Άσκηση: Παρόμοια: $d(\vec{x},\vec{y})\frac{1}{\sqrt{n}} \le d_\infty(\vec{x},\vec{y}) \le d(\vec{x},\vec{y})$

Άρα: $d_\infty(\vec{x},\vec{y}) \le d(\vec{x},\vec{y}) \le d_1(\vec{x},\vec{y})$.

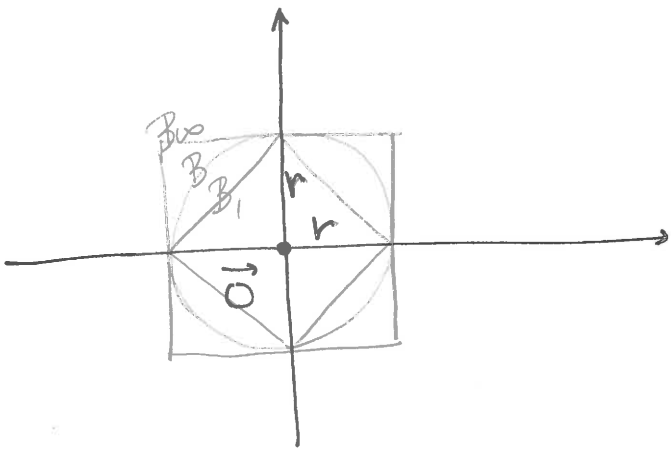
d_1: η ~~μ~~ πιο "μεγάλη"

Άρα αν $d_1(\vec{x},\vec{y}) < r \Rightarrow d_\infty(\vec{x},\vec{y}) \le d(\vec{x},\vec{y}) \le d_1(x,y) < r$.

και έχουμε ότι $B_1(\vec{x}_0,r) \subset B(\vec{x}_0,r) \subset B_\infty(\vec{x}_0,r)$

(Αν στην B_1 τότε στην B και B_∞, και αν στην B τότε στην B_∞)

∴ B_1 η πιο "μικρή" μπάλα.



Σύγκλιση ακολουθιών:

$\mathbb{R}$: ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\quad x_k \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n$: ακολουθία $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \dots)$

όπου $\vec{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$

Ορισμός: Αν δ είναι μια απόσταση στο $\mathbb{R}^n$ και $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία σημείων του $\mathbb{R}^n$, τότε

$\vec{x}_k \xrightarrow{\delta} \vec{x}$ ανν $\delta(\vec{x}_k, \vec{x}) \to 0$.

Ισοδύναμα: $\vec{x}_k \xrightarrow{\delta} \vec{x}$ ανν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0$ τ.ω.

$\delta(\vec{x}_k, \vec{x}) \leq \varepsilon$ όταν $k \geq N(\varepsilon)$.

Αν $\vec{x}_k \xrightarrow{\delta} \vec{x}$, τότε λέμε ότι η $(\vec{x}_k)$ συγκλίνει στο $\vec{x}$ ως προς την απόσταση δ.

Παραδείγματα:

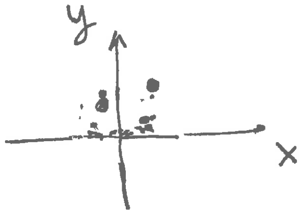
① $\left(\sin\frac{1}{k}, \frac{k^2}{k^3+5}, \cos\left(\frac{1}{k!}\right)\right) = \vec{x}_k$

$\sin\frac{1}{k} \to \sin 0$ $\quad \frac{k^2}{k^3+5} \to 0$ $\quad \cos\left(\frac{1}{k!}\right) \to \cos 0 = 1$

αναμένουμε ότι $\vec{x}_k \to (0,0,1)$

② $\left(\sin k, \frac{1}{k}\right) = \vec{x}_k$ $\quad (\sin k)$ δε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$

$\frac{1}{k} \to 0$



Αναμένουμε να μη συγκλίνει.

Πρόταση: 1 (Σύγκλιση ανν σύγκλιση κάθε συντεταγμένης).

Αν η δ είναι μια από τις d_1, d, d_∞ του $\mathbb{R}^n$ και $(\vec{x_k}) = ((x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n}))$ μια ακολουθία στο $\mathbb{R}^n$ τότε $\vec{x_k} \xrightarrow{\delta} \vec{x}$ ανν κάθε συνιστώσα ακολουθία $(x_{k,j})$ για $j=1,\ldots,n$, ικανοποιεί $x_{k,j} \to x_j$ (όπου $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$)

- Η σύγκλιση της $(x_{k,j})$ είναι στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη Πρότασης 1 για $\delta = d_\infty$:

($\rightarrow$) Έστω ότι $\vec{x_k} \xrightarrow{d_\infty} \vec{x}$

Δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$ τ.ω. για $k \geq N(\varepsilon)$

$$d_\infty(\vec{x_k}, \vec{x}) = \max\{|x_{k,1} - x_1|, \ldots, |x_{k,n} - x_n|\} < \varepsilon$$

Αυτό συνεπάγεται ότι για $k \geq N(\varepsilon)$

$|x_{k,j} - x_j| < \varepsilon \quad \forall j = 1, \ldots, n$ (αφού ισχύει για το μέγιστο όρισμα)

Άρα $x_{k,j} \to x_j$

($\leftarrow$) Αν $x_{k,j} \to x_j$ $\forall j = 1, \ldots, n$, τότε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_j(\varepsilon) > 0$ τ.ω. $|x_{k,j} - x_k| < \varepsilon$ όταν $k \geq N_j(\varepsilon)$.

(δηλαδή σύγκλιση συντεταγμένων. Τα N_j μπορεί να είναι διαφορετικά)

Έστω $N(\varepsilon) = \max\limits_{j=1,\ldots,n} \{N_j(\varepsilon)\}$.

Τότε για $k \geq N(\varepsilon)$ $d_\infty(\vec{x_k}, \vec{x}) = \max\{|x_{k,1} - x_1|, \ldots, |x_{k,n} - x_n|\} < \varepsilon$

(αφού ισχύει για κάθε $|x_{k,j} - x_j|$)

Δηλαδή $\vec{x_k} \xrightarrow{d_\infty} \vec{x}$.

Άσκηση: Για d, d_1 (έχουμε άθροισμα, άρα για ($\leftarrow$) θα χρειαστούμε μικρότερο ε σε κάθε συντεταγμένη.

<u>Πρόταση 2</u> Για κάθε ακολουθία $(\vec{x}_k)$ στο $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\vec{x}_k \xrightarrow{d} \vec{x} \iff \vec{x}_k \xrightarrow{d_1} \vec{x} \iff \vec{x}_k \xrightarrow{d_\infty} \vec{x}$$

(Άσκηση - Οι αποστάσεις είναι ισοδύναμες).

$d(\vec{x}_k, \vec{x}) \leq d_1(\vec{x}_k, \vec{x})$

$d_1(\vec{x}_k, \vec{x}) \leq \sqrt{n} \cdot d(\vec{x}_k, \vec{x})$ ......

<u>Πρόταση 3</u> (Πληρότητα του $\mathbb{R}^n$). Μια ακολουθία σημείων του $\mathbb{R}^n$ συγκλίνει ανν είναι Cauchy.

(Η σύγκλιση μπορεί να είναι σε οποιαδήποτε από τις d, d_1, d_∞, αφού είναι ισοδύναμες).

(Υπενθύμιση: $(\vec{x}_k)$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}^n$ ~~αν~~ (ως προς d) αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ τ.ω. για $k, m \geq N(\varepsilon)$, $d(\vec{x}_k, \vec{x}_m) < \varepsilon$).

<u>Λήμμα</u> (Άσκηση) Μια ακολουθία $(\vec{x}_k)$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}^n$ ανν $(x_{k,j})$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$ $\forall j = 1, \dots, n$.

- Απόδειξη ~~ως προς~~ - όπως στην Πρόταση 1.

<u>Απόδειξη Πορίσματος 3.</u>

- Ξέρουμε ότι $(x_{k,j})$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ ανν Cauchy στο $\mathbb{R}$ (από πληρότητα του $\mathbb{R}$).

$(\vec{x}_k)$ Cauchy στο $\mathbb{R}^n$ $\overset{\text{Λήμμα}}{\iff}$ $(x_{k,j})$ Cauchy στο $\mathbb{R}$ $\forall j = 1, \dots, n$.

$\overset{\text{Πληρ. του } \mathbb{R}}{\iff}$ $(x_{k,j})$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ με $x_{k,j} \to x_j$ $\forall j = 1, \dots, n$.

$\overset{\text{Πρότ. 1}}{\iff}$ $(\vec{x}_k)$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}^n$.

$\square$

<u>Παρατήρηση:</u> • Δε χρειάζεται να γνωρίζουμε το όριο για να ξέρουμε ότι η $(\vec{x}_k)$ συγκλίνει

• Ένας χώρος X με συνάρτηση απόστασης όπου οι ακολουθίες Cauchy συγκλίνουν ονομάζεται <u>πλήρης.</u>

Απόδειξη

(→) Έστω $(\vec{x}_k)$ συγκλίνουσα στο $\vec{x}$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι η $(\vec{x}_k)$ είναι Cauchy.

δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) > 0$ τ.ω. αν $k, m \geq N$.

τότε $\delta(\vec{x}_k, \vec{x}_m) < \varepsilon$. $\delta = d, d_1, d_\infty$

Επιλέγουμε όποιο θέλουμε. - το πιο απλό εδώ το d_1.

$$d_1(\vec{x}_k, \vec{x}_m) = \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_{m,j}|$$

Ξέρουμε ότι $(\vec{x}_k) \xrightarrow{d_1} \vec{x}$ άρα από πρόταση

$\forall j = 1, \ldots, n$ $x_{k,j} \to x_j$ στο $\mathbb{R}$, άρα

η $(x_{k,j})_{k \in \mathbb{N}}$ είναι και Cauchy.

Δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_j(\varepsilon) > 0$ τ.ω. αν $k, m > N_j(\varepsilon)$

τότε $|x_{k,j} - x_{m,j}| < \varepsilon / n$

Ισχύει για κάθε j.

Άρα επιλέγοντας $N(\varepsilon) = \max_j \{N_1, \ldots, N_n\}$.

για $k, m > N(\varepsilon)$

$$d_1(\vec{x}_k, \vec{x}_m) = \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_{m,j}| < \sum_{j=1}^{n} \varepsilon/n = \varepsilon/n \cdot n = \varepsilon.$$

~~(←) Cauchy. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ τ.ω. $d_1(\vec{x}_k, \vec{x}_k) < \varepsilon \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_{m,j}| < \varepsilon \Rightarrow (x_{k,j})_k$ Cauchy~~ $\forall j$ στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ συγκλίνει.

Παρατήρηση:

- Δε χρειάζεται να γνωρίζουμε το όριο για να ξέρουμε ότι η $(\vec{x}_k)$ είναι συγκλίνουσα
- Ένας χώρος X με συνάρτηση απόστασης όπου οι ακολουθίες Cauchy συγκλίνουν ονομάζεται: πλήρης

$(\Leftarrow)$ $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ τ.ω. για

$k, m > N$ $d_1(\vec{x}_k, \vec{x}_m) < \varepsilon \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_{m,j}| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall j$ $|x_{k,j} - x_{m,j}| < \varepsilon$

Άρα $\forall j$ $(x_{k,j})_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy στο $\mathbb{R}$

Αφού $\mathbb{R}$ πλήρης τότε $(x_{k,j})$ συγκλίνει.

Έστω a_j το όριο.

Από Πρόταση 1 $(\vec{x}_k)$ συγκλίνει επίσης στο $(a_1, \ldots, a_n)$.

QED.

Τοπολογία των $\mathbb{R}^n$. (Ανοικτά κλειστά).

$B(\vec{x}, r) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\vec{y},\vec{x}) < r\}$: ανοικτή μπάλα στο $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός: Για $A \subset \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$A^c = \mathbb{R}^n \setminus A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \notin A\}$$

Το σύνορο του A αποτελείται από τα σημεία $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $\forall \varepsilon > 0$, $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.

Παρατήρηση: $(A^c)^c = A$.

Παραδείγματα:

$\partial A =$ κύκλος που το περιβάλλει $\partial A \not\subset A$

$\partial A = \partial(A^c)$.

$\partial B =$ κύκλος που το περιβάλλει $\partial B \subset B$.

$\partial B = \partial(B^c)$.

Στο $\mathbb{R}$: $(a,b) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = B(x_0, \delta)$

όπου $x_0 = \frac{a+b}{2}$ $\delta = \frac{b-a}{2}$

ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ = ανοικτή μπάλα στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός: Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται ανοικτό αν $\forall \vec{x} \in A$ υπάρχει $\varepsilon(\vec{x})>0$ τ.ω. $B(\vec{x},\varepsilon(\vec{x}))\subset A$.

Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται κλειστό αν K^c είναι ανοικτό.

Παραδείγματα: ($x \equiv \vec{x}$ για απλοποίηση)

① Έστω U_α $\alpha \in A$ (πεπερασμένη αριθμήσιμη ή μη-αριθμήσιμη) συλλογή από ανοικτά σύνολα.

Τότε $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ ανοικτό.

Απόδειξη. Αν $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ τότε $x \in U_\alpha$ για κάποιο α.

Αφού U_α ανοικτό, τότε υπάρχει $\varepsilon(x)>0$ τ.ω. $B(x,\varepsilon(x)) \subset U_\alpha$.

Αφού $B(x,\varepsilon(x)) \subset U_\alpha$, τότε $B(x,\varepsilon(x)) \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$

Άρα $\bigcup_\alpha U_\alpha$ ανοικτό.

② Αν U_α ανοικτά τότε $\bigcap_\alpha U_\alpha$ δεν είναι απαραίτητα ανοικτό.

π.χ. $U_j = \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right) \subset \mathbb{R}$ $\quad j \in \mathbb{N}$

$\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \{0\}$ δεν είναι ανοικτό, αφού

$B(0,\varepsilon) = (-\varepsilon,\varepsilon) \not\subset \{0\} \quad \forall \varepsilon > 0.$

③ Άσκηση $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ με K_α κλειστό $\forall \alpha$, είναι κλειστό.

④ $\{0\}$ είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$.

$\{0\}^c = (-\infty,0) \cup (0,\infty) = B$

Αν $x \in B$
- $x>0$ $\quad B(x,x) = (0,2x) \subset B$
- $x<0$ $\quad B(x,|x|) = (x-|x|, x+|x|) = (2x,0) \subset B$.

B ανοικτό, άρα $\{0\}$ κλειστό.
$\partial B = \{0\}$ αφού $B(0,\varepsilon)$ τέμνει B & B^c. $\partial B = \partial B^c$.

⑤ $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{x}_0\}$ είναι ανοικτό

Έστω $\vec{x} \in A$. $\{\vec{x} \neq \vec{x}_0 \Rightarrow d(\vec{x},\vec{x}_0) > 0$

Τότε $B(\vec{x},\varepsilon)$ με $\varepsilon < \dfrac{d(\vec{x},\vec{x}_0)}{2}$

δεν περιέχει το $\vec{x}_0$, αφού $B(\vec{x},\varepsilon) = \{\vec{y} \mid d(\vec{y},\vec{x}) < \varepsilon\}$

ενώ $d(\vec{x}_0,\vec{x}) > \varepsilon$. Άρα $B(\vec{x},\varepsilon) \subset A$.

$\partial A = \{\vec{x}_0\}$.

⑥ $A = \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{x}_0\}$ επίσης ανοικτό.

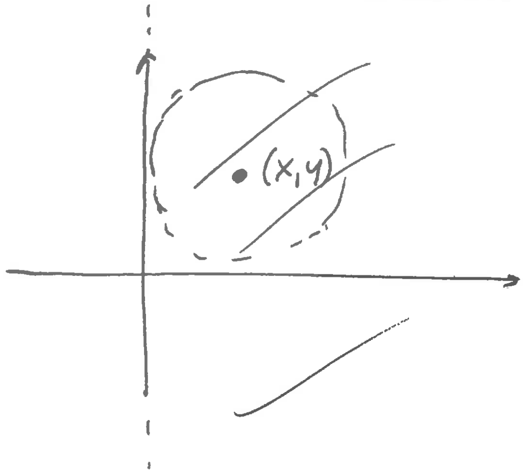
Για $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ έστω $\varepsilon < \dfrac{d(\vec{x},\vec{x}_0)}{2}$.

Τότε $B(\vec{x},\varepsilon) \subset A$. όπως πιο πάνω.

$\partial A = \{\vec{x}_0\}$.

Παρατήρηση: $\partial A = \partial A^c$. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$.

⑦ $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ ανοικτό.



Αν $(x,y) \in \mathcal{U}$ έστω $\varepsilon = \frac{x}{2}$. Τότε

$B = B((x,y),\varepsilon) \subset \mathcal{U}$.

Δηλαδή να δείξουμε πως αν

$(x',y') \in B$, τότε $(x',y') \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x' > 0$.

$$(x',y') \in B((x,y),\varepsilon) \Rightarrow d((x',y'),(x,y)) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} < \varepsilon$$

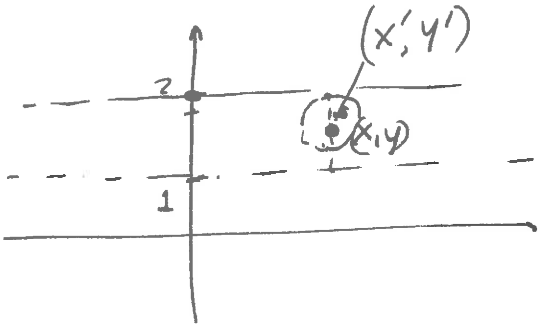
$$\therefore |x'-x| = \sqrt{(x'-x)^2} \leq \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x'-x| < \varepsilon = \frac{x}{2} \Rightarrow -\frac{x}{2} < x'-x < \frac{x}{2} \Rightarrow x' > x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} > 0.$$

$\partial\mathcal{U} = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ αφού $B((0,y),\varepsilon)$ περιέχει $(-\frac{\varepsilon}{2}, y) \notin \mathcal{U}$

και $(\frac{\varepsilon}{2}, y) \in \mathcal{U}$

⑧ $A = \{(x,y) \mid 1 < y < 2\}$



Για $(x,y) \in A$ έστω

$\varepsilon = \min\{\frac{2-y}{2}, \frac{y-1}{2}\}$ και ν.δ.ο. $B((x,y),\varepsilon) \subset A$

Αν $(x',y') \in B((x,y),\varepsilon) \Rightarrow |y'-y| \leq \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} < \varepsilon$

$$\Rightarrow |y'-y| < \min\{\frac{2-y}{2}, \frac{y-1}{2}\}$$

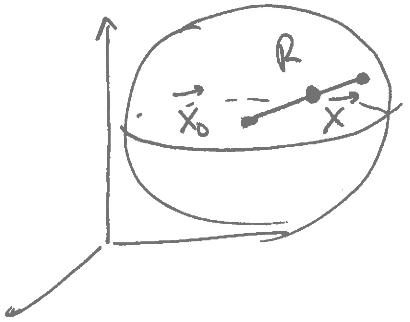
$\therefore\ |y'-y| < \frac{2-y}{2} \Leftrightarrow \frac{y-2}{2} < y'-y < \frac{2-y}{2} \Rightarrow y' < \frac{2+y}{2} < 2$ αφού $y<2$

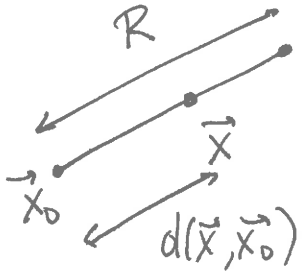
και $|y'-y| < \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-y}{2} < y'-y < \frac{y-1}{2} \Rightarrow y' > \frac{1+y}{2} > 1$ αφού $y>1$

$\therefore\ 1<y'<2 \Rightarrow (x',y') \in A.$

$\partial A = \{(x,1) \mid x\in\mathbb{R}\} \cup \{(x,2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(9) $B(\vec{x}_0,R) \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό.



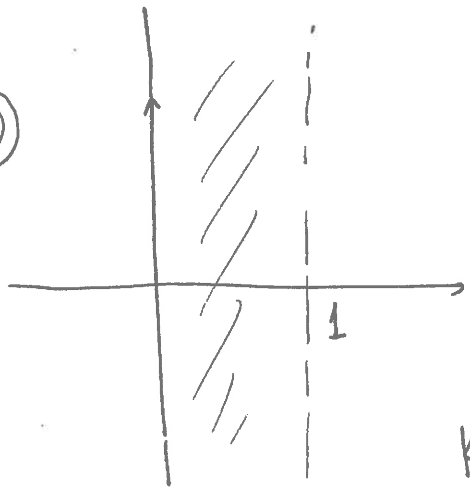


Για $0<\varepsilon< \dfrac{R-d(\vec{x},\vec{x}_0)}{2}$ ν.δ.ο. $B(\vec{x},\varepsilon) \subset B(\vec{x}_0,R)$

Άσκηση.

$\partial B(\vec{x}_0,R) = \{\vec{x} \mid d(\vec{x},\vec{x}_0) = R\}$

(10)



$K = \{(x,y) \mid 0 \le x < 1\}$

K όχι ανοικτό αφού $B((0,y),\varepsilon) \not\subset K$ $\forall \varepsilon>0$.

$K^c = \{(x,y) \mid x<0$ ή $x \geq 1\}$

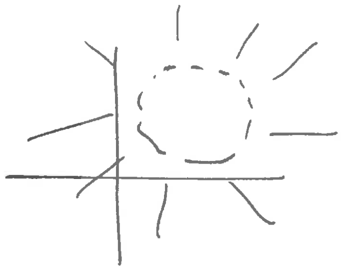
K^c όχι ανοικτό αφού $B((1,y),\varepsilon) \not\subset K^c$ $\forall \varepsilon > 0$

$\therefore\ K$ όχι κλειστό

$\therefore\ K$ ούτε κλειστό ούτε ανοικτό.

(11)  ούτε ανοικτό ούτε κλειστό στο $\mathbb{R}^2$

(12) $A = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(\vec{x_0}, r)} = \{\vec{x} \mid d(\vec{x}, \vec{x_0}) > r\}$



ανοικτό στο $\mathbb{R}^n$.

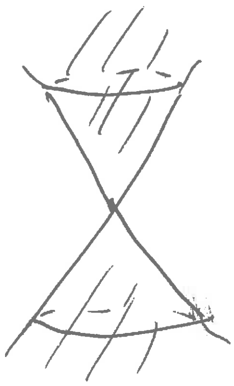
(Άσκηση.)

$$\partial A = \partial \overline{B(\vec{x_0}, r)} = \partial B(\vec{x_0}, r) = \{\vec{x} \mid d(\vec{x}, \vec{x_0}) = r\}$$

Αυστηρή ανισότητα → ανοικτό

"=" → σύνορο / κλειστό

(13) $A = \{x^2 + y^2 \leq z^2\}$



$A^c = \{x^2 + y^2 > z^2\}$

ανοικτό (εξωτερικό του κώνου)

∴ A κλειστό.

$B = \{x^2 + y^2 < z^2\}$ ανοικτό.

$\partial A = \{x^2 + y^2 = z^2\}$

Το ∂A είναι κλειστό στο $\mathbb{R}^3$ αφού

$(\partial A)^c = \{x^2 + y^2 > z^2\} \cup \{x^2 + y^2 < z^2\}$ που είναι ανοικτό!