$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ είναι διαφ. πολ/τα.

Γειτονιές κάλυψης:

λείπει ισημερινός ($x_3 \neq 0$)

$x_2 \neq 0$

$x_1 \neq 0$.

Άσκηση: Να δείξετε με λεπτομέρεια ότι $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ διαφ. πολ/τα.

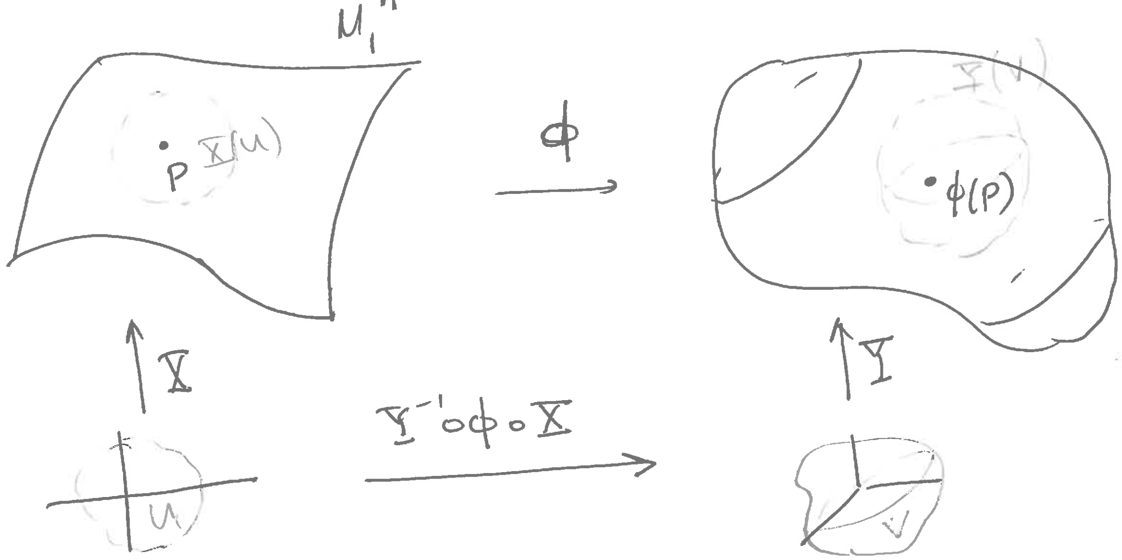
Άσκηση: Αν M_1^n, M_2^m είναι διαφορίσιμες πολ/τες
v.δ.ο. $M_1^n \times M_2^m$ είναι διαφορίσιμη πολ/τα.

Απεικονίσεις ανάμεσα σε πολλ/τες:

$\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διαφ. αν όλες οι μερικές είναι C^∞.

Για $F: M_1^n \to M_2^m$ μεταφέρονται οι παράγωγοι στις αντίστοιχες τους στο $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ μέσω χαρτών, όπου μπορούμε να παραγωγίσουμε.

<u>Ορισμός</u> (Διαφορίσιμη απεικόνιση) Έστω M_1^n, M_2^m διαφ. πολλ/τες. Μια απεικόνιση $\phi: M_1^n \to M_2^m$ είναι διαφορίσιμη στο $p \in M_1$ αν για κάθε παραμέτρηση $Y: V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ στο $\phi(p)$ υπάρχει μια παραμέτρηση $X: U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ στο p ($\Leftrightarrow$ ισχύει $\forall$ παραμέτρηση στο p, από ορισμό πολλ/τας λόγω συμβατότητας). τ.ω. $\Phi(X(U)) \subset Y(V)$ και να είναι η απεικόνιση $Y^{-1} \circ \phi \circ X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη στο $X^{-1}(p)$. (διαφορίσιμη σημαίνει C^k, κτλ)



- Η ϕ γράφεται και ως/ταυτίζεται με $Y^{-1} \circ \phi \circ X$

τω. $\phi(x_1, \ldots, x_n) = (\phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_m(x_1, \ldots, x_n))$
$= (y_1, \ldots, y_m)$

$(\vec{x} \in U, \ \vec{y} \in V)$

Παραδείγματα: (1) $\phi: S^2 \to \mathbb{R}^2$

Για $(x,y,z)\in S^2\subset\mathbb{R}^3$ με $x^2+y^2+z^2=1$

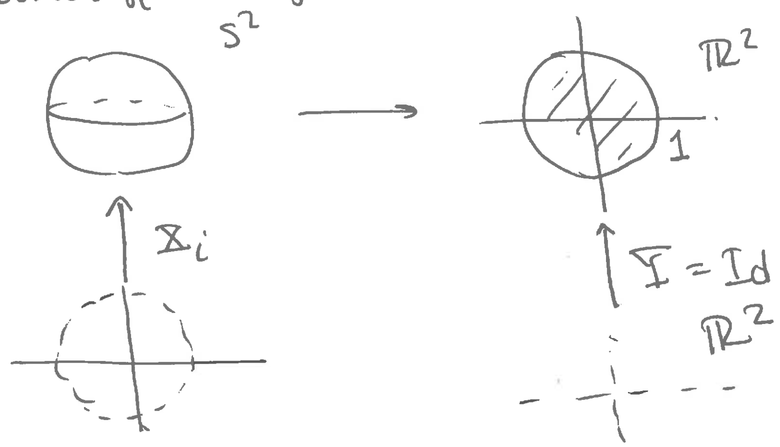
η ϕ προβάλλει το (x,y,z) στο (x,y) - σε δίσκο ακτίνας 1

Δηλαδή αν $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \mapsto (x,y)$

τότε $\phi = f|_{S^2}$.

Σε συντεταγμένες για την S^2.



π.χ. $X_1(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$ με $u^2+v^2<1$.

X_2 —

$Y^{-1}\circ\phi\circ X_1(u,v) = (u,v)$ (το ίδιο για X_2).

Είναι διαφορίσιμη στο Βόρειο & Νότιο ημισφαίριο της S^2.

$X_5(u,v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$ $\quad u^2+v^2<1$

$Y^{-1}\circ\phi\circ X_5 = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u)$ η ϕ είναι διαφορίσιμη και στον ισημερινό όπου $v=0$

(δεν είναι διαφορομορφισμός αφού δεν είναι 1-1, είναι όμως διαφορίσιμη.)

② $\phi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$

$$[x_1, x_2, x_3] \longmapsto \left(\frac{x_3^2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_3^2} \right)$$

παρατήρηση: $\phi([\lambda \vec{x}]) = \phi([\vec{x}])$ άρα είναι καλά ορισμένη.

Ν.δ.ο. είναι διαφορίσιμη στο $[2, 0, 4] = p$.

$p = [2, 0, 4] = [1, 0, 2]$.

Χάρτης συντεταγμένων: $X(u,v) = [1, u, v]$

Με $p = X(u_0, v_0)$ όπου $(u_0, v_0) = (0, 2)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow X & & \uparrow Y = Id. \\ \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$\Phi^{(u,v)} = Y^{-1} \circ \phi \circ X(u,v) = Y^{-1} \circ \phi([1, u, v]) = \left(\frac{v^2}{1+u^2}, \frac{u^2}{1+v^2} \right).$$

Στο $(u_0, v_0) = (0, 2)$ η Φ είναι C^∞ αφού ο παρονομαστής δε μηδενίζεται. $\therefore$ ϕ διαφορίσιμη.

$$D\Phi(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{-v^2 2u}{(1+u^2)^2} & \frac{2v}{1+u^2} \\ \frac{2u}{1+v^2} & \frac{u^2(-2v)}{(1+v^2)^2} \end{bmatrix}$$

$$D\Phi(0,2) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ίσως όχι απαραίτητα διαφορομορφισμός αφού $|D\Phi| = 0$.

Επιπρόσθετα παραδείγματα πολλ/των:

(Γ) $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ $m\times n$ πίνακες

$$X(x_1,x_2,\dots,x_{mn}) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_{n+1} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \\ x_{(m-1)n+1} & \cdots & x_{m\cdot n} \end{bmatrix}$$

είναι μια πολλ/τα λεία και ομοιομορφική με το $\mathbb{R}^{mn}$ (και διαφορομορφική.).

- καλύπτεται από 1 χάρτη συντεταγμένων.

(Δ) $GL(n) := \{ A \in \mathcal{M}_{n\cdot n}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}$

det: Μια συνεχής συνάρτηση από το $\mathcal{M}_{nn}$ στο $\mathbb{R}$ αφού πολυωνυμική ως προς τις συντεταγμένες του χώρου.

Αφού $\{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$ ανοικτό, τότε $GL(n)$ είναι ανοικτό υποσύνολο της πολλ/τας $\mathcal{M}_{nn}$

Αν; $X : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathcal{M}_{nn}$ όπως πιο πάνω στο (Γ)

τότε $\tilde{X} = X|_{X^{-1}(\underbrace{GL(n)}_{\text{ανοικτό}})}$ δίνει το χάρτη συντεταγμένων του $GL(n)$ που τον καλύπτει.

(Ε) $O(n) = \{ A \in GL(n) \mid AA^T = I \}$ πολλ/τα διάστασης $n(n-1)/2$

Είναι και ομάδα άρα ονομάζεται ομάδα Lie.

π.χ. $O(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$

↑ περιστροφή θ στο $\mathbb{R}^2$ — ↑ περιστροφή & ανάκλαση

$O(2)$ δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του $GL(2)$ ($\det > 0$ ή $\det < 0$) Κάλυψη με 4 γειτονιές $\theta \in (0, 2\pi)$ ή $(-\pi, \pi)$ - μια για κάθε συνεκτικό υποσύνολο. Έχει διάσταση 1.

<u>Εφαπτόμενα διανύσματα</u>: Ορίζονται έστω κι αν δε βλέπουμε την πολ/τα ως υποσύνολο κάποιου $\mathbb{R}^m$

Οι "κάτοικοι" δε γνωρίζουν σε ποιο $\mathbb{R}^m$ ζουν, ξέρουν όμως το διάνυσμα ταχύτητας ενός "οχήματος" γιατί γνωρίζουν σε ποιες "κατευθύνσεις" (≡ <u>Εφαπτόμενα διανύσματα</u>) μπορούν να αλλάξουν οι συναρτήσεις που ορίζονται στο χώρο τους

<u>Εφαπτόμενα</u> Διανύσματα: οι κατευθύνσεις στις οποίες μπορούν να αλλάξουν οι συναρτήσεις.

Στη <u>διαφορική γεωμετρία</u>: $X(u,v)$ Εφ. διαν: $\{X_u, X_v\} \in \mathbb{R}^3$ → βάση για T_pS.

Ορίζεται το κάθετο N και με αυτό υπολογίζουμε καμπυλότητα. 2η θεμ. μορφή II

Μετρική: I : 1η θεμ. μορφή.

Σε πολ/τες ορίζονται εγγενώς - χωρίς να πρέπει η M να περιέχεται σε κάποιο $\mathbb{R}^m$.

X_u: κατεύθυνση (= ταχύτητα) της καμπύλης $X(u,v_0)$

X_v: — " — — " — $X(u_0,v)$.

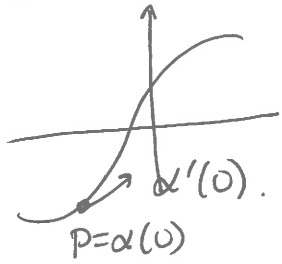
Παρόμοια - τα εφαπτόμενα διανύσματα θα αντιστοιχούν σε ταχύτητες (διαν.) καμπυλών. - όλες οι πιθανές ταχύτητες (διαν.) καμπυλών στην M.

<u>Παράδειγμα:</u> $M = \mathbb{R}^n$

Καμπύλη: $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$ $\quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Έστω $\vec{\alpha}(0) = p$.

Τότε $\vec{\alpha}'(0) = (\alpha_1'(0), \ldots, \alpha_n'(0)) = \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.



Για $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, περιορίζουμε την f στην α:
$f(\alpha(t))$.

Η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο p στην κατεύθυνση v ισούται με:

$$(D_v f)(p) = \nabla f(p) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(0)) \cdot \alpha_i'(0)$$

$$= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0}.$$

Εξαρτάται <u>μόνο</u> από το v και όχι από την α, δηλαδή, αν $\beta(t)$ καμπύλη με $\beta(0) = p$ και $\beta'(0) = v$,
τότε $\frac{d}{dt}(f \circ \beta)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0} = D_v f(p)$.

Σε γενική διαφορίσιμη πολ/τα M:

Διαφορίσιμη συνάρτηση:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ & U \subset \mathbb{R}^n \arrow[u, "X"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$f: M \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη αν $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη.

Διαφορίσιμη καμπύλη:

$$\begin{tikzcd} I \subset \mathbb{R} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "X^{-1}\circ\alpha"'] & M \\ & U \subset \mathbb{R}^n \arrow[u, "X"'] \end{tikzcd}$$

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to M$ είναι διαφορίσιμη στο t αν $X^{-1} \circ \alpha$ είναι διαφορίσιμη στο t.

Ορισμός: $\mathcal{D} = T_p^{\circ}(M)$ ορίζεται ως το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων στο σημείο p της M.

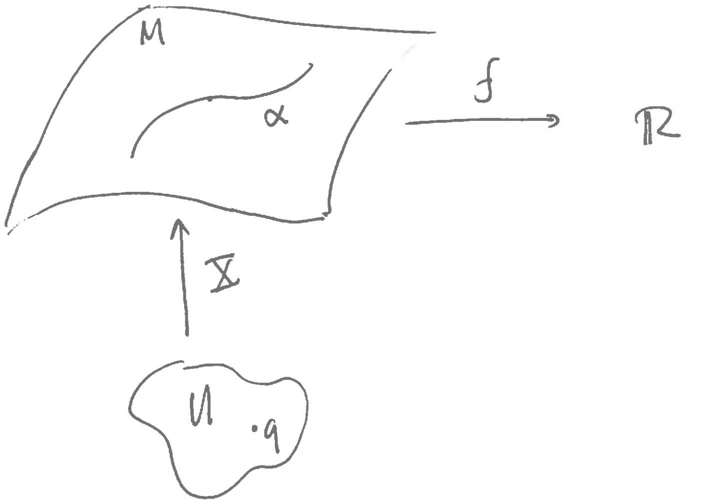
Ορισμός: Έστω M διαφ. πολ/τα και $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ μια διαφορίσιμη καμπύλη με $\alpha(0) = p \in M$.
Το εφαπτόμενο διάνυσμα στην α. στο $t=0$ που συμβολίζεται με $\alpha'(0)$ ορίζεται ως ο τελεστής

$$\alpha'(0) : \mathcal{D} = T_p^{\circ}(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

που δίνεται από $\alpha'(0)\cdot f := \dfrac{d}{dt}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0}.$

$\alpha'(0) = \beta'(0) \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{D} \quad \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f\circ\beta)|_{t=0}$

Ορισμός: Εφαπτόμενο διάνυσμα στην M στο σημείο p είναι κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $\alpha'(0)$ κάποιας καμπύλης $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ με $\alpha(0) = p$.
Το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων στην M στο p ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος και συμβολίζεται με T_pM.



Για κάθε $q \in U$, $q = (x_1, \dots, x_n)$ και γράφουμε

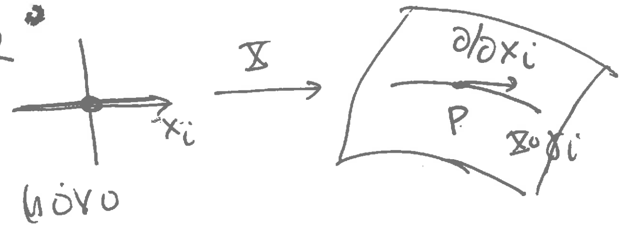
$$f \circ X(q) \equiv f(x_1, \dots, x_n) \quad \Big(= \underset{\uparrow \text{μετά}}{f^*}(x_1, \dots, x_n)\Big)$$ για απλοποίηση.

Η καμπύλη $\alpha(t)$ στην M γράφεται σε συντεταγμένες ως

$X^{-1} \circ \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$. με $\alpha(0) = p$

και υποθέτουμε $X^{-1} \circ \alpha(0) = \vec{0}$ για απλοποίηση.

Αν $\gamma_i(t) = (0, \dots 0, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{t}, 0 \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$



τότε $X \circ \gamma_i(t) \in M$ - μετακίνηση μόνο στην κατεύθυνση i.

Ορίζουμε: $$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = (X \circ \gamma_i)'(0)$$

Τότε: $$D_{\alpha'(0)} f(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0} = \cancel{\frac{d}{dt}\big(f(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))\big)\Big|_{t=0}}.$$

$$= \frac{d}{dt}\left(f \circ X \circ X^{-1} \circ \alpha(t)\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big(f \circ X\,(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))\Big)\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial (f \circ X)}{\partial x_i}\right|_p \cdot \alpha_i'(0)$$

↙ κρατώ όλα σταθερά εκτός το x_i

όπου $$\frac{\partial (f\circ X)}{\partial x_i} = \frac{\partial (f(x_1,\dots,x_n))}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Big|_p (f).$$

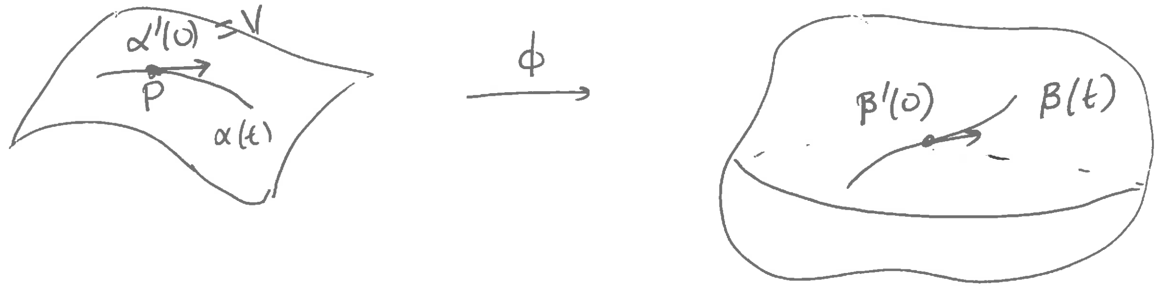
Άρα $$D_{\alpha'(0)} f\,(p) = \sum_{i=0}^{n} \left(\alpha_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)(f).$$

Μπορούμε δηλαδή να εκφράσουμε το $\alpha'(0)$ ως προς την παραμέτρηση X με:

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(0)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι T_pM είναι διανυσματικός χώρος (με αλγεβρική έννοια) με βάση $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}_p$. Επίσης η διάσταση του δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες και αν Y άλλη παραμέτρηση στο p, τότε και $\left\{\frac{\partial}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial}{\partial y_n}\right\}_p$ είναι επίσης βάση για το T_pM.

Αν $\phi : M_1 \to M_2$ και $\alpha(t)$ καμπύλη στην M_1,
τότε $\phi(\alpha(t)) = \beta(t)$ είναι καμπύλη στην M_2



$\beta'(0) = d\phi_p(v)$

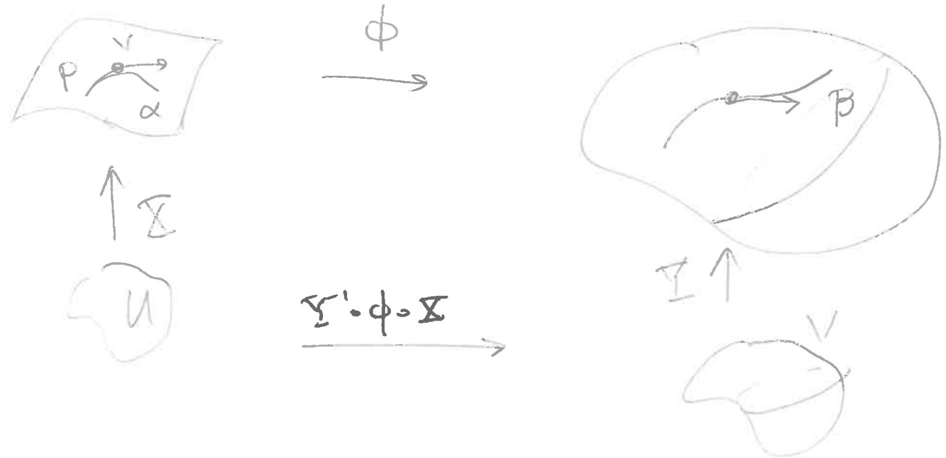
<u>Ορισμός</u>: Το διαφορικό της ϕ στο p είναι η συνάρτηση που παίρνει το $\alpha'(0)$ στο $\beta'(0)$ και συμβολίζεται με $d\phi_p$
$$d\phi_p(\alpha'(0)) = \beta'(0).$$

<u>Πρόταση</u>: Έστω M_1^n, M_2^m διαφορίσιμες πολ/τες και $\phi : M_1 \to M_2$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση.
Για κάθε $p \in M_1$, $v \in T_p M_1$ επιλέγουμε καμπύλη α με $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = v$.
Έστω $\beta(t) = \phi(\alpha(t))$.
Τότε η απεικόνιση
$$\begin{aligned} d\phi_p : T_p M_1 &\longrightarrow T_p M_2 \\ \underset{\alpha'(0)}{\overset{\shortparallel}{v}} &\longmapsto \beta'(0) \end{aligned}$$
είναι γραμμική και δεν εξαρτάται από την α αλλά μόνο από το v.

$d\phi_p$: Το διαφορικό της ϕ στο p.

$d\phi_p(v) = \phi_*(v)$: push forward του v.

Απόδειξη:



$\mathbf{X}^{-1}\circ\alpha = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$

Τότε $\mathbf{Y}^{-1}\circ\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_m(t))$

$$= \mathbf{Y}^{-1}\circ\phi\circ\alpha(t) = \underbrace{\mathbf{Y}^{-1}\circ\phi\circ\mathbf{X}}\circ\underbrace{\mathbf{X}^{-1}\circ\alpha(t)}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\mathbf{Y}^{-1}\circ\beta(t)\right)\Big|_{t=0} = (\beta_1'(0), \dots, \beta_m'(0)) =$$

$$= [D(\mathbf{Y}^{-1}\circ\phi\circ\mathbf{X})]\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1'(0)\\ \vdots \\ \alpha_n'(0)\end{bmatrix}$$

$$\therefore \beta'(0) = \underbrace{[D(\mathbf{Y}^{-1}\circ\phi\circ\mathbf{X})]}_{m\times n \text{ πίνακες.}}[\alpha'(0)]$$ σε συντεταγμένες.

$\therefore$ $d\phi_p$ είναι μια γραμμική συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από το $\vec{v}$ και όχι από την α. στο T_pM, είναι γραμμική. αφού

$$d\phi_p(v+\lambda w) = A(v+\lambda w) = Av + \lambda Aw = d\phi_p(v) + \lambda\, d\phi_p(w)$$

$$A: [D(\mathbf{Y}^{-1}\circ\phi\circ\mathbf{X})]$$

Παραδείγματα

① Έστω $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\phi(x,y,z) = (x^2+y^2,\ z-x^2) = (u,w).$$

Έστω $v \in T_p\mathbb{R}^3$ $\quad v=(v_1,v_2,v_3) = v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y} + v_3\frac{\partial}{\partial z}$

$$\phi_*(v) = (d\phi)(v) = \underset{\substack{\uparrow \\ 2\times 3}}{[D\phi]}(v) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} =$$

$$= (2x\,v_1 + 2y\,v_2,\ -2x\,v_1 + v_3) = (2xv_1+2yv_2)\frac{\partial}{\partial u} + (-2xv_1+v_3)\frac{\partial}{\partial w}$$

Τελικά $d\phi$ δεν είναι απαραίτητα 1-1

π.χ. Αν $v=(1,1,2)$ στο $p=(1,0,1)$

$$\phi_*(v) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (2,0) = 2\frac{\partial}{\partial u}.$$

② Έστω $\phi: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$[x,y,z] \longmapsto \left[\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2},\ \frac{y^2-z^2}{x^2+y^2},\ \frac{2xy}{x^2+z^2}\right]$$

Έστω $p=[0,1,1]$ και $v \in T_p(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$

Να υπολογισθεί $d\phi_p(v)$ (ως προς κάποιο χάρτη συντεταγμένων).

$$\phi([0,1,1]) = [1,0,0]$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^2(\mathbb{R}),\, p \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}),\, \phi(p) \\ (u,v) \arrow[u, "X_2"] \arrow[r, "\Phi"'] & (r,s) \arrow[u, "X_1"'] \end{tikzcd}$$

$X_2(u,v) = [u,1,v] \qquad p = X_2(0,1)$

$X_1(r,s) = [1,r,s] \qquad \phi(p) = X_1(0,0)$

$$\Phi(u,v) = X_1^{-1} \circ \phi \circ X_2(u,v) = X_1^{-1} \circ \phi([u,1,v]) =$$

$$= X_1^{-1}\left(\left[\underbrace{\frac{1+u^2}{u^2+v^2}}_{\neq 0}, \frac{1-v^2}{u^2+1}, \frac{2u}{u^2+v^2}\right]\right) =$$

$$= \left(\frac{(1-v^2)(v^2+u^2)}{(1+u^2)^2}, \frac{2u(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)(1+u^2)}\right) = \left(\frac{(1-v^2)(u^2+v^2)}{(1+u^2)^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)$$

$$\phi_*\left(a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}\right)\Big|_p = [D\Phi]_p \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2u(1-v^2)}{(1+u^2)^2} - 2\frac{(1-v^2)(u^2+v^2)\cdot 2u}{(1+u^2)^3} & \frac{-2v(u^2+v^2)+(1-v^2)2v}{(1+u^2)^2} \\ \frac{2(1+u^2) - 2u\cdot 2u}{(1+u^2)^2} & 0 \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \end{bmatrix} = 2a\frac{\partial}{\partial s}.$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω M_1, M_2 διαφ. πολλ/τες. Μια απεικόνιση $\phi: M_1 \to M_2$ είναι <u>διαφορομορφισμός</u> αν είναι διαφορίσιμη, 1-1 και επί και η αντίστροφη απεικόνιση ϕ^{-1} είναι διαφορίσιμη.

ϕ είναι <u>τοπικός διαφορομορφισμός</u> αν $\exists$ γειτονιές U του $p \in M_1$ και V του $\phi(p) \in M_2$ έτσι ώστε $\phi: U \to V$ να είναι διαφορομορφισμός.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $\phi: M_1 \to M_2$ είναι διαφορομορφισμός τότε $d\phi_p: T_pM_1 \to T_{\phi(p)}M_2$ είναι ισομορφισμός (1-1, επί και γραμμική).
(ϕ διαφορομ. $\Rightarrow n = m$ - ίδιας διάστασης).

<u>Θεώρημα</u>: Αν $\phi: M_1^n \to M_2^n$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση και $d\phi_p: T_pM_1 \to T_{\phi(p)}M_2$ είναι ισομορφισμός, τότε η ϕ είναι τοπικός διαφορομορφισμός στο p.

- Θεώρημα Αντιστρόφου συναρτήσεως.

Ορισμός: Η Διανυσματική Δέσμη μιας διαφορίσιμης πολλ/τας M ορίζεται ως $TM = \{(p,v) \mid p \in M,\ v \in T_pM\}$.

Είναι κι αυτή μια διαφ. πολλ/τα. με χάρτες συντεταγμένων:

Αν $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ άτλαντας - διαφορική δομή για M.
τότε ορίζουμε

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to TM$$

$$(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) \mapsto \left(X_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha),\ \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right)$$

(i) $\bigcup_\alpha \Psi_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM$

(ii) Αν $(p,v) \in \Psi_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap \Psi_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)$.
τότε $(p,v) = (X_\alpha(q_\alpha),\ dX_\alpha(v_\alpha)) = (X_\beta(q_\beta),\ dX_\beta(v_\beta))$
με $q_\alpha \in U_\alpha$ $q_\beta \in U_\beta$ $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$.

$\therefore\ \Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = \Psi_\beta^{-1}(X_\alpha(q_\alpha),\ dX_\alpha(v_\alpha)) =$

$$= \Big(\underbrace{X_\beta^{-1} \circ X_\alpha (q_\alpha)}_{C^\infty},\ \underbrace{d(X_\beta^{-1} \circ X_\alpha)}(v_\alpha) \Big)$$

γραμμική απεικ. από $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^n$ άρα C^∞.
- παράγωγος ο ίδιος πίνακας.

$\therefore$ TM έχει συμβατούς χάρτες.

- Είναι επίσης 1-1 από το πιο πάνω.