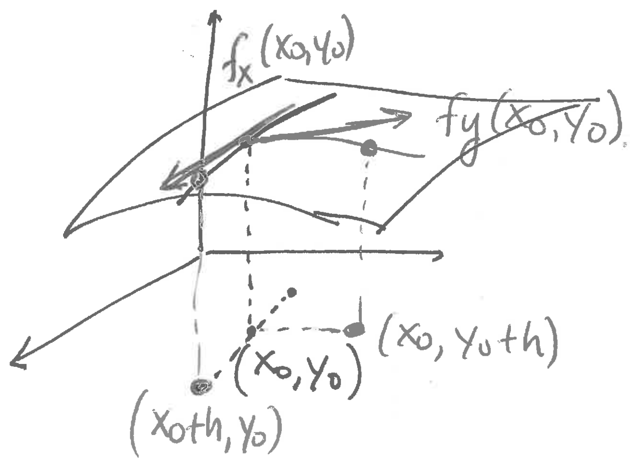
$f'(x)$: κλίση.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

όταν f διαφορίσιμη.

$\mathbb{R}^2$



$f_x(x_0,y_0)$: η κλίση της καμπύλης $\gamma(x) = f(x, y_0)$ στο x_0

$f_y(x_0,y_0)$: η κλίση της καμπύλης $\gamma(y) = f(x_0, y)$ στο y_0.

$$f(x_0 + h, y_0) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot h$$

$$f(x_0, y_0 + s) \approx f(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot s$$

$$f(x_0 + h, y_0 + s) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0) \cdot s$$

όταν διαφορίσιμη.

• Στο $\mathbb{R}$

f διαφορίσιμη στο $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ορίζεται

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

Δηλαδή, μπορούμε να βρούμε μια αφφινική συνάρτηση (την ευθεία
$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$)
που να είναι η 'καλύτερη γραμμική προσέγγιση' στην f
στο x_0, (Αφφινική = γραμμική + σταθερά)

• Αφφινική γιατί η $L(x)$ είναι αφφινική και
όταν την αφαιρέσουμε από την f αυτό που μένει
είναι μικρότερο από $x-x_0$ και πάει στο 0
γρηγορότερα από το $x-x_0$.

• Στο $\mathbb{R}^n$

f διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0$ αν μπορούμε να προσεγγίσουμε
την f με ~~ένα~~ μια αφφινική συνάρτηση,
δηλαδή με ένα επίπεδο που να είναι εφαπτόμενο.

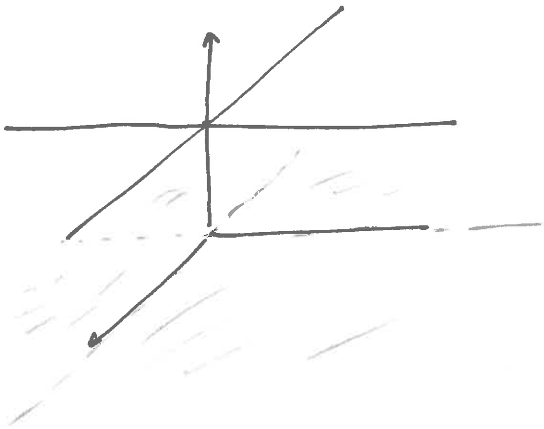
$L(\vec{x}) = b + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ $\qquad a_i$: σταθερές.

<u>Προσοχή:</u>

$\boxed{1}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x=0 \text{ ή } y=0 \\ 0 & x\neq 0 \text{ και } y\neq 0 \end{cases}$$

"Σταυρός"



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f$$

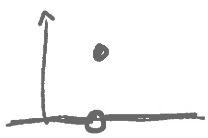
$x=0$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f = \lim\limits_{y\to 0} 1 = 1$

$x=y\neq 0$ $f(x,x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 0.$

Μη συνεχής στο $(0,0)$

· Δε θα έπρεπε να έχει εφαπτόμενο επίπεδο (γραμμική προσέγγιση) $\sim$



$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} = 0.$$

Ορίζονται !!

$\nabla f(0,0) = (0,0)$ όμως δεν πρέπει να υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο.

<u>Λογισμός</u> I: $f'(x_0)$ ορίζεται $\Rightarrow$ f συνεχής στο x_0 !!!

Εδώ f_x, f_y ορίζονται και f μη συνεχής.