Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών.

- Απηρ. 1: $y=f(x)$ $x \in \mathbb{R}$. συνάρτηση της 1 μεταβλητής.

- Στο φυσικό κόσμο υπάρχουν πολλές ποσότητες που χρειάζονται περισσότερες μεταβλητές για να περιγραφούν.

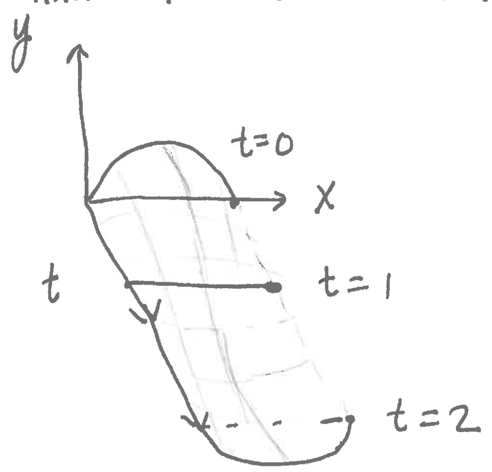
  π.χ. - Ζούμε σε τρισδιάστατο χώρο

  $$\begin{array}{c} z \uparrow \\ \swarrow_x \; \to y \end{array}$$

  Η θερμοκρασία στο χώρο $T(x,y,z)$ σε κάθε σημείο.

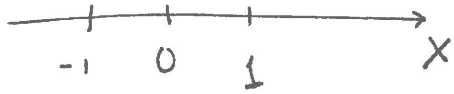
  - Συναρτήσεις που εξαρτώνται από χώρο και χρόνο.

    π.χ. πάλλόμενη χορδή.



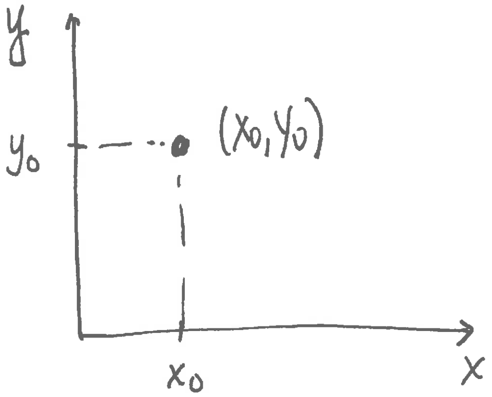
Ευκλείδιοι χώροι:

$\mathbb{R}$



διάστασης 1.

$\mathbb{R}^2$



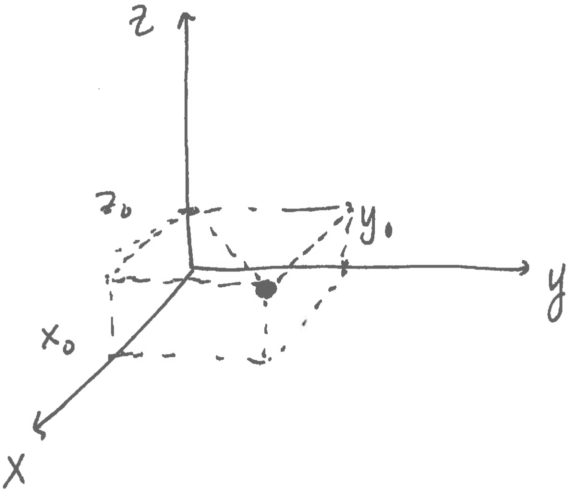
διάστασης 2.

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$(\equiv \{(x_1,x_2) \mid x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}$

Διατεταγμένα ζεύγη έτσι ώστε $(x,y) \neq (y,x)$ όταν $x \neq y$.

$\mathbb{R}^3$



διάστασης 3.

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$(\equiv \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}\}$.

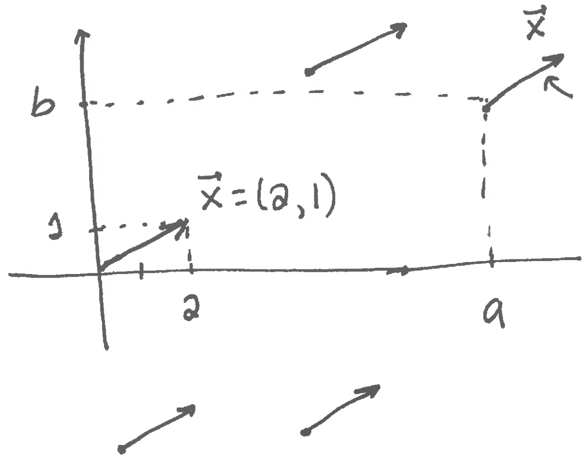
$\mathbb{R}^n$: διάστασης n $\quad \mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots,x_n) \mid x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\}$

$(x_1,x_2,\dots,x_n) = (y_1,y_2,\dots,y_n) \Leftrightarrow x_i = y_i \quad \forall i=1,\dots,n.$

Ένα σημείο $(x_1,\dots,x_n) = \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται και <u>σταθερό διάνυσμα</u> το οποίο αντιστοιχεί στο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $\vec{0}=(0,\dots,0)$ και τέλος το σημείο $(x_1,\dots,x_n)$ και έχει φορά από το $(0,\dots,0)$ προς το $(x_1,\dots,x_n)$

Το <u>ελεύθερο διάνυσμα</u> $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ είναι μια οποιαδήποτε παράλληλη μετατόπιση του διανύσματος που ξεκινά στο $\vec{0}$ και τελειώνει στο $\vec{x}$.

Το $\vec{x}$ συμβολίζει σημείο ή διάνυσμα.



μπορεί να συμβολίζει την ταχύτητα στο σημείο (a,b).

<u>Αλγεβρική Δομή στο $\mathbb{R}^n$</u>

<u>Πρόσθεση</u>: $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ $\quad \vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

$\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$

π.χ. $(1,2)+(-5,7)=(-4,9)$

$(1,2)+(-5,7,8)$ → αδύνατο, προσθέτουμε διανύσματα ίδιας διάστασης!

<u>Βαθμωτό γινόμενο</u>: $\alpha\in\mathbb{R}$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ $\quad \vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ $\quad : \alpha\cdot\vec{x}=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)$

π.χ. $\pi\cdot(1,2,3)=(\pi,2\pi,3\pi)$

$(-5)\cdot(7,-1)=(-35,5)$.

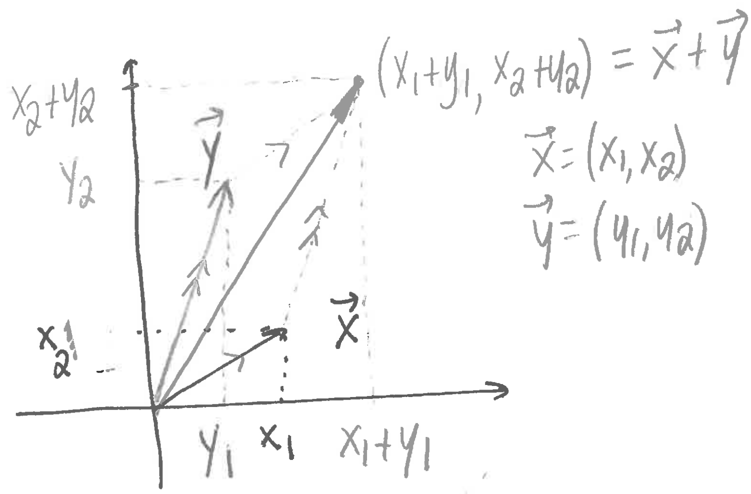
$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$: Διανυσματικός χώρος αφού ισχύουν οι αλγεβρικές ιδιότητες:

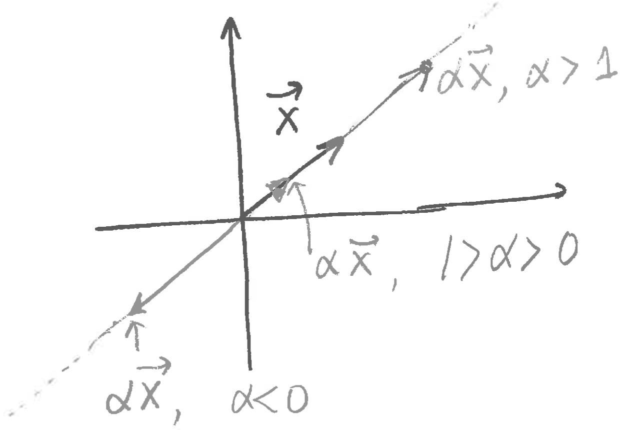
1. $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ (αντιμεταθετική)
2. $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$ (προσεταιριστική)
3. $\exists\,\vec{0}=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$ τ.ω. $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$ (μηδενικό στοιχείο)
4. $\forall\,\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\exists\,(-\vec{x})\in\mathbb{R}^n$ τ.ω. $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$ (αντίθετος)
5. $\exists\,1\in\mathbb{R}$ τ.ω. $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$. (πολ/κή μονάδα)
6. $(\alpha\cdot\beta)\vec{x}=\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{x})$

$$\left.\begin{array}{ll} 7. & (\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{x} \\ 8. & \alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\cdot\vec{y} \end{array}\right\}\ \text{επιμεριστικές.}$$

<u>Γεωμετρική Ερμηνεία:</u>

$\mathbb{R}^2$

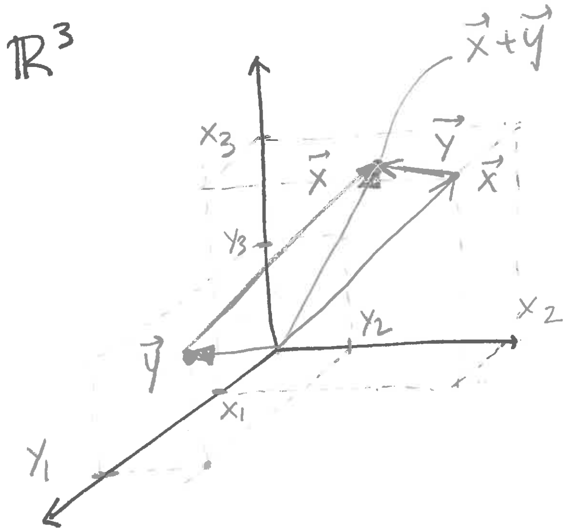




<u>Ορισμός:</u> Τα $\vec{u},\vec{v}$ είναι <u>παράλληλα</u> αν υπάρχει $\lambda \neq 0$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ τ.ω. $\vec{v} = \lambda \vec{u}$

Ονομάζονται <u>συγγραμμικά</u> αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ ή $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ (ένα από τα δύο μπορεί να είναι $\vec{0}$).

$\mathbb{R}^3$



$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$\vec{y} = (y_1, y_2, x_3)$

<u>Ορθοκανονική βάση:</u>

Για το $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \vec{e_1} = \hat{e}_1 = (1,0) \equiv \vec{i} = \hat{i} \\ \vec{e_2} = \hat{e}_2 = (0,1) \equiv \vec{j} = \hat{j} \end{cases}$ $\qquad \vec{x} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} = \sum_{i=1}^{2} x_i \hat{e}_i$

Για το $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} \vec{e_1} = \hat{e}_1 = (1,0,0) \equiv \vec{i} = \hat{i} \\ \vec{e_2} = \hat{e}_2 = (0,1,0) \equiv \vec{j} = \hat{j} \\ \vec{e_3} = \hat{e}_3 = (0,0,1) \equiv \vec{k} = \hat{k} \end{cases}$ $\qquad \vec{x} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k} = \sum_{i=1}^{n} x_i \hat{e}_i$

Για το $\mathbb{R}^n$: $\begin{cases} \vec{e_1} = (1,0,\dots,0) \\ \vec{e_2} = (0,1,0,\dots,0) \\ \vdots \\ \vec{e_n} = (0,0,\dots,1) \end{cases}$ $\qquad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \hat{e}_i$

Επιπλέον Δομές στο $\mathbb{R}^n$

Εσωτερικό Γινόμενο: Για $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$ ορίζουμε το εσωτερικό τους γινόμενο ως:

$$\vec{x}\bullet\vec{y} = x_1\cdot y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n\cdot y_n \quad (\in \mathbb{R}).$$

Εναλλακτικά γράφουμε: $\vec{x}\cdot\vec{y} = \langle \vec{x},\vec{y}\rangle$.

Ιδιότητες:

i) $\vec{x}\bullet\vec{x} \geq 0$ με $\vec{x}\cdot\vec{x}=0$ αν $\vec{x}=\vec{0}$

ii) $(\alpha\cdot\vec{x})\bullet\vec{y} = \alpha(\vec{x}\bullet\vec{y}) = \vec{x}\bullet(\alpha\vec{y})$

iii) $\vec{x}\bullet(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\bullet\vec{y} + \vec{x}\cdot\vec{z}$

iv) $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$.

Απόδειξη: (i) $\vec{x}\bullet\vec{x} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

αφού άθροισμα τετραγώνων.

"$=0$" $\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 = \dots = x_n^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \ \forall i$

αφού άθροισμα μη-αρνητικών.

Τα υπόλοιπα άσκηση.

<u>Μήκος /Νόρμα Διανύσματος:</u> Για $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$

η <u>νόρμα/μήκος</u> του $\vec{x}$ ορίζεται ως $\|\vec{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$

Παρατήρηση: $\|\vec{x}\|=(\vec{x}\cdot\vec{x})^{1/2}$

<u>Ιδιότητες:</u> (i) $\|\vec{x}\|\geq 0$, "=" 0 ανν $\vec{x}=\vec{0}$

(ii) $\|\lambda\vec{x}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{x}\|$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$

(iii) $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$. Τριγωνική ανισότητα.

(iv) Αν $\vec{x}\neq\vec{0}$ τότε $\hat{x}:=\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ είναι παράλληλο

με το $\vec{x}$, με μήκος 1.

<u>Απόδειξη:</u> (ii) $\|\lambda\vec{x}\|=\sqrt{(\lambda\vec{x})\cdot(\lambda\vec{x})}=\sqrt{\lambda^2(\vec{x}\cdot\vec{x})}=|\lambda|\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$

$=|\lambda|\cdot\|\vec{x}\|$

(iii) $n=2$: $\vec{x}=(x_1,x_2)$ $\vec{y}=(y_1,y_2)$

$\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|\iff\|\vec{x}+\vec{y}\|^2\leq(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2$

Α.Μ: $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=\|(x_1+y_1,x_2+y_2)\|^2=(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2$

$=x_1^2+y_1^2+2x_1y_1+x_2^2+y_2^2+2x_2y_2$

Δ.Μ: $(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|=$

$=x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}$

$\text{ΑΜ}\leq\text{Δ.Μ}\iff x_1y_1+x_2y_2\leq\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}$ (*)

όχι τόσο απλό ξέρουμε ότι $x_1,x_2\leq\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

$y_1,y_2\leq\sqrt{y_1+y_2^2}$

Παρατήρηση: $\text{Α.Μ}=\vec{x}\cdot\vec{y}\leq\text{Δ.Μ.}=\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$

Στο $\mathbb{R}^n$:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq \left(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) \leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\vec{x}\cdot\vec{x}} + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \cancel{\vec{y}\cdot\vec{y}} \leq \cancel{\|\vec{x}\|^2} + \cancel{\|\vec{y}\|^2} + 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|.$$

$$\Leftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \leftarrow$$ Ανισότητα Cauchy-Schwartz.

<u>Θεώρημα</u> (Ανισότητα Cauchy-Schwartz).

$\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad |\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|.$

<u>Απόδειξη:</u> (I) Αν $\vec{x},\vec{y}$ συγγραμμικά, τότε $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω.
$\vec{x}=\lambda\vec{y}$ ή $\vec{y}=\lambda\vec{x}$.

Αν $\vec{x}=\lambda\vec{y}$: $|\vec{x}\cdot\vec{y}| = |(\lambda\vec{y})\cdot\vec{y}| = |\lambda|\,\vec{y}\cdot\vec{y} = |\lambda|\,\|\vec{y}\|^2$

Αφού $\|\vec{x}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{y}\|$ ~~και~~ $\cancel{\lambda \leq |\lambda|}$

Παίρνουμε $|\vec{x}\cdot\vec{y}| = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$

Παρόμοια αν $\vec{y}=\lambda\vec{x}$

(II) Αν μη-συγγραμμικά τότε $\vec{x},\vec{y} \neq \vec{0}$ και
$\vec{x}-\lambda\vec{y} \neq \vec{0} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. (διαφορετικά συγγραμμικά).

Άρα $(\vec{x}-\lambda\vec{y})\cdot(\vec{x}-\lambda\vec{y}) > 0 \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{x} - 2\lambda\,\vec{x}\cdot\vec{y} + \lambda^2\,\vec{y}\cdot\vec{y} > 0$

Έχουμε πολυώνυμο της μορφής
$a\lambda^2+b\lambda+c>0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ με

$a=\vec{y}\cdot\vec{y}>0, \quad b=-2\vec{x}\cdot\vec{y}$ και $c=\vec{x}\cdot\vec{x}$

Άρα η διακρίνουσα $\Delta<0 \Rightarrow b^2-4ac<0$

$$\Rightarrow 4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 - 4(\vec{y}\cdot\vec{y})(\vec{x}\cdot\vec{x}) < 0 \Rightarrow (\vec{x}\cdot\vec{y})^2 < \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{x}\cdot\vec{y}| < \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

QED

• Εναλλακτικά: Έστω $\lambda = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\vec{y}\cdot\vec{y}}$ αν $\vec{y} \neq \vec{0}$

και $(\vec{x}-\lambda\vec{y})\cdot(\vec{x}-\lambda\vec{y}) \geq 0$.

<u>Πόρισμα</u>: (i) Η τριγωνική ανισότητα $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

(ii) Σε συντεταγμένες $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$

έχουμε:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

(Ισχύει ότι $x_j y_j \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$ για το κάθε ένα j

όμως αυτή η ανισότητα δεν αρκεί για να πάρουμε τη C-S.

(iii) Θέτοντας $\vec{y}=(1,1,\dots,1)$ παίρνουμε:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right) = n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sqrt{n}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \iff \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sqrt{n}\cdot\|\vec{x}\|.$$

<u>Άσκηση</u> Να δείξετε ότι $\big|\|\vec{x}\|-\|\vec{y}\|\big| \leq \|\vec{x}+\vec{y}\|$ $\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

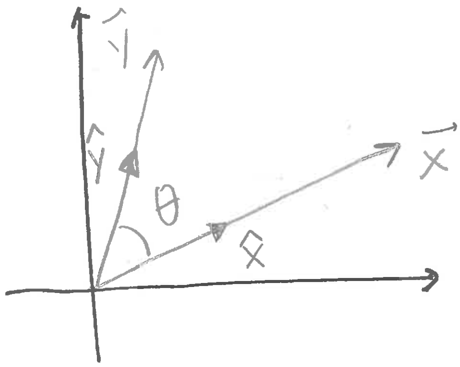
<u>Ορισμός</u>: Η <u>γωνία</u> ανάμεσα σε δύο διανύσματα $\vec{x},\vec{y}$

ορίζεται ως η $0 \leq \theta \leq \pi$ τ.ω. $\vec{x}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos\theta$.

Όταν $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$, τότε τα $\vec{x},\vec{y}$ ονομάζονται <u>κάθετα</u>

$(\theta = \frac{\pi}{2})$

π.χ. $\hat{i}+2\hat{j} \perp -2\hat{i}+\hat{j}$

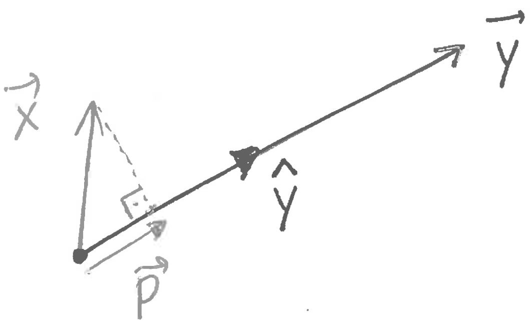


$$\cos\theta = \left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)\cdot\left(\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\right) = \hat{x}\cdot\hat{y}$$

$$|\hat{x}\cdot\hat{y}| \le \|\hat{x}\|\cdot\|\hat{y}\| = 1 \Rightarrow -1 \le \hat{x}\cdot\hat{y} \le 1$$

Η <u>προβολή</u> του $\vec{x}$ στην κατεύθυνση $\vec{y}$ ορίζεται ως:

$$\vec{p} = \left(\vec{x}\cdot\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\right)\cdot\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \underbrace{(\vec{x}\cdot\hat{y})}_{\in\mathbb{R}}\cdot\hat{y}$$



Βαθμωτό γινόμενο & Εσωτερικό γινόμενο : στο $\mathbb{R}^3$.
Στο $\mathbb{R}^3$ (μόνο) έχουμε εξωτερικό γινόμενο (Ροπή στη Φυσική).

<u>Ορισμός</u>: Για $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$ το εξωτερικό/διανυσματικό τους γινόμενο δίνεται από:

$$\vec{x}\times\vec{y} = \text{"}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}\text{"} := \begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix}x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\hat{k}$$

μόνο σαν τύπος, δεν είναι ορίζουσα πίνακα.

Ιδιότητες:

(i) $\vec{x}\times\vec{y} = -\,\vec{y}\times\vec{x}$

(ii) $\vec{x}\times(\vec{y}+\vec{w}) = \vec{x}\times\vec{w} + \vec{y}\times\vec{w}$

(iii) $\vec{x}\times(\lambda\vec{y}) = (\lambda\vec{x})\times\vec{y} = \lambda(\vec{x}\times\vec{y})$

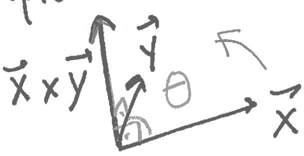
(iv) $\vec{x}\times\vec{x} = \vec{0}$

(v) $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{w} \neq \vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{w})$ γενικά.

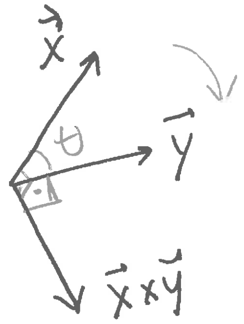
$$(\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{w}) = (\vec{x}\cdot\vec{w})\vec{y} - (\vec{x}\cdot\vec{y})\cdot\vec{w}.$$

Γεωμετρικές Ιδιότητες.

1. Το $\vec{x}\times\vec{y}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{x},\vec{y}$ με φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.



$0\leq\theta\leq\pi$



2. $\|\vec{x}\times\vec{y}\| = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cdot\sin\theta \quad 0\leq\theta\leq\pi$: Το εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα $\vec{x},\vec{y}$

3. $(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{w}$ $\equiv \pm$ όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα $\vec{x},\vec{y},\vec{w}$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$: Μικτό Γινόμενο.

"$=0$" ανν $\vec{x},\vec{y},\vec{w}$ Γραμμικά Εξαρτημένα

"$\neq 0$" ανν Γραμμικά Ανεξάρτητα. -δηλαδή σχηματίζουν παραλληλεπίπεδο

Γραφήματα και Συναρτήσεις

$\mathbb{R}^n$: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\mathbb{R}^2$: $\vec{x} = (x_1, x_2)$ Κλασσικά: (x,y) $x \sim x_1$, $y \sim x_2$

$\mathbb{R}^3$: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ Κλασσικά: (x,y,z) $x \sim x_1$, $y \sim x_2$, $z \sim x_3$

Ανάλογα με το ποιο είναι το πιο απλό θα συμβολίζουμε με διαφορετικό τρόπο τα σημεία/διανύσματα στα $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

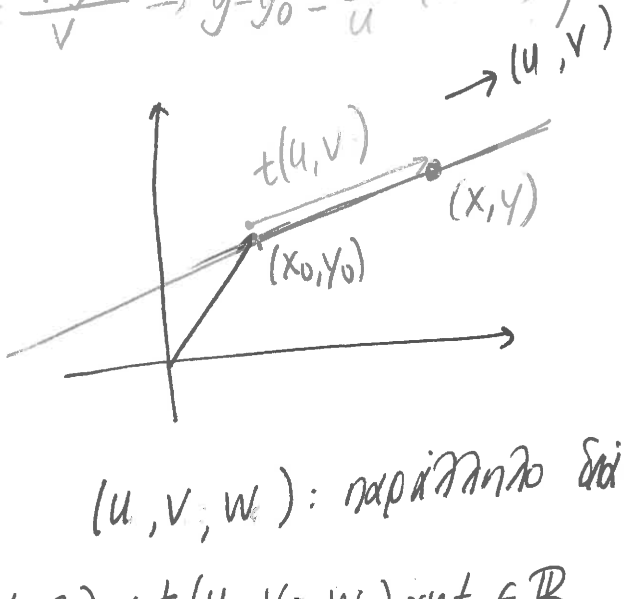
Εξίσωση Ευθείας:

Στο $\mathbb{R}^2$: Καρτεσιανή εξίσωση: $y = ax + b$ ή $x = c$

Γράφημα τα σημεία $\{(x, ax+b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ή $\{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

Παραμετρική εξίσωση ευθείας: $\begin{cases} x = x_0 + tu \\ y = y_0 + tv \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (x_0, y_0) + t(u,v)$ για $t \in \mathbb{R}$.

(Αν $\begin{matrix} u \neq 0 \\ v \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow t = \dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v} \Rightarrow y - y_0 = \dfrac{v}{u}(x - x_0)$)



(x_0, y_0): σημείο από όπου περνά

(u, v): παράλληλο διάνυσμα.

Στο $\mathbb{R}^3$: (x_0, y_0, z_0): σημείο (u, v, w): παράλληλο διάνυσμα.

Ευθεία $(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(u, v, w)$, για $t \in \mathbb{R}$

Για καρτεσιανή λύνουμε ως προς t:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}$$

2 γραμμικές εξισώσεις ≡ τομή 2 επιπέδων.

Στο $\mathbb{R}^n$: $\vec{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})$ σημείο

$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ παράλληλο διάνυσμα.

Εξίσωση ευθείας: $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\cdot\vec{v}$ για $t\in\mathbb{R}$

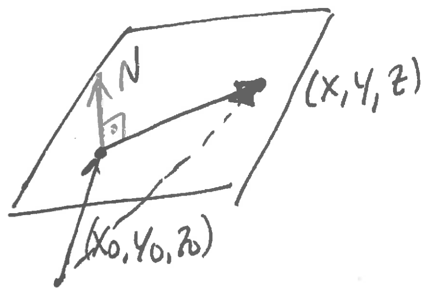
$$\begin{cases} x_1(t) = x_{0,1} + t v_1 \\ \vdots \\ x_n(t) = x_{0,n} + t\cdot v_n \end{cases}$$

Εξίσωση Επιπέδου στο $\mathbb{R}^3$.

- Καρτεσιανή Εξίσωση: $Ax + By + \Gamma z = \Delta$ $\quad A, B, \Gamma, \Delta$ σταθερές.

  -δηλαδή τα $\{(x,y,z) \mid Ax + By + \Gamma z = \Delta\} = \Pi$

- Για $\vec{N} = (A, B, \Gamma)$ κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο και σημείο (x_0, y_0, z_0)



$$\Pi = \{(x,y,z) \mid ((x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)) \perp \vec{N}\}$$

$$= \{(x,y,z) \mid (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot\vec{N} = 0\}$$

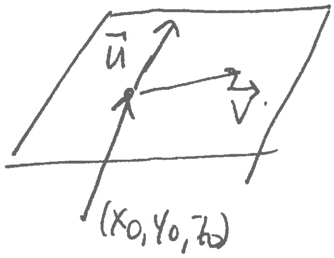
$$= \{(x,y,z) \mid Ax + By + \Gamma z = \underbrace{Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0}_{\Delta}\}$$

- Επίπεδο που περνά από 3 σημεία $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: $\vec{N} = (\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{w}-\vec{v})$

- Παραμετρική Εξίσωση Π περνά από σημείο (x_0, y_0, z_0) και παράγεται από 2 μη-συγγραμμικά (Γ.Α.) διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$: $\Pi = \{(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t\vec{u} + s\vec{v} \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

  Εξίσωση: $(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t\vec{u} + s\vec{v}$

$$\begin{cases} x(s,t) = x_0 + t u_{0,1} + s v_{0,1} \\ y(s,t) = y_0 + t u_{0,2} + s v_{0,2} \\ z(s,t) = z_0 + t u_{0,3} + s v_{0,3} \end{cases}$$



Στο $\mathbb{R}^n$ Επίπεδο είναι το χωρίο/περιοχή που παράγεται από δύο μη-συγγραμμικά διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ και περνά από το $\vec{x_0}$

$$\vec{x}(s,t) = \vec{x_0} + t\vec{u} + s\cdot\vec{v}, \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

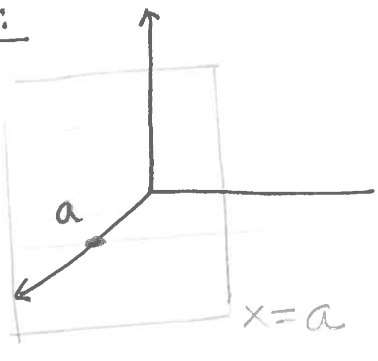
Παραμετρική εξίσωση επιπέδου στο $\mathbb{R}^n$

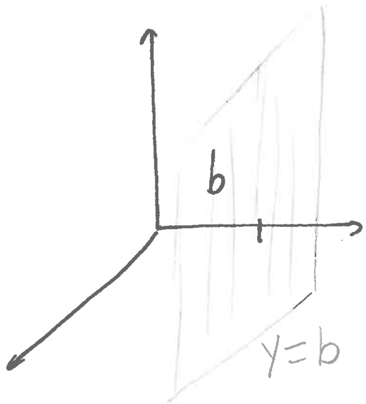
- Μπορούμε να τα δούμε και σαν υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

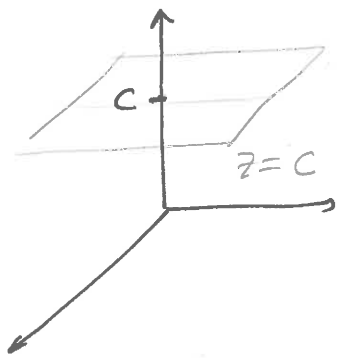
π.χ. Ευθεία στο $\mathbb{R}^n$: $\ell = \{ \vec{x} = \vec{x_0} + t\vec{v} \,/\, t \in \mathbb{R} \}$

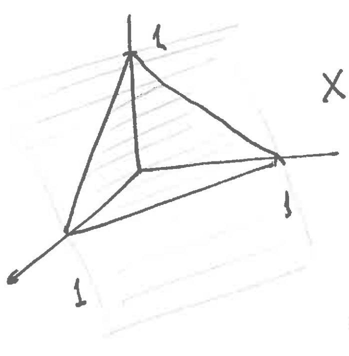
Επίπεδο στο $\mathbb{R}^n$: $\Pi = \{ \vec{x} = \vec{x_0} + t\vec{v} + s\vec{u} \,/\, t,s \in \mathbb{R} \}$

Παραδείγματα:









$x + y + z = 1.$