2) $f(x,y) = x^{1/3} \cdot y^{1/3}$

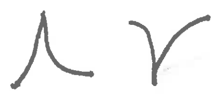
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f = 0$ συνεχής στο $(0,0)$

$f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$

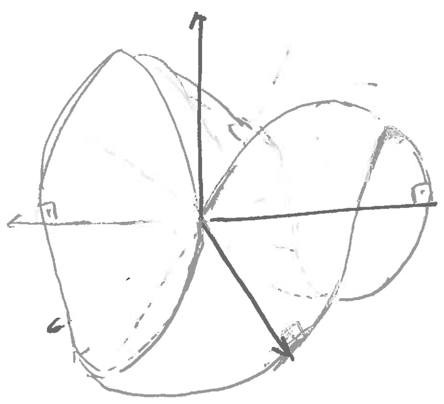
$f_y(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$

Γραφική Παράσταση: $f(0,y) = f(x,0) = 0$

$\left.\begin{array}{l} f(x,x) = x^{2/3} \\ f(x,-x) = -x^{2/3} \end{array}\right\}$ μύτες / cusps.



οι 2 κατευθύνσεις



- άρα δεν πρέπει να είναι διαφορίσιμη...

Παρατήρηση: $f_x = \frac{1}{3} x^{-2/3} y^{1/3}$ μη συνεχής στο $(0,0)$

$f_y = \frac{1}{3} x^{1/3} \cdot y^{-2/3}$ – " –

Συμπέρασμα: • Ύπαρξη μερικών παραγώγων $\not\Rightarrow$ συνέχεια

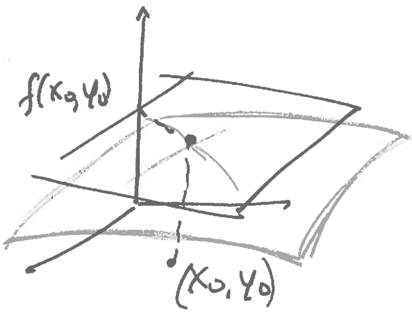
$\not\Rightarrow$ διαφορισιμότητα.

• Ύπαρξη μερικών παραγώγων και συνέχεια $\not\Rightarrow$ διαφορισιμότητα.

Αν $\nabla f(\vec{x}_0)$ ορίζεται τότε δίνει μια γραμμική συνάρτηση

$$L(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$
$$= f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\vec{x}_0)(x_i - x_{0,i})$$

$L(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0)$ και η $L(\vec{x})$ ορίζει ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^{n+1}$ που περνάει από το $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$



Η διαφορισιμότητα της f εξαρτάται κατά πόσο η L είναι η γραμμική προσέγγιση στην f. (αν είναι θα είναι μοναδική.)

<u>Ορισμός:</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: A \to \mathbb{R}$.

• Η f είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in A$, αν η κλίση της $\nabla f(\vec{x}_0)$ ορίζεται και αν επιπλέον

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

Λέμε ότι η (ολική) παράγωγος της f στο x_0 είναι το διάνυσμα κλίσης: $\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$.
$= Df(x_0)$

• Η f είναι διαφορίσιμη στο A, αν είναι διαφορίσιμη σε όλα τα σημεία του A.

Παραδείγματα: ① $f(x)=x^2$ $\quad f'(1)=2.$ $\quad L(x)=1+2\cdot(x-1)$

$$f(x)-L(x)=x^2-1-2x+2=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

2ου βαθμού ως προς $x-1$!

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-L(x)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x-1)=0 \;!$$

$\therefore$ $L(x)$ η καλύτερη γραμμική προσέγγιση

Αφού $f'(1)$ ορίζεται $\therefore f$ διαφορίσιμη.

② $f(x,y)=x^2+y^2$ Διαφορίσιμη στο $(1,2)$;

$f_x=2x$ $\quad f_y=2y.$ $\quad f(1,2)=5.$

$\Downarrow$ $\quad \Downarrow$

$f_x(1,2)=2$ $\quad f_y(1,2)=4$

$$L(x,y)=5+2(x-1)+4(y-2)$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{f(x,y)-L(x,y)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x^2+y^2-5-2(x-1)-4(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x^2-2x-2+1+y^2-4y+8+4}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(1,2)}\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=0.$$

$\therefore f$ διαφορίσιμη στο $(1,2)$

③ $f(x,y)= x^{1/3} y^{1/3}$ Διαφορίσιμη στο $(0,0)$;

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ $f(0,0)=0$ $L(x,y)=0$: υποψήφιο εφ. επίπεδο.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-L(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{1/3}\cdot y^{1/3}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$x=y$: $\lim_{x\to0} \frac{x^{2/3}}{\sqrt{2}\cdot|x|} = \lim_{x\to0}\frac{|x|^{-1/3}}{\sqrt{2}}$ Δ.Ο. ∴ μη διαφορίσιμη.

④ $f(x,y)=\begin{cases} 0 & (x,y)=(0,0) \\ (x^2+y^2)\,\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \neq(0,0)\end{cases}$ Διαφορίσιμη στο $(0,0)$;

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{h^2\cdot\eta\mu\frac{1}{|h|}}{h} = \lim_{h\to0} h\,\eta\mu\frac{1}{|h|} = 0.$$

$-|h| \le h\,\eta\mu\frac{1}{|h|} \le |h|$ Sand. $\to 0$.

$f_y(0,0)=0$ παρόμοια.

$L(x,y)=0$ ~~εφ~~ υποψήφιο εφαπτόμενο επίπεδο.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-L(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\cdot\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$ από Sandwich.

$$-\sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{x^2+y^2}\cdot\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2}$$

Άρα διαφορίσιμη στο $(0,0)$, με εφαπτόμενο επίπεδο $L(x,y)=0$.

$$f_x(x,y) = 2x\cdot\sin\frac{1}{r} + (x^2+y^2)\cdot 2x\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot(x^2+y^2)^{-3/2}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{x\to0} f_x(x,0) = \lim_{x\to0} \cancelto{0}{2x\cdot\sin\frac{1}{|x|}} - \underbrace{\frac{x}{|x|}\cdot\cos\frac{1}{|x|}}_{\Delta.O.}$$ Δ.Ο. ∴ f όχι C^1 στο $(0,0)$!

Πότε είναι διαφορίσιμη η f ?

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αν $C^1 \Rightarrow$ διαφορίσιμη.

<u>Πρόταση 2.</u> : Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A ανοικτό.

1. Αν οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς σε μια περιοχή (γειτονιά) του $\vec{x_0}$, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x_0}$.
2. Αν η f είναι C' στο A (μερικές παράγωγοι συνεχείς στο A) τότε η f είναι διαφορίσιμη στο A.

<u>Απόδειξη.</u> Χωρίς βλάβη της γενικότητας, απόδειξη στο $\mathbb{R}^2$.

Έστω f C' σε γειτονιά του (x_0, y_0).
Δηλαδή $f_x(x,y)$ & $f_y(x,y)$ είναι συνεχείς σε γειτονιά του (x_0, y_0)

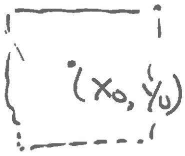
Παίρνουμε $L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

Θέλουμε ν.δ.ο.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - L(x_0+h, y_0+k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = {} & f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) \\ & + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0). \end{aligned}\right\} (*)$$

h, k : μικρά τ.ω. να μη βγαίνουμε από τη γειτονιά του (x_0, y_0) όπου f_x & f_y συνεχείς.



Έστω $g_1(x) = f(x, y_0+k)$

Αφού f_x συνεχής σε γειτονιά του (x_0, y_0),

τότε $g_1'(x)$ συνεχής σε γειτονιά του x_0

Από ΘΜΤ Λογ. Ι. $\exists\, x_0^*$ ανάμεσα στο x_0 & x_0+h τ.ω.

$$g_1(x_0+h) - g_1(x_0) = g_1'(x_0^*)\, h = f_x(x_0^*, y_0+k)\cdot h$$

Παρόμοια, για

$g_2(y) = f(x_0, y)$, $g_2'(y)$ συνεχής σε γειτονιά του y_0

άρα από ΘΜΤ. $\exists\, y_0^*$ ανάμεσα στο y_0 & y_0+k τ.ω.

$$g_2(y_0+k) - g_2(y_0) = g_2'(y_0^*)\cdot k = f_y(x_0, y_0^*)\cdot k.$$

Από $(*)$: $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) =$

$$= g_1(x_0+h) - g_1(x_0) + g_2(y_0+k) - g_2(y_0)$$

$$= f_x(x_0^*, y_0+k)\cdot h + f_y(x_0, y_0^*)\, k.$$

$$\therefore \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - L(x_0+h, y_0+h)}{\|(h,k)\|}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \Bigg(\underbrace{[f_x(x_0^*, y_0+k) - f_x(x_0,y_0)]\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + [f_y(x_0, y_0^*) - f_y(x_0,y_0)]}_{(**)}\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\Bigg)$$

$$\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|, \left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1.$$

$$\therefore |(**)| \leq |f_x(x_0^*, y_0+k) - f_x(x_0,y_0)| + |f_y(x_0,y_0^*) - f_y(x_0,y_0)| \to 0$$

όταν $(h,k)\to(0,0)$ αφού f_x & f_y συνεχής.

Άρα από Sandwich $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - L(x_0+h, y_0+h)}{\|(h,k)\|} = 0$

$\therefore$ f διαφορίσιμη στο (x_0, y_0).

QED

· Στο $\mathbb{R}^n$ το ίδιο με πιο πολλές διαφορές $g_1 \dots g_n$

Πρόταση 3: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: A \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in A$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη: Έστω $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|}$.

f διαφορίσιμη στο x_0 $\Rightarrow$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= | g(x) \|x - x_0\| + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) | \\
&\leq |g(x)| \cdot \|x - x_0\| + |\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)| \\
&\leq \underset{\downarrow \atop 0}{|g(x)|}\ \underset{\downarrow \atop 0}{\|x - x_0\|} + \underbrace{\|\nabla f(x_0)\|}_{\text{φραγμένο}} \cdot \underset{\downarrow \atop 0}{\|x - x_0\|} \quad \text{από C-S}
\end{aligned}
$$

όταν $x \to x_0$ το δεξί μέλος $\to 0$ $\therefore$ $f(x) \to f(x_0)$ όταν $x \to x_0$

$\square$

Περίληψη

$$f \ C^1 \text{ στο } x_0 \overset{\text{Πρ. 2}}{\Longrightarrow} f \text{ διαφ. στο } x_0 \overset{\text{Πρ. 3}}{\Longrightarrow} f \text{ συνεχής στο } x_0$$

$$f \ C^1 \text{ στο } x_0 \overset{\text{Παρ. 4}}{\not\Longleftarrow} f \text{ διαφ. στο } x_0$$

Παρ. 4: $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$f \text{ διαφ. στο } x_0 \overset{2}{\not\Longleftarrow} f \text{ συνεχής στο } x_0$$

$$f \text{ διαφ. στο } x_0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ ορίζονται}, \qquad \not\Longleftarrow \ (1 \ \& \ 2)$$

$$f \text{ συνεχής στο } x_0 \quad \not\Longleftrightarrow \ 1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ ορίζονται}$$

Ιδιότητες της κλίσης:

Πρόταση 4: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f, g : A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες.

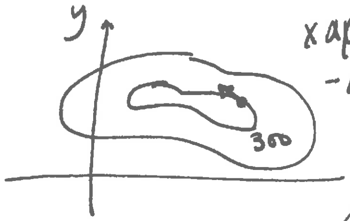
Τότε 1. $\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2. $\nabla(f \cdot g) = f \nabla g + g \nabla f$ (Leibniz).

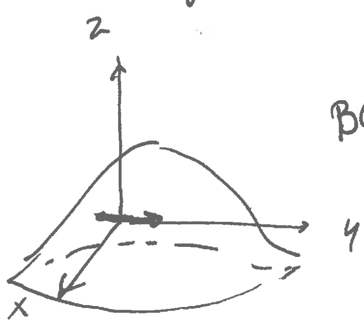
(όπως $\frac{d}{dx}$)

~~Για $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η f μεταβάλλεται σε διάφορες κατευθύνσεις.~~

~~π.χ.~~



~~χάρτης - ισοϋψή σύνολα.~~ — ~~βουνό.~~



~~Ανάλογα με το προς τα που κινούμαστε η f μπορεί να μεταβάλλεται ή όχι~~