Εναλλακτική ορολογία:

Μια μετρική: $\langle , \rangle : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ είναι ένας

διγραμμικός τελεστής.
ονομάζεται και τανυστής $\binom{2}{0}$.

$g(X,Y) := \langle X,Y \rangle$ για X,Y διαν.. πεδία.

Ο <u>συνεφαπτόμενος χώρος</u> T^*M ορίζεται ως ο δυϊκός χώρος του TM που δίνεται από:

$T^*M = \{ \omega : T_pM \to \mathbb{R} \mid$ τ.ω. για $\forall X \in T_pM$, $\omega(X) \in \mathbb{R}$ και ω γραμμική$\}$.

Αν $\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \}$ αποτελεί βάση για το T_pM

τότε ορίζουμε $dx^j : T_p M \to \mathbb{R}$ τ.ω. $dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \delta^j_i$

όπου $\delta^j_i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$. με την ιδιότητα να είναι γραμμικός τελεστής.

Το σύνολο $\{ dx^1, \dots, dx^n \}$ αποτελεί βάση για το T_p^*M και κάθε $\omega \in T^*M$ γράφεται ως

$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$ είναι τανυστής τάξης $\binom{0}{1}$

Μπορούμε τότε να γράψουμε τη μετρική g στη μορφή:

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \equiv \sum_{i=1}^n g_{ij}\, dx^i dx^j$$

η οποία ερμηνεύεται ως:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \cdot dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, \delta^i_k \cdot \delta^j_l = g_{kl}.$$

Τότε αν $v=\sum v_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ $w=\sum_l w_l \frac{\partial}{\partial x_l}$

$$g(v,w)=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, v_i\, v_j \quad \left(=\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\, v_k\, v_l\right).$$

αφού $dx^i(v) = \sum_{k=1}^{n} v_k\, dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = v_i$

$\uparrow$ γραμμικότητα.

- Αφού η μετρική είναι συμμετρική, τότε $g_{ij}=g_{ji}$
- Στο $\mathbb{R}^n$: $g=\sum_{i,j=1}^{n}\delta_{ij}\, dx^i dx^j$
- Στο υπερβολικό επίπεδο $g=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

<u>Ορισμός</u>: Μια διαφ. πολλ/τα M στην οποία ορίζεται μετρική Riemann, g, ονομάζεται πολλ/τα Riemann (M,g).

- Για $X\in T_pM$ ορίζουμε $|X|=g(X,X)^{1/2}\ \left(=\langle X,X\rangle^{1/2}\right)$

  και για $X,Y\in T_pM$ $\cos\theta=\frac{\langle X,Y\rangle}{|X|\,|Y|}$ όπου θ η γωνία μεταξύ τους.

  Αν $\langle X,Y\rangle=0$ τα X,Y ονομάζονται κάθετα.

  Ένα σύνολο διανυσμάτων $E_1,\dots,E_k\in T_pM$ ονομάζονται ορθοκανονικά αν $\langle E_i,E_j\rangle=\delta_{ij}$

<u>Παρατήρηση:</u> Σε μια γειτονιά συντεταγμένων (U, X) της M^n μπορεί ~~πάντα~~ πάντα να βρεθεί ένα ορθοκανονικό πλαίσιο διανυσματικών πεδίων $\{E_1, \dots, E_n\}$ τα οποία να είναι C^∞. - με τη μέθοδο Gram Schmidt. $(\langle E_i, E_j \rangle_p = \delta_{ij} \quad \forall p \in X(U))$

Όμως τα $\{E_i\}_{i=1}^n$ δεν αντιστοιχούν απαραίτητα σε πλαίσιο συντεταγμένων - δηλαδή $E_i \neq \frac{\partial}{\partial x_i}$ γενικά.

Αν υπάρχει ορθοκανονικό πλαίσιο συντεταγμένων τότε η M έχει "επίπεδη" μετρική με $K \equiv 0$ π.χ. $\mathbb{R}^n$, κύλινδρος.

- Για πλαίσιο συντεταγμένων $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ ενώ

$[E_i, E_j] \neq 0$ γενικά.

<u>Παράδειγμα:</u> $\mathbb{R}^n$: $g = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\, dx^i dx^j = \sum_{i=1}^n dx^i dx^i$

$\mathbb{R}^2$: $g = dx^2 + dy^2$ ευκλείδεια μετρική.

Πώς γράφεται αυτή η μετρική σε πολικές συντεταγμένες;

$\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x \geq 0\}$ όπου $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$

$\phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\}$ βάση για $T_p\mathbb{R}^2$ στο U.

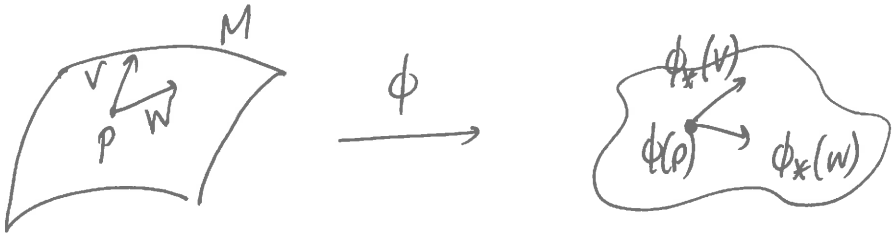
$\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ βάση για $T_{\phi(p)}\mathbb{R}^2$ στο π.τ.

Θέλουμε ο διαφορομορφισμός ϕ να είναι <u>ισομετρία</u> δηλαδή να διατηρεί τα μέτρα των διανυσμάτων.

<u>Ορισμός</u>: Ένας διαφορομορφισμός $\phi: M \to N$ ανάμεσα σε δύο πολλές Riemann ονομάζεται <u>ισομετρία</u>, αν

$$g_M(v,w)_p = g_N(d\phi_p(v), d\phi_p(w))_{\phi(p)} \quad \forall p \in M \quad v,w \in T_pM$$

όπου g_M · η μετρική στην M και g_N η μετρική στην N



$d\phi$: διατηρεί γωνίες ανάμεσα σε διανύσματα και το μήκος τους. (τη νόρμα τους).

Στο πιο πάνω παράδειγμα $M = U$ ως προς (r,θ)
$N = \mathbb{R}^2$ ως προς (x,y)

$$g_N = dx^2 + dy^2 = dx\,dx + dy\,dy$$

να βρεθεί $g_M = g_{11}\,dr\,dr + \underbrace{g_{12}\,dr\,d\theta + g_{21}\,d\theta\,dr}_{=2g_{12}\,dr\,d\theta} + g_{22}\,d\theta^2$.

τ.ω. ϕ ισομετρία.

$$d\phi: \quad [D\Phi] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = [D\Phi]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$d\phi\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = [D\Phi]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{bmatrix} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\therefore\ g_M\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = g_{11} = g_N\left(d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) =$$

$$= g_N\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}, \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}\right) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$g_M\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = g_{12} = g_N\left(d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right) =$$

$$= g_N\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}, -r\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0$$

$$g_M\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = g_{22} = g_N\left(-r\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y}, -r\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= r^2\sin\theta^2 + r^2\cos^2\theta = r^2$$

$\therefore\ g_M = dr^2 + r^2 d\theta^2$: η μετρική σε πολικές.

$g_M = \phi^*(g_N)$: το pull back της ευκλείδιας μετρικής σε πολικές συντεταγμένες.

- $\phi_*: v \in T_p M \to \phi_*(v) \in T_{\phi(p)} N$

  $\phi^*: dx^i \in T^*_{\phi(p)} N \to \phi^*(dx^i) \in T^*_p M.$

Υπολογισμός του g_M με εναλλακτικό τρόπο.

$$\phi^*(dx) := d(x \circ \phi(r,\theta)) = d(r\cos\theta) = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$$

$$\phi^*(dy) := d(y \circ \phi(r,\theta)) = d(r\sin\theta) = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta.$$

$$\therefore \phi^*(g_N) = \phi^*(dx\,dx + dy\,dy) =$$

$$= \phi^*(dx)\,\phi^*(dx) + \phi^*(dy)\,\phi^*(dy) =$$

$$= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)^{\text{"}2\text{"}} + (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)^{\text{"}2\text{"}}$$

$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,dr^2 + r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta^2$$
$$- 2r\cos\theta\sin\theta dr d\theta + 2\sin\theta \cdot r \cdot \cos\theta dr d\theta$$

$(dr\,d\theta = d\theta\,dr)$ $$= dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Υποπολλαπλότητες:

Έστω (N, g_N) πολλ/α Riemann.

Έστω $i: M^n \hookrightarrow N^{n+m}$ μια εμβυθισμένη πολλ/α στην N (immersed) τ.ω. i διαφορίσιμη και $di_p: T_pM \to T_{i(p)}N$ 1-1.

Αν g_N η μετρική Riemann στην N, τότε η παγόμενη μετρική στην M ορίζεται ως $g_M = i^* g_N$.

$(M^n, i^*(g_N))$ ονομάζεται ισομετρική εμβύθιση της M στην N

Παραδείγματα: ①

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] & N \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "I"] & \mathbb{R}^{n+m} \arrow[u, "\Phi"] \end{tikzcd}$$

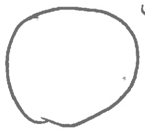
$I \equiv i$ σε συντεταγμένες.

$i: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ $\quad i(u_1, \dots, u_n) = (x_1, \dots, x_{n+m})$ $\quad x_i = x_i(u_1, \dots, u_n)$.

Τότε το $dx^i dx^j$ της g_N γίνεται:

$$i^*(dx^i dx^j) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_k} du^k \cdot \frac{\partial x_j}{\partial u_l} du^l \qquad \text{αφού } i^*(dx^i) = d(x^i(u_1, \dots, u_n))$$

②



$S^1 \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{tikzcd} i: S^1 \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^2 \\ (0,2\pi) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[ur, "I \equiv i"'] & \end{tikzcd}$$

I ταυτίζεται με i

$$i(t) = (R\cos t, R\sin t)$$

$$i^*(dx) = d(R\cos t) = -R\sin t \, dt$$

$$i^*(dy) = d(R\sin t) = R\cos t \, dt$$

$$\therefore \ i^*(dx^2 + dy^2) = R^2 dt^2.$$

Αν $\gamma(t)$ ο κύκλος, $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$ στο $\mathbb{R}^2$, τότε $\Phi^{-1} \circ \gamma(t) = t$ για $t \in (0, 2\pi)$

Σε συντεταγμένες, $\gamma'(t) = \frac{\partial}{\partial t}$ $\quad \therefore \ \|\gamma'(t)\| = R$.

③ Σφαίρα $S^2_R \subset \mathbb{R}^3$ σε σφαιρικές συντ.

$$i(\theta,\phi) = (R\cos\theta\sin\phi,\ R\sin\theta\sin\phi,\ R\cos\phi)$$

$$i^*(dx) = -R\sin\theta\sin\phi\, d\theta + R\cos\theta\cos\phi\, d\phi$$

$$i^*(dy) = R\cos\theta\sin\phi\, d\theta + R\sin\theta\cos\phi\, d\phi$$

$$i^*(dz) = -R\sin\phi\, d\phi.$$

$$\therefore\ i^*(dx^2+dy^2+dz^2) = \dots = R^2\sin^2\phi\, d\theta^2 + R^2 d\phi^2.$$

$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\phi}\right\}$ είναι κάθετα μεταξύ τους όχι όμως μοναδιαία

Αν $\gamma(t)$ παράλληλος κύκλος, $\gamma(t) = (t, \phi_0)$ σε συντεταγμένες, με $\gamma'(t) = \frac{\partial}{\partial\theta}$ $(=(1,0))$ για $t \in (0, 2\pi)$

$$\therefore\ L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta} \right\rangle^{1/2} dt = \int_0^{2\pi} R\sin\phi_0\, dt$$

$$= 2\pi R\sin\phi_0$$

$R\sin\phi_0$ η ακτίνα του.

Γινόμενα πολλαπλοτήτων:

Έστω (M_1, g_1) (M_2, g_2) πολ/τες Riemann.

Στην πολ/τα γινόμενο $M_1 \times M_2$ παρατηρούμε ότι

$T_{(p_1,p_2)} M_1 \times M_2 = T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2$ για $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$

Δηλαδή αν $X \in T_p(M_1 \times M_2)$ τότε $X = X_1 + X_2$ με

$X_1 \in T_{p_1} M_1$ και $X_2 \in T_{p_2} M_2$.

Ορίζουμε τη μετρική g στην $M_1 \times M_2$ τ.ω.

$$g(X, Y) = g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2).$$

για $X_i, Y_i \in T_{p_i} M_i$.

- $(M_1 \times M_2, g)$ είναι πολ/τα Riemann. (g όντως είναι μετρική - έλεγχος)

Για παράδειγμα:

Αν $M_1 = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ με μετρική $g^1 = \sum_{i,j} g^1_{ij} dx^i dx^j$

και $M_2 = \mathbb{R}^m = \{(y_1, \dots, y_m)\}$ με μετρική $g^2 = \sum_{k\ell} g^2_{k\ell} dy^k dy^\ell$

Τότε $(M_1 \times M_2, g)$ όπου $g = \sum_{i,j} g^1_{ij} dx^i dx^j + \sum_{k,\ell} g^2_{k\ell} dy^k dy^\ell$

είναι πολ/τα Riemann.

- $M_1 \times M_2 = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ και

$$T_{(p_1,p_2)} M_1 \times M_2 = \left\{ \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_k b_k \frac{\partial}{\partial y_k} \;\middle|\; a_i, b_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Παρ. Κύλινδρος $S^1 \times \mathbb{R}$ σε συντεταγμένες (θ, t)

$g^{S^1} = d\theta^2$ και $g^{\mathbb{R}} = dt^2$ τότε $(S^1 \times \mathbb{R}, g)$

με $g = d\theta^2 + dt^2$ είναι ο επίπεδος κύλινδρος $(K=0)$

Δομές που επιτρέπει η ύπαρξη μετρικής:

Μήκος καμπύλης.

Καμπύλη $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to M$ παραμετρισμένη καμπύλη.

Εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στη $\gamma(t)$ όταν είναι διαφορίσιμη:

$$V = \frac{d\gamma}{dt} = d\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Σε συντεταγμένες: $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$

$$\frac{d\gamma}{dt} \left(= \gamma'(t)\right) = (d\gamma)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Το μήκος της καμπύλης $\gamma(t)$ με $t \in [a,b]$:

$$L_a^b(\gamma) = \int_a^b \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{1/2} dt.$$

- Δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες.

Θεώρημα: Κάθε διαφορίσιμη πολλ/τα επιδέχεται μια μετρική Riemann

- Ορίζουμε μετρική σε κάθε χάρτη συντεταγμένων

και μετά σε όλη την πολλ/τα μέσω συναρτήσεων διαμέρισης της μονάδας: $\{(\Phi_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ άτλαντας.

$\exists\, \varphi_\alpha$ με $spt(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$ ($\Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) = 0 \ \forall x \notin U_\alpha$) και $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$ $\forall x \in M$.

Όγκος πολλτας - ορισμός στοιχείου όγκου:

Στο $\mathbb{R}^n$ $\quad Vol(A) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A \underbrace{dx^1 \dots dx^n}_{dv}$ $\quad$ όπου $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ ο.κ. βαση.

Στην M^n: Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ ορθοκανονικά διανύσματα στο T_pM.
τ.ω. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

Αν (U, X) είναι χάρτης συντεταγμένων με βαση $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$
για το T_pM, ωστε $\quad g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i dx^j \quad$ με $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$

και υπάρχει πινακας $A = (a_{ij})_{ij}$ τ.ω. (αλλαγής βάσης)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k$$

Άρα: $\quad g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \langle \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k, \sum_{l=1}^n a_{jl} e_l \rangle =$

$$= \sum_{k,l=1}^n a_{ik}\, a_{jl} \cdot \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n a_{ik}\, a_{jk}.$$

Στο T_pM το παραλληλεπίπεδο με πλευρές $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$
έχει όγκο $\quad Vol_n(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) = \det(a_{ij})\, \underbrace{Vol(e_1, \dots, e_n)}_{1}$

Παρατηρούμε ότι

$$\det(g_{ij}) = \det\Big(\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}\Big) = \det(A A^T) = (\det A)^2 = \det(a_{ij})^2$$

$$\therefore\ Vol_n\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) = \sqrt{\det(g_{ij})}$$

<u>Ορισμός</u>: Το στοιχείο όγκου μιας πολλ/τας Riemann ορίζεται ως $dv = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \dots dx^n$ σε μια γειτονιά συντεταγμένων (U, X).

Αν $A \subset X(U) \subset M$, τότε ορίζουμε

$$Vol_n(A) = \int_{X^{-1}(A)} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \dots dx^n.$$

Για $A \subset M$, τότε ο ορισμός γίνεται μέσω διαμέρισης της μονάδας, με υπολογισμό όγκου σε κάθε χάρτη και πρόσθεσης.

- $Vol_n(A)$ δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες:

Αν $A \subset X(U) \cap Y(V)$, τότε

$g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i dx^j$ με $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$ ως προς X

και $g = \sum_{i,j} h_{ij}\, dy^i dy^j$ με $h_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \rangle$ ως προς Y.

Από θεώρημα αλλαγής συντεταγμένων,

$$\begin{tikzcd} & M & \\ U \arrow[ur, "X"] \arrow[rr, "Y^{-1}\circ X"'] & & V \arrow[ul, "Y"'] \end{tikzcd}$$

$$\int_{X^{-1}(A)} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \dots dx^n =$$

$$= \int_{Y^{-1}(A)} \sqrt{\det(g_{ij})} \cdot \underbrace{\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)}_{D(Y^{-1}\circ X)} dy^1 \dots dy^n$$

Όμως $\sqrt{\det(g_{ij})}\,\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) = \mathrm{Vol}_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)$

$$= \underbrace{\mathrm{Vol}_n\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right) \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)} \cdot \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) =$$

$$= \mathrm{Vol}_n\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right) = \sqrt{\det(h_{ij})}$$

$$\therefore \ \Delta.M. = \int_{Y^{-1}(A)} \sqrt{\det(h_{ij})}\, dy^1 \dots dy^n$$

Παραδείγματα: ① $\mathbb{R}^n$ $g = \delta_{ij}\, dx^i dx^j$ $\sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \dots dx^n$

② $\mathbb{R}^2$ σε πολικές

$g = dr^2 + r^2 d\theta^2$ $dv = r\, dr\, d\theta$

③ S^2_R $g = d\phi^2 + R^2 \cdot \sin^2\phi \cdot d\theta^2$ σε σφαιρικές

$dv = R \sin\phi\, d\theta\, d\phi$.

④ Υπερβολικός χώρος $\mathbb{H}^n$

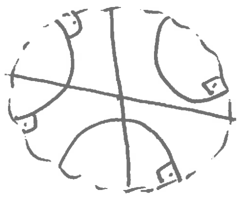
2 μοντέλα: <u>Θεώρημα</u>: Οι εξής πολλαπλότητες είναι ισομετρικές:

(i) Μπάλα Poincaré $B^n = \{(u_1, \dots, u_n) \mid \|\vec{u}\| < 1\}$

(ανοικτή μπάλα στο $\mathbb{R}^n$) με μετρική

$$h^1 = 4 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (du^i)^2}{(1 - \|\vec{u}\|^2)^2}$$

($h^1 \to \infty$ όταν $\|\vec{u}\| \to 1$)



$n=2$
γεωδαισιακές ημικύκλια $\perp$ στο ∂B.

(ii) Ημιεπίπεδο Poincaré $U^n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \mid y > 0\} \subset \mathbb{R}^n$.

$$h^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 + dy^2}{y^2}.$$

($h^2 \to \infty$ όταν $y \to 0$)

$n=2$
γεωδαισιακές ευθείες και ημικύκλια $\perp$ στο $y=0$.

Ομοπαράλληλικοί Σύνδεσμοι (Συνοχές). Affine Connections:

- Γεωδαισιακές - Θέλουμε να είναι καμπύλες που ελαχιστοποιούν την απόσταση μεταξύ δύο σημείων. (τουλάχιστον τοπικά π.χ. S^2)
  - ευκλείδιο χώρο: ευθείες
  - S^2 : κύκλοι μέγιστης διαμέτρου.

- Ένας ορισμός που κάνει τον υπολογισμό τους δύσκολο πρακτικά.

Αναλυτική περιγραφή:

$(\mathbb{R}^n, g = \sum (dx^i)^2)$: - μια ισοταχής καμπύλη (μέτρο ταχ = σταθ.) είναι ευθεία ανν η επιτάχυνσή της είναι μηδέν.

- σταθερό μέτρο ταχύτητας με επιτάχυνση ⇒
  - επιτάχυνση ⊥ στην καμπύλη

⇒ αλλάζει τη διεύθυνση και όχι τη νόρμα της ταχύτητας

Τι είναι η επιτάχυνση;

$M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ ισομετρικά εμφυτευμένες στον $\mathbb{R}^{n+m}$.

π.χ. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ καμπύλη στον S^1

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \in T_{\gamma(t)} S^1 \ \forall t.$

$(\vec{\gamma}'(t) \perp \vec{\gamma}(t))$

Ενώ $\frac{d}{dt}(\gamma'(t)) = (-\cos t, -\sin t) \notin T_{\gamma(t)} S^1$

Γενικά για $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ αν $\gamma(t) \in M^n$ τότε $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} M^n$

αλλά $\frac{d}{dt}(\gamma'(t)) = \gamma''(t) \notin T_{\gamma(t)} M$.

Στον S^1 : η προβολή του $\gamma''(t)$ στο $T_{\gamma(t)} M$ είναι 0.

-Οι κάτοικοι του S^1 βλέπουν/νιώθουν μηδενική επιτάχυνση

- Δεν έχουν περιθώρια περαιτέρω μείωσης της απόστασης μεταξύ 2 σημείων στο χώρο τους. (18)

- Αν $V(t)$ διαν. πεδίο στη $\gamma(t)$ με $V(t) \in T_{\gamma(t)} M$ με $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$

Υπολογίζουμε $\frac{dV}{dt} \in T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^{n+m}$

Θέτουμε $\frac{DV}{dt} \equiv$ προβολή του $\frac{dV}{dt}$ στο $T_{\gamma(t)} M$.

είναι η συναλλοίωτη παράγωγος του V.

- Υπάρχουν πολλοί τρόποι να οριστεί η παράγωγος διανυσματικού πεδίου στη M.

- Στο $\mathbb{R}^m$: $\frac{DV}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{V(\gamma(t+h)) - V(\gamma(t))}{h}$. $V(\gamma(t+h)) \in T_{\gamma(t+h)} \mathbb{R}^m$

που ταυτίζεται εύκολα μέσω μετάθεσης με διαν. στο $T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^m$

- Στην M $T_{\gamma(t+h)} M$ & $T_{\gamma(t)} M$ <u>δε συνδέονται</u>

Δεν ορίζεται ποια είναι τα <u>παράλληλα</u> διανύσματα.

- Η επιλογή συνδέσμου καθορίζει τη συναλλοίωτη παράγωγο και αντίστροφα.

Θέλουμε λοιπόν η συναλλοίωτη παράγωγος, να έχει ορισμένες ιδιότητες.

Γενικότερος ορισμός συνδέσμων (όταν M πολλ/τα όχι απαραίτητα Riemann) (19)

Ορισμός: Έστω $\mathcal{X}(M)$ C^∞ δ.π., $\mathcal{D}(M)$ C^∞ συναρτήσεις

Ένας ομοπαραλληλικός σύνδεσμος (affine connection) ∇ σε διαφ. πολλ/τα M είναι μια απεικόνιση

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$
$$(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$$

τ.ω. (i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

(ii) $\nabla_X (aY+Z) = a\nabla_X Y + \nabla_X Z$

(iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)\cdot Y$

$$\forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M),\ f,g \in \mathcal{D}(M),\ a \in \mathbb{R}$$

∇: nabla $\quad \nabla_X Y$ η συναλλοίωτη παράγωγος του Y ως προς X.

Ιδιότητες: Λήμμα 1. $\nabla_X Y|_p$ εξαρτάται μόνο από την τιμή του X στο p και τις τιμές του Y σε γειτονιά του p.

(* μόνο από τις τιμές του Y σε γ με $\gamma(0)=p$ & $\gamma'(0)=X(p)$).

Απόδειξη: (a) $\tilde{X}(p) = X(p)$

$$\nabla_{\tilde{X}} Y - \nabla_X Y = \nabla_{\tilde{X}-X} Y|_p \quad \text{με } (\tilde{X}-X)(p) = 0.$$

Έστω $\tilde{X}-X = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, ώστε $u_i(p)=0\ \forall i$

$$\therefore \nabla_{\tilde{X}-X} Y|_p = \nabla_{\sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i}} Y|_p = \sum_{i=1}^n u_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y|_p = \sum_{i=1}^n u_i(p)\cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y = 0$$