<u>Πρόταση:</u> Αν $J(t)$ είναι πεδίο Jacobi στη γεωδαισιακή $\gamma(t):[0,a]\to M$ με $\gamma'(0)=v$ και $\gamma(0)=p$ τ.ω. $J(0)=0$ και $J'(0)=w$, τότε $J(t)=\frac{\partial}{\partial s}(\exp_p(tv(s)))\big|_{(t,0)}$ όπου $v(s)$ καμπύλη στο T_pM με $v(0)=v$ και $v'(0)=w$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $f(s,t)=\exp_p(tv(s))$ και $\bar{J}(t)=\frac{\partial f}{\partial s}\big|_{(t,0)}$.

$$\frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{(t,0)}=(d\exp_p)_{tv(0)}(t\cdot v'(0))=(d\exp_p)_{tv}(tw)=$$

$$=t\,(d\exp_p)_{tv}(w) \qquad \therefore \bar{J}(0)=0$$

$$\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)=\frac{D}{\partial t}\left(t\,((d\exp_p)_{tv}(w))\right)=$$

$$=(d\exp_p)_{tv}(w)+t\cdot\frac{D}{\partial t}\left((d\exp_p)_{tv}(w)\right)$$

$$\therefore \frac{D}{\partial t}(\bar{J}(t))\Big|_{t=0}=\bar{J}'(0)=(d\exp_p)_0(w)=w$$

αφού $(d\exp_p)_0=Id$.

Άρα $\bar{J}$ τ.ω. $\bar{J}(0)=0$, $\bar{J}'(0)=w$

Είχαμε δείξει ότι το $\bar{J}$ είναι πεδίο Jacobi.

Άρα από μοναδικότητα λύσεων εξίσωσης 2ου βαθμού (όταν καθορίσετε $J(0)$ και $J'(0)$) τότε $\bar{J}(t)=J(t)$ $\forall t\in[0,a]$.

$\square$

<u>Πόρισμα:</u> Έστω $\gamma:[0,a]\to M$ γεωδαισιακή. Τότε το πεδίο Jacobi στη γ με $J(0)=0$ δίνεται από:

$$J(t)=(d\exp_p)_{t\gamma'(0)}(t\,J'(0)).$$

• Στόχος να δούμε το πόσο απομακρύνονται οι γεωδαισιακές - σχετίζεται με το μήκος $|J(t)|$ όπως θα δούμε.

Πρόταση: Έστω $\gamma:[0,a]\to M$ γεωδαισιακή με $\gamma(0)=p$ και $\gamma'(0)=v$. Έστω w διάνυσμα με $|w|=1$ $(w\in T_v(T_pM)$, $|w|=|w|_p=1)$ και J πεδίο Jacobi στη γ με

$$J(t)=(d\exp_p)_{tv}(tw) \qquad 0\le t\le a.$$

Τότε το ανάπτυγμα Taylor της $|J(t)|^2$ στο $t=0$ δίνεται από:

$$|J(t)|^2=t^2-\frac{1}{3}\langle R_{wv}v,w\rangle t^4+R_{em}(t)$$ όπου

$$\lim_{t\to 0}\frac{R_{em}(t)}{t^4}=0. \qquad (R_{em}: \text{το υπόλοιπο}).$$

Επίσης $|J(t)|=t-\frac{1}{6}K(p,\sigma)t^3+\tilde{R}_{em}(t)$

με $\lim_{t\to 0}\frac{\tilde{R}_{em}(t)}{t^3}=0$, όταν $|v|=1$, $\langle v,w\rangle=0$ και σ το επίπεδο που παράγεται από v,w.

Απόδειξη: Αφού $J(0)=0$ και $J'(0)=w$

$\langle J,J\rangle(0)=0$

$\langle J,J\rangle'(0)=2\langle J,J'\rangle=0$

$\langle J,J\rangle''(0)=2\langle J',J'\rangle(0)+2\langle J'',J\rangle(0)=2|w|^2=2$

Επίσης $J''(0)=-(R_{J\gamma'}\gamma')(0)=0. \qquad (J(0)=0)$

$\therefore \langle J,J\rangle'''(0)=6\langle J',J''\rangle(0)+2\langle J''',J\rangle(0)=0$

$\langle J,J\rangle''''(0)=8\langle J',J'''\rangle(0)+6\langle J'',J''\rangle(0)+2\langle J'''',J\rangle(0)=$

$=-8\langle J',\frac{D}{\partial t}(R_{J\gamma'}\gamma')\rangle(0)$

όπου $\langle J', \frac{D}{\partial t}(R_{J\gamma'}\gamma')\rangle\big|_{t=0} = \frac{D}{\partial t}(\langle J', R_{J\gamma'}\gamma'\rangle)\big|_{t=0} - \overset{0}{\langle J'', R_{J\gamma'}\gamma'\rangle}\big|_{t=0}$

$= \frac{D}{\partial t}(R(J,\gamma',\gamma',J'))\big|_{t=0} = -\frac{D}{\partial t}(R(\gamma',J',\gamma',J))\big|_{t=0} =$

$= -\frac{D}{\partial t}\langle R_{\gamma'J'}\gamma', J\rangle\big|_{t=0} = -\overset{0}{\langle \frac{D}{\partial t}(R_{\gamma'J'}\gamma'), J\rangle}\big|_{t=0} - \langle R_{\gamma'J'}\gamma', J'\rangle\big|_{t=0}$

$= -R(\gamma', J'(0), \gamma'(0), J'(0))$

$\therefore \quad \langle J,J\rangle''''(0) = +8R(v,w,v,w) = -8R(w,v,v,w)$

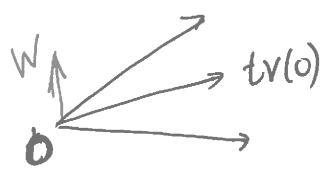
- Με αυτά παίρνουμε την ακολουθία Taylor για το $|J(t)|^2$

- Για την $|J(t)|$ βρίσκεις την ακολ. $\sum_i a_i t^i$ τ.ω. $(\sum_i a_i t^i)^2 = |J(t)|^2$

□

Παρατήρηση: Έστω $f(t,s) = \exp_p(tv(s))$ $\quad t\in[0,\delta]$ $\quad s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.
δ τ.ω. $\exp_p(tv(s))$ να ορίζεται και $v(s)$ καμπύλη στο T_pM.
με $|v(s)|=1$, $v(0)=v$ $\quad v'(0)=w$ με $|w|=1$.

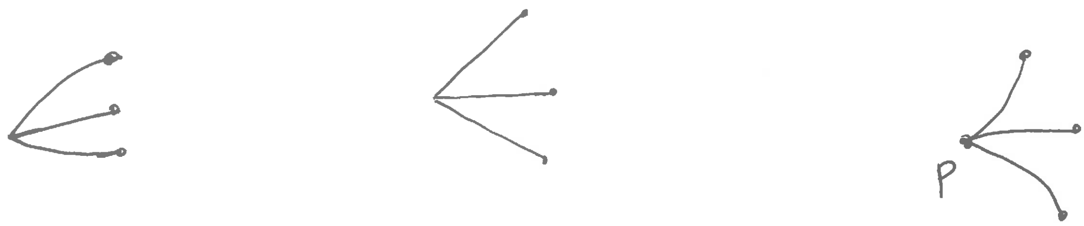
Στο T_pM: οι καμπύλες $tv(s)$ απομακρύνονται από την $t\mapsto tv(0)$ με ταχύτητα $\left|\frac{\partial}{\partial s}(tv(s))\right|\Big|_{s=0} = |tv'(0)| = |tw| = t$.



Το ανάπτυγμα Taylor $|J(t)| = t - \frac{1}{6}\cdot K(p,\sigma)\cdot t^3 + \widetilde{Rem}$
μας δείχνει ότι οι γεωδαισιακές $\gamma_s(t) = \exp_p(tv(s))$
απομακρύνονται από την "κεντρική" γεωδ. $\gamma_0(t) = \exp_p(tv(0))$
με ταχύτητα που διαφέρει από το t κατά έναν όρο τρίτης τάξης, $-\frac{1}{6}K(p,\sigma)t^3$.

Δηλαδή, τοπικά, αν η καμπυλότητα τομής $K(p,\sigma)$ είναι θετική $K(p,\sigma)>0$, τότε οι γεωδαισιακές απομακρύνονται λιγότερο παρά στο εφαπτόμενο επίπεδο, ενώ αν $K(p,\sigma)<0$, τότε απομακρύνονται περισσότερο, παρά στο εφαπτόμενο επίπεδο.

$K>0$ $\qquad$ T_pM $K\equiv 0$ $\qquad$ $K<0$



Συζυγή Σημεία:

Ορισμός: Έστω $\gamma:[0,a]\to M$ γεωδαισιακή. Το σημείο $\gamma(t_0)$, για $t_0\in(0,a]$, ονομάζεται συζυγές σημείο του $\gamma(0)$ αν υπάρχει μη-μηδενικό πεδίο Jacobi στη γ με $J(0)=J(t_0)=0$.

Ο μέγιστος αριθμός τέτοιων γραμμικά ανεξάρτητων πεδίων Jacobi ονομάζεται πολλαπλότητα (αλγεβρική πολ/τα) του συζυγούς σημείου $\gamma(t_0)$.

– Παρατήρηση ① Αν $\gamma(t_0)$ είναι συζυγές σημείο του $\gamma(0)$, τότε και το $\gamma(0)$ είναι συζυγές σημείο του $\gamma(t_0)$. $\gamma(0),\gamma(t_0)$ ονομάζονται συζυγές ζεύγος.

② Αν η M έχει διάσταση n, τότε υπάρχουν n Γ.Α. πεδία Jacobi στη γ με $J(0)=0$.

Από ισχύει γιατί για πεδία Jacobi $\{J_1,\dots,J_k\}$ με $J_i(0)=0$, τα πεδία είναι Γ.Α. ανν $\{J_1'(0),\dots,J_k'(0)\}$ είναι Γ.Α. λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης Jacobi.

Ταυτόχρονα, το πεδίο Jacobi $J(t)=t\gamma'(t)$ ποτέ δε μηδενίζεται για $t>0$ στη γ.

Άρα η πολλαπλότητα ενός συζυγούς σημείου είναι το πολύ $n-1$.

Παράδειγμα: $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \|x\|=1\}$. γ: γεωδαισιακή.

Πεδία Jacobi για κάθε $w(t)$ παράλληλο διαν. πεδίο στη γ με $w(0)\perp\gamma'(0)$, $(\Leftrightarrow w(t)\perp\gamma'(t))$ $\quad J(t)=(\sin t)\,w(t)$

(επίσης $J_0(t)=t\cdot\gamma'(t)$ είναι πεδίο Jacobi)

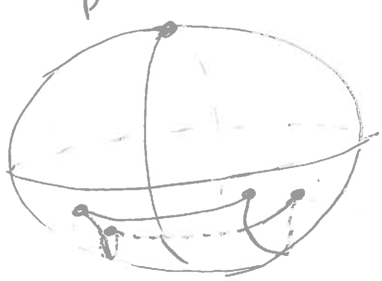
Αφού υπάρχουν $n-1$ Γ.Α. $w(0)$ κάθετα στο $\gamma'(0)$, παίρνουμε όλα τα πεδία Jacobi.

Παρατηρούμε ότι $J(\cancel{0})=J(\pi)=0$ $\forall w(0)$ $\therefore$ $\gamma(0)$ και $\gamma(\pi)$ είναι συζυγή σημεία (ζεύγη) πολλαπλότητας $n-1$, και δεν υπάρχουν άλλα για $t<\pi$

Ορισμός: Το σύνολο των (πρώτων) συζυγών σημείων ενός σημείου $p \in M$ για όλες τις γεωδαισιακές που ξεκινούν στο p ονομάζεται συζυγής τόπος. (conjugate locus) του p. και συμβολίζεται με $C(p)$.

Παρ. Στην S^n $C(p) = -p$ - το αντίποδο σημείο.

Σε ελλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, είναι καμπύλη με τέσσερα ιδιάζοντα σημεία. $(a \neq b \neq c)$



Πρόταση: Έστω $\gamma : [0,a] \to M$. γεωδαισιακή με $\gamma(0) = p$. Το σημείο $q = \gamma(t_0)$ για $t_0 \in (0,a]$ είναι συζυγές του p ανν το σημείο $v_0 = t_0 \gamma'(0)$ είναι κρίσιμο σημείο της $\exp_p$.

Επιπρόσθετα, η πολλαπλότητα του συζυγούς σημείου q του p ισούται με τη διάσταση του μηδενικού χώρου (πυρήνα/kernel) του $(d\exp_p)_{v_0}$.

Απόδειξη: $q = \gamma(t_0)$ συζυγές του p ανν. υπάρχει πεδίο Jacobi $J(t)$ με $J(0) = J(t_0) = 0$.
Όπως είδαμε $J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw)$ για $t \in [0,a]$. με $w = J'(0) \neq 0$.

$J(t_0) = 0 \Leftrightarrow \exists w \neq 0$ τ.ω. $(d\exp_p)_{t_0 v}(t_0 w) = 0$.

$\Leftrightarrow$ το $t_0 v = v_0$ είναι κρίσιμο σημείο του $\exp_p$.

Η πολλ/τα του q ισούται με τον αριθμό των Γ.Α. $J'(0) = w$, που ικανοποιούν $(d\exp_p)_{v_0}(t_0 w) = 0$, άρα με τη διάσταση του πυρήνα του $(d\exp_p)_{v_0}$ $\square$

<u>Παρατήρηση:</u>

p συζυγές του q $\Leftrightarrow$ q συζυγές του p με βάση τον ορισμό ως προς τα πεδία Jacobi.

p συζυγές του $\underset{\gamma(t_0)}{\overset{\shortparallel}{q}}$ $\Leftrightarrow$ $(d\exp_p)_{t_0\gamma'(0)}(t_0 J'(0))=0$ για κάποιο $J'(0)$, $J'(0) \perp \gamma'(0)$.

q συζυγές του $\underset{\tilde{\gamma}(t_0)}{\overset{\shortparallel}{p}}$ $\Leftrightarrow$ $(d\exp_q)_{t_0\tilde{\gamma}'(0)}(t_0 \tilde{J}'(0))=0$ για κάποιο $\tilde{J}'(0)$ με $\tilde{J}'(0) \perp \tilde{\gamma}'(0)$.

p, q συζυγή ανν $\exp_p$ και $\exp_q$ έχουν κρίσιμο σημείο σε κάποιο σημείο μετά από χρόνο t_0, στην κατεύθυνση της γεωδαισιακής.

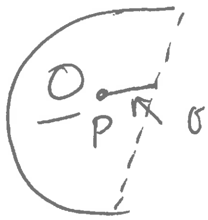
Πλήρεις Πολλαπλότητες:

<u>Ορισμός:</u> Μια πολ/τα Riemann ονομάζεται <u>γεωδαισιακά πλήρης</u> αν $\forall p\in M$ η απεικόνιση $\exp_p$ ορίζεται για κάθε $v\in T_pM$.

- Δηλαδή όλες οι γεωδαισιακές $\gamma(t)$ από το p ορίζονται $\forall t\in\mathbb{R}$ και αυτό να ισχύει $\forall p\in M$.

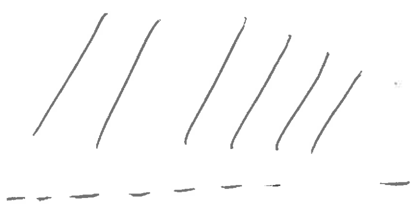
- Η M δεν έχει τοπολογικό σύνορο με τοπολογία την επαγόμενη από την μετρική.

Αν $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ με $g=\delta_{ij}$ και Ω φραγμένο, τότε (Ω,δ_{ij}) δεν είναι πλήρης.



Παρόμοια αν (M,g) με M άνω ημισφαίριο του S^2 και μετρική αυτή του S^2

Όμως $H^2=(\mathbb{R}^2_+, g)$ $\quad g=\dfrac{4(dx^2+dy^2)}{y^2}$ είναι πλήρης



← άξονας x που φαίνεται σαν "σύνορο" του $\mathbb{R}^2$, δεν είναι σύνορο για τον H^2, αφού καμιά γεωδαισιακή δε θα φτάσει ποτέ εκεί. Είναι το "άπειρο" του χώρου. Το H^2 είναι γεωδαισιακά πλήρης πολ/τα.

Παρόμοια για H^2 με μοντέλο μπάλας Poincaré  είναι γεωδαισιακά πλήρης πολ/τα.

$$d(p,q) := \inf_c \{ L(c) \mid c \text{ τμηματικά διαφορίσιμη καμπύλη από το } p \text{ στο } q. \}$$

(M,d): είναι μετρικός χώρος όπως είδαμε, αφού

(i) $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$

(ii) $d(p,q) = d(q,p)$

(iii) $d(p,q) \geq 0$ και $d(p,q) = 0$ ανν $p = q$.

Αν υπάρχει γεωδαισιακή γ από το p στο q που να ελαχιστοποιεί την απόσταση, τότε $L(\gamma) = d(p,q)$.

Αν υπάρχει καμπύλη με $\ell(c) = d(p,q)$ τότε η c είναι γεωδ.

- Δεν υπάρχει πάντα γεωδ. που να ελαχιστοποιεί την απόσταση:

Παρ. $\{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ g = \delta_{ij}\}$

$d(-p,p) = 2\|p\|$ όμως $\nexists\ \gamma$ από το $-p$ στο p στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ με μήκος $2\|p\|$.

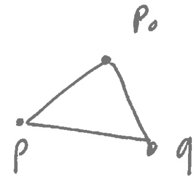
<u>Πρόταση:</u> Η τοπολογία της M που επάγεται από τη μετρική d είναι ισοδύναμη με την τοπολογία της διαφορίσιμης πολλ/τας M.

- $B_r(p) = \exp_p(B_r(\vec{0}))$ για r αρκετά μικρό. και έχουμε κανονική συντεταγμένες από το $\mathbb{R}^n \cong T_pM$ στην M.

Επίσης $B_r(p) = \{q \mid d(p,q) < r\}$ για r αρκετά μικρό (τ.ω. $\exp_p$ διαφορομορφισμός).

Άρα οι τοπολογία η επαγόμενη από τους χάρτες είναι ισοδύναμη με την επαγόμενη από τη μετρική d.

<u>Πόρισμα:</u> Η συνάρτηση $f: M \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $f(p) = d(p, p_0)$ για κάποιο $p_0 \in M$ σταθερό είναι συνεχής.



- $|f(p) - f(q)| = |d(p,p_0) - d(q,p_0)| \leq d(p,q) < \varepsilon$ για $d(p,q) < \delta = \varepsilon$.

<u>Θεώρημα</u> (Hopf - Rinow) Έστω (M,g) πολλ/τα Riemann. ΤΑΕΙ:

(a) $\exp_p$ ορίζεται σε όλο το T_pM. για 1 σημείο $p \in M$.

(b) (Heine - Borel) Τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα της M είναι συμπαγή. (σε μετρικό χώρο συμπαγές $\to$ κλειστό και φραγμένο).

(c) Η (M,d) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(d) Η M είναι γεωδαισιακά πλήρης.

(e) Υπάρχει ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων $K_n \subset M$ με $K_n \subset K_{n+1}$ και $\bigcup_n K_n = M$ τ.ω. αν $q_n \notin K_n$, $d(p, q_n) \to \infty$.

Επιπρόσθετα, οποιοδήποτε από τα πιο πάνω συνεπάγεται:

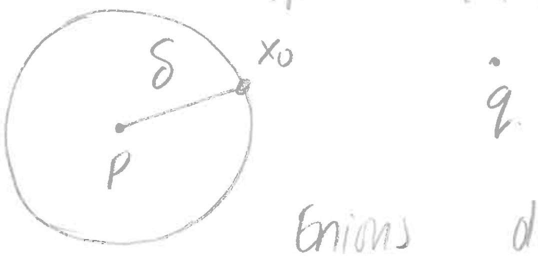
(f) $\forall q \in M$ υπάρχει γεωδαισιακή γ από το p στο q με $\ell(\gamma) = d(p,q)$ (μπορεί να ισχύει έστω κι αν δεν είναι πλήρης η M).

Απόδειξη.

(b) $\Leftrightarrow$ (e) : από Πραγματική ανάλυση - ισχύει για μετρικούς χώρους.

1. (a) $\to$ (f)
2. (a) & (f) $\to$ (b)
3. (b) $\to$ (c)
4. (c) $\to$ (d)
5. (d) $\to$ (a)

(a) $\to$ (f). Έστω $d(p,q) = r$ και $B_\delta(p)$ κανονική γεωδαισιακή μπάλα για το p.
Τότε $S = \partial B_\delta(p)$ είναι συμπαγής στην M, αφού $\exp_p$ διαφορομορφισμός και $\partial B_\delta(0)$ συμπαγής στο T_pM



$(S = \exp_p(\partial B_\delta(0)))$

Επίσης $d(x,q)$ συνεχής. Αφού S συμπαγής τότε $\exists x_0 \in S$ τ.ω. $d(x_0, q) = \min\{d(x,q) \mid x \in S\}$
άρα $x_0 = \exp_p(\delta v)$ με $|v| = 1$.

$\gamma(s) := \exp_p(sv)$ $s \in \mathbb{R}$, γεωδαισιακή.
Θα δείξουμε ότι $\exp_p(rv) = q$ $(r = d(p,q))$

Έστω $A = \{s \in [0,r] \mid d(\gamma(s), q) = r - s\}$

Ξέρουμε ότι στο $s = 0$ $d(\gamma(0), q) = d(p,q) = r$, άρα $0 \in A$

Θα δείξουμε ότι το A είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο στο $[0,r]$.

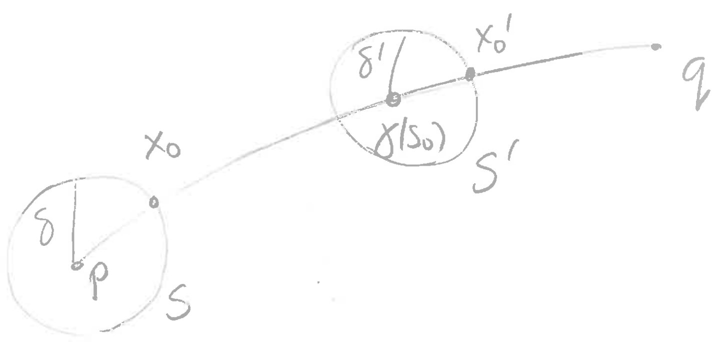
Το A είναι <u>κλειστό</u>, αφού d συνεχής συνάρτηση και άρα αν μια ακολουθία $\{s_k\}$ με $s_k \to s_0$ περιέχεται στο A, τότε $s_0 \in A$.

Για ανοικτό ν.δ.ο. αν $s_0 \in A$ τότε $\exists \delta' > 0$ τ.ω.
$(s_0 - \delta', s_0 + \delta') \cap [0, r] \subset A$

$s_0 < r$: Από τις ιδιότητες ελαχιστοποίησης του γ, ξέρουμε ότι $(s_0-\delta', s_0] \subset A$. ⊙

$B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ κανονική γεωδ. μπάλα στο $\gamma(s_0)$ για δ' μικρό.

με $S' = \partial B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ - πάλι συμπαγής



Έστω $x_0' \in S'$ τ.ω. $d(x_0', q) = \min\{d(x,q) \mid x \in S'\}$.

- Αρκεί να δείξουμε ότι $x_0' = \gamma(s_0+\delta')$ (*)
- Υποθέτουμε (*)

Ξέρουμε ότι $d(\gamma(s_0), q) = d(x_0', q) + \delta'$ αφού για να πάμε από το $\gamma(s_0)$ στο q περνάμε από το S' και το x_0' έχει την ελάχιστη απόσταση από το q. Επίσης $d(\gamma(s_0), q) = r - s_0$.

Άρα, $r - s_0 = \delta' + d(\underset{\gamma(s_0+\delta')}{\underset{\shortparallel}{x_0'}}, q) = \delta' + d(\gamma(s_0+\delta', q))$, αν υποθέσουμε (*)

$$\Rightarrow d(\gamma(s_0+\delta'), q) = r - (s_0+\delta') \Rightarrow s_0+\delta' \in A.$$

και άρα το $(s_0, s_0+\delta') \subset A$.

- Αν ένα υποσύνολο A του $[0,r]$ είναι ανοικτό και κλειστό στο $[0,r]$ τότε $A = [0,r]$. Αν $r \in A \Rightarrow d(\gamma(r), q) = 0$
$\Rightarrow \gamma(r) = q$.

- Τώρα θ.δ.ο. $x_0' = \gamma(s_0+\delta')$ (*)

⊙ Σημείωση. $d(\gamma(s_0-\varepsilon), q) \le d(\gamma(s_0), q) + d(\gamma(s_0), \gamma(s_0-\varepsilon))$
$= r - s_0 + \varepsilon = r - (s_0-\varepsilon)$ για ε μικρό

Όμως $d(\gamma(s_0-\varepsilon), q) \geq d(\gamma(0), q) - \underbrace{d(\gamma(0), \gamma(s_0-\varepsilon))}_{\le s_0-\varepsilon} \geq r - (s_0-\varepsilon)$

"=" $s_0-\varepsilon \in A$.

Από την τριγωνική ανισότητα,

$d(x_0', p) \geq d(p,q) - d(q, x_0')$

Επίσης $d(\gamma(s_0), q) = d(x_0', q) + \delta'$ όπως εξηγήσαμε πιο πάνω,

$= r - s_0$

$\Rightarrow d(x_0', q) = r - s_0 - \delta'$

$\therefore d(x_0', p) \geq d(p,q) - d(q,x_0') = r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'$

Ταυτόχρονα η καμπύλη c που αποτελείται από τη γεωδαισιακή γ από το p ως το $\gamma(s_0)$, και από μια γεωδαισιακή ακτίνα από το $\gamma(s_0)$ στο x_0' ενώνει το p με x_0' και έχει μήκος $s_0+\delta'$.

Αφού c ενώνει p με x_0', $d(p,x_0') \geq s_0+\delta'$ και η c έχει μήκος $s_0+\delta'$, τότε $d(p,x_0') = s_0+\delta'$. και η c είναι λεία γεωδαισιακή - από ελαχιστοποιητική ιδιότητες γεωδαισιακών.

Δηλαδή η c είναι λεία, και συμπίπτει με τη γ,

άρα $x_0' = \gamma(s_0+\delta')$

(a) $\to$ (b) Έστω $A \subset M$ κλειστό και φραγμένο

A φραγμένο, άρα $A \subset B$ όπου B μια μπάλα με κέντρο το p ως προς τη μετρική d.

Από το (f) υπάρχει μπάλα $B_R(0) \subset T_pM$ τ.ω.

$B \subset \exp_p(\overline{B_R(0)})$

$\exp_p$ συνεχής και $\overline{B_R(0)}$ συμπαγή στο T_pM, άρα

$\exp_p(\overline{B_R(0)})$ συμπαγές.

$\therefore$ A κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου (σε μετρικό χώρο)

άρα A συμπαγές.

(b) → (c)

Έστω $\{p_n\}_n$ ακολουθία Cauchy στην M.
Τότε το σύνολο των σημείων της ακολουθίας είναι φραγμένο.

Άρα $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό και φραγμένο, και από το (b) είναι τότε συμπαγές.

$\therefore$ $\{p_n\}_n$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία στην M.
Αφού η $\{p_n\}_n$ είναι Cauchy, τότε συγκλίνει με όριο στην M.

(c) → (d) Έστω M μη γεωδαισιακά πλήρης. Δηλαδή υπάρχει γεωδαισιακή γ που ορίζεται για $s < s_0$, αλλά όχι στο s_0. με $|\gamma'| = 1$
Έστω $\{s_n\}$ ακολουθία που συγκλίνει στο s_0, με $s_n < s_0$.
Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $N_0(\varepsilon)$ τ.ω. για $n, m \geq N_0$

$$d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq \left| \int_{s_n}^{s_m} |\gamma'(t)|\, dt \right| = |s_n - s_m| < \varepsilon$$

Άρα η $\{\gamma(s_n)\}$ είναι Cauchy στην (M, d)
Αφού η (M, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε

$\{\gamma(s_n)\} \to p_0 \in M$

Έστω W μια ομοιόμορφα κανονική γειτονιά του p_0, τ.ω. $B_\delta(q) \supset W$ $\forall q \in W$ και $B_\delta(q)$ κανονική μπάλα στο q.

Έστω N_0 τ.ω για $n, m \geq N_0$, $|s_n - s_m| < \delta/2$ και $\gamma(s_n), \gamma(s_m) \in W$. (παρατηρούμε ότι $|s_n - s_0| < \delta$ για $n \geq N_0$).
Τότε υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή $\tilde{\gamma}$ που να ενώνει τα $\gamma(s_n)$ και $\gamma(s_m)$, με μήκος μικρότερο από δ.
Αυτή η γεωδαισιακή συμπίπτει με τη γ, όπου ορίζεται η γ.

Όμως $\exp_{\gamma(s_n)}$ είναι διαφορομορφισμός στη $B_\delta(0)$ και $\exp_{\gamma(s_n)}(B_\delta(0)) \supset W$, τότε η $\tilde{\gamma}$ επεκτείνει τη γ και στο s_0.

(d)→(a) από τον ορισμό.

$\square$

• Θα δούμε μετά ότι για $K \leq 0$ $\exp_p$ διαφορομορφισμός.
- δηλαδή το p δεν έχει συζυγή σημεία.