(στ) Οι πρώτες μερικές παράγωγοι των g_{ij} ως προς τις συντεταγμένες $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ είναι μηδενικές στο p.
$(g_{ij,k}|_p = 0)$, άρα $\Gamma_{ij}^{k}|_p = 0$ $\forall i,j,k$ - από τύπο για σύμβολα Christoffel ως προς g.

Απόδειξη: (α) Έστω $\gamma(t)$ γεωδαισιακή με $\gamma(0)=p$ $\gamma'(0)=v$
τότε εξ ορισμού $\gamma(t) = \alpha(t,p,v) = \alpha(1,p,tv) = \exp_p(tv)$
για $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_i v_i E_i\Big|_p$

Άρα $\varphi^{-1}(\gamma(t)) = E^{-1} \circ \exp_p^{-1}(\exp_p(tv)) = E^{-1}(tv) = (tv_1, \dots, tv_n)$
↑ διαφορομορφ.

(β) $p = \gamma(0) = \alpha(0,p,0) = \exp_p(0).$ $\Rightarrow \varphi^{-1}(p) = \vec{0}.$

(γ) $(g_{ij})_p = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle_p = \langle (d\exp_p)_0(E_i), (d\exp_p)_0(E_j) \rangle_p$
$= \langle E_i, E_j \rangle_p = \delta_{ij}$ αφού $\{E_i\}_i$ ο.κ. στο T_pM.
αφού $(d\exp)_0 = Id|_{T_pM}$

(δ) $v \in B_\varepsilon(0) \subset T_pM \Leftrightarrow \left|\sum_i v_i E_i\right|_g < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\sum_i (v_i)^2\right)^{1/2} < \varepsilon$
αφού $\{E_i\}_i$ ο.κ. στο $T_p M$.

$$\left.\begin{aligned} r(x) &= \left(\sum_i (x_i)^2\right)^{1/2} = |\varphi^{-1}(x)|_{\mathbb{R}^n} \\ |\exp_p^{-1}(x)|_g &= \left|\sum_i x_i E_i\right|_g = \left(\sum_i (x_i)^2\right)^{1/2} \end{aligned}\right\}$$

Άρα $\{x \mid r(x) < \varepsilon\} = \{x \mid |\exp_p^{-1}(x)|_g < \varepsilon\} =$

$= \{x \mid \exp_p^{-1}(x) \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{στο } T_pM}}{B_\varepsilon(0)}\} \equiv \exp_p(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{στις συντεταγμένες } E_i}}{B_\varepsilon(0)})$

(ε) Έστω $q \in U \setminus \{p\}$

Αν $\varphi^{-1}(q) = (x_1, \dots, x_n)$, τότε $v = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{r} E_i$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο T_pM και

$\gamma(t) = \exp_p(tv) = \alpha(t, p, v)$ είναι γεωδαισιακή καμπύλη

με $\gamma(0) = p$ και $\gamma(r) = \alpha(1, p, rv) = \alpha(1, p, \sum_i x_i E_i) =$

$= \exp_p(\sum_i x_i E_i) = q.$

$\therefore$ γ γεωδαισιακή από το p στο q

και $\gamma'(t) = \frac{d}{dt}(\exp_p(tv)) = (d\exp_p)_{tv}(v) = (d\exp_p)_{tv}\left(\sum_i \frac{x_i}{r} E_i\right)$

$= \sum_i \frac{x_i}{r} (d\exp_p)_{tv}(E_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{εξ ορισμού } \partial/\partial x_i}}{\equiv} \sum_i \frac{x_i}{r} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\exp_p(tv)} =$

$= \sum_i \frac{x_i}{r} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\gamma(t)} = \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{\gamma(t)}$

Επίσης $|\gamma'(t)|_g = |\gamma'(0)|_g = |v|_g = 1$ αφού γεωδαισιακή

άρα $\left|\frac{\partial}{\partial r}\right|_g = 1$. στη $\gamma(t)$.

(στ) Θέλουμε ν.δ.ο. $\nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p = 0 \quad \forall i,j.$

Έστω $\gamma(t) = \exp_p(tE_i + tE_j)$ γεωδαισιακή στο p.

τ.ω. $\gamma'(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\gamma(t)}$

Τότε $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t)\Big|_{t=0} = \nabla_{\gamma'(0)} \gamma'(t)\Big|_{t=0} = \nabla_{(\partial/\partial x_i + \frac{\partial}{\partial x_j})(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\gamma(t)}\Bigg|_{t=0} =$

$$= \nabla_{\partial/\partial x_i(p)} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p + \nabla_{\partial/\partial x_j(p)} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p + \nabla_{\partial/\partial x_i(p)} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p + \nabla_{\partial/\partial x_j(p)} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

γ γεωδαισιακή άρα $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0.$

Επίσης αν $\alpha_i(t) = \exp_p(tE_i)$ τότε $\alpha_i(0) = p$ και $\alpha_i'(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$

άρα $\nabla_{\partial/\partial x_i(p)} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \nabla_{\alpha_i'(t)} \alpha_i'(t)\Big|_{t=0} = 0$ αφού α_i γεωδαισιακή.

Άρα $\nabla_{\partial/\partial x_i(p)} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = 0 \quad \forall i$

Από συμμετρικότητα συνδέσμου $\nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p = \nabla_{\partial/\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$

$\therefore\ 2\nabla_{\partial/\partial x_i} \partial/\partial x_j\Big|_p = 0 \quad \forall i,j$

Άρα $g_{ij,k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle\right) = \left\langle \nabla_{\partial/\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla_{\partial/\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle$

$= 0 \quad \forall i,j,k$

$\square$

· Συνέπεια της πρότασης είναι ότι κοντά στο p

$$g=\delta_{ij}+\underbrace{O(|x|^2)}_{\text{καμπυλότητα.}}$$

Ομοιόμορφα Κανονική Γειτονιά:

Πρόταση 4 $\forall p\in M$ υπάρχει γειτονιά W του p και $\delta>0$ τ.ω. $\forall q\in W$ η απεικόνιση $\exp_q$ είναι διαφορομορφισμός στο $B_\delta(0)\subset T_qM$ και $\exp_q(B_\delta(0))\supset W$.
Δηλαδή η W είναι κανονική γειτονιά για όλα τα $q\in W$.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{E}\subset TM$ ανοικτό και $F: TM\to M\times M$ τ.ω. $F(q,v)=(q,\exp_q(v))$

Έστω (U,φ) γειτονιά κανονικών συντεταγμένων στο p.
με $\varphi^{-1}(x)=(x_1,\dots,x_n)$.

Τότε $(x_1,\dots,x_n,v_1,\dots,v_n)$ συντεταγμένες για ανοικτή γειτονιά στο TM και η F σε συντεταγμένες γράφεται ως:

$$F(x_1,\dots,x_n,v_1,\dots,v_n)=\left(x_1,\dots,x_n,\ \varphi^{-1}\left(\exp_p\left(\textstyle\sum_i v_iE_i\right)\right)\right)$$

Άρα
$$[DF]_{(p,0)}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial x_n} & \frac{\partial x_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial v_n}\\
\vdots & & & \vdots & & \\
\frac{\partial x_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n} & \frac{\partial x_n}{\partial v_1} & & \frac{\partial x_n}{\partial v_n}\\
\hline
\nabla_{\vec{x}}(\varphi^{-1}\exp_p)_1 & & & \frac{\partial(\varphi^{-1}(\exp_p))_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial(\varphi^{-1}(\exp_p))_1}{\partial v_n}\\
\vdots & & & \vdots & & \\
\nabla_{\vec{x}}(\varphi^{-1}\exp_p)_n & & & \frac{\partial(\varphi^{-1}(\exp_p))_n}{\partial v_1} & & \frac{\partial(\varphi^{-1}(\exp_p))_n}{\partial v_n}
\end{array}\right]_{(p,0)}=$$

$$= \begin{bmatrix} Id & 0 \\ * & (d\exp_p)_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ * & Id \end{bmatrix}.$$

Άρα F τοπικός διαφορομορφισμός.

$F(p,0) = (p,p)$, άρα $\exists\ U' = V' \times B_\delta(0)$ ανοικτό

$= \{(q,v) \mid q \in V'$ και $v \in T_qM \quad |v| < \delta\}$

τ.ω. F διαφορομορφισμός από το U' σε γειτονιά

W' του $(p,p) \in M \times M$ ανοικτή

Έστω W γειτονιά του p στην M τ.ω. $W \times W \subset W'$.

Τότε η γειτονιά W και το δ έχουν τις ιδιότητες που

θέλουμε, αφού $\forall q \in W \quad \exp_q(B_\delta(0)) \supset W$.

άρα $\exp_q$ είναι διαφορομορφισμός στο $B_\delta(0)$.

$\square$

Γεωδαισιακή και Απόσταση:

Κανονική καμπύλη, διαφορίσιμη κατά τμήματα: $\gamma : [a,b] \to M$.

$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ τ.ω. $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ είναι διαφορίσιμη.

και $\gamma'(t) \neq 0$ σε κάθε $[t_i, t_{i+1}]$.

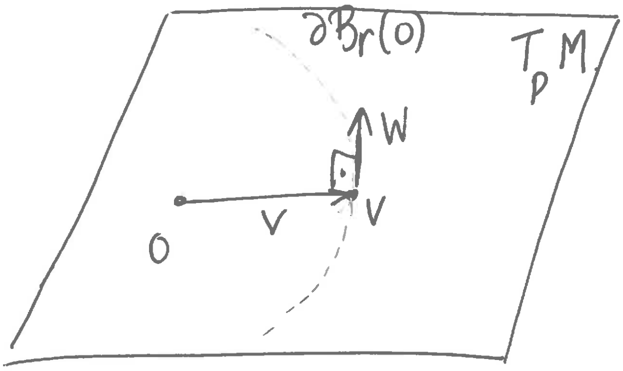
Η παράλληλη μετατόπιση στη γ γίνεται και αυτή κατά τμήματα.

Κάθε κανονική καμπύλη μπορεί να παραμετρικοποιηθεί έτσι ώστε $|\gamma'| = 1$ $\forall t$.

Ορισμός: Μια καμπύλη $\gamma : [a,b] \to M$ ελαχιστοποιεί την απόσταση μεταξύ $\gamma(a)$ και $\gamma(b)$ αν $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$ για κάθε διαφορίσιμη κατά τμήματα καμπύλη c από το $\gamma(a)$ στο $\gamma(b)$.

Στόχος: ν.δ.ο. οι καμπύλες που ελαχιστοποιούν την απόσταση είναι γεωδαισιακές, και ότι μια γεωδαισιακή ελαχιστοποιεί "τοπικά" την απόσταση.

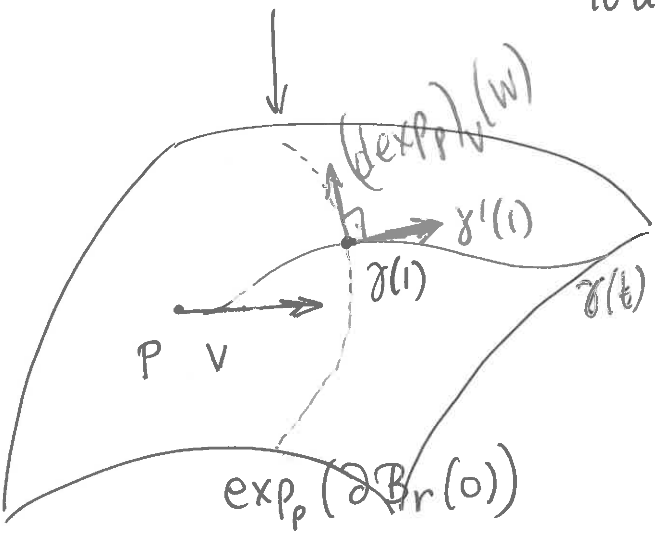
$\gamma(t) = \exp_p(tv)$: γεωδαισιακή από το p στην κατεύθυνση $v \in T_pM$



Έστω $w \in T_v(T_pM) \approx T_pM$ και $w \perp v$ στο σημείο $v \in T_pM$

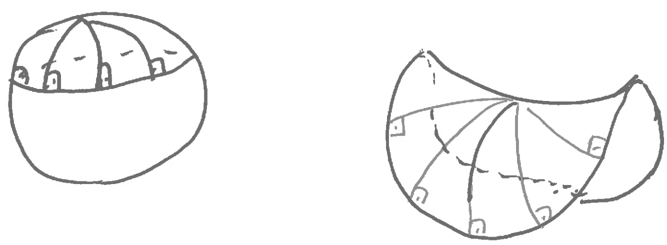
Έστω $\partial B_r(0) =$ σφαίρα στο T_pM με $r = |v|$.

Τότε $(d\exp_p)_v(w) \perp \gamma'(1)$.



Δηλαδή $(\exp_p)(\partial B_r(0))$ είναι υποπολλαπλότητα της M που είναι κάθετη στις γεωδαισιακές $\gamma(t)$ από το p.

- η γεωδαισιακή σφαίρα ακτίνας r.



Λήμμα του Gauss: Έστω $p \in M$ και $v \in T_pM$ τ.ω. $\exp_p v$ να ορίζεται, και $\exp_p$ διαφορομορφισμός σε ανοικτό σύνολο $U \supset B_{|v|}(0)$.

Έστω $w \in T_pM \approx T_v(T_pM)$.

Τότε

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle_p$$

· Δηλαδή $(d\exp_p)_v$ διατηρεί τη γωνία μεταξύ της γεωδαισιακής με $\gamma'(0)=v$ και του διανύσματος w.

Απόδειξη. Έστω $w=\alpha v + w_N$ με $w_N \perp v$

Τότε $\langle v,w\rangle = \langle v, \alpha v + w_N\rangle = \alpha|v|^2$

και $\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(\alpha v+w_N)\rangle =$

$$= \alpha \underbrace{\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(v)\rangle}_{\alpha|v|^2} + \langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w_N)\rangle \quad (*)$$

$$(d\exp_p)_v(v) = \frac{d}{dt}\left(\exp_p(tv)\right)\Big|_{t=1} = \gamma'(1)$$

όπου $\gamma(t)=\exp_p(tv)$ γεωδαισιακή με $\gamma(0)=p$

και $\gamma'(0)=v$.

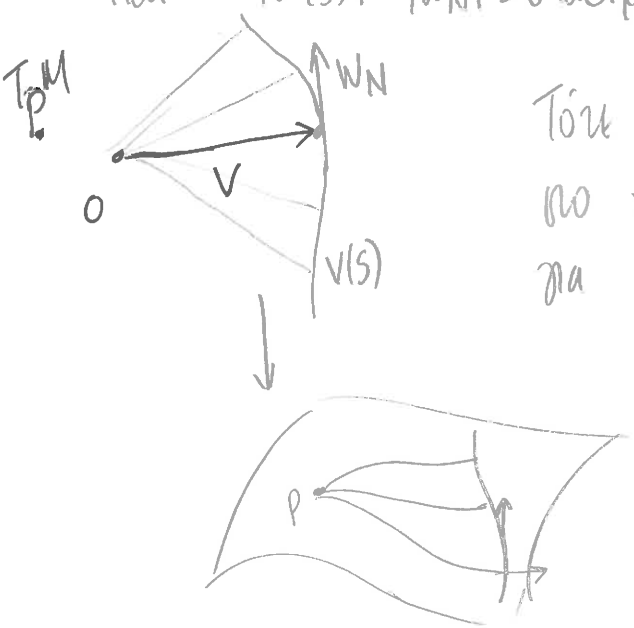
Άρα $|\gamma'(1)|=|\gamma'(0)|=|v|$

Άρα από $(*)$ αρκεί ν.δ.ο $\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w_N)\rangle = 0$

για $w_N\perp v$. $w_N\neq 0$

Έστω $v(s)$ καμπύλη στο T_pM με $v(0)=v$, $v'(0)=w_N$

και $|v'(s)|=|w_N|=$ σταθερά.



Τότε $\exists \varepsilon>0$ τ.ω. $v(s)$ να βρίσκεται στο χωρίο όπου $\exp_p$ είναι διαφορομορφισμός για $|s|<\varepsilon$

Έστω $u(s,t)=tv(s)$ για $0\le t\le 1$,

$A=\{(t,s)\mid 0\le t\le 1,\ -\varepsilon<s<\varepsilon\}$

και $f: A\to M$ με $f(s,t)=\exp_p(tv(s))$ παραμετρισμένη επιφάνεια στην M.

Παρατήρηση: οι καμπύλες $\gamma_{s_0}: t\longmapsto f(t,s_0)$ είναι γεωδαισιακές.

$$\frac{\partial f}{\partial s}=(d\exp_p)_{tv(s)}(tv'(s)) \quad \text{διαν. πεδίο}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=(d\exp_p)_{tv(s)}(v(s)) \quad \text{διαν πεδίο} \equiv \text{εφαπτόμενο διάνυσμα της } \gamma_s(t)$$

Στο $t=0$, $s=0$: $f(0,0)=p$, $tv(s)\big|_{(0,0)}=0$, $tv'(s)\big|_{(0,0)}=0$, και $v(0)=\cancel{0}$

Άρα $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\Big|_{(0,0)}=\langle 0,(d\exp_p)_0(v(0))\rangle=0$

Στο $t=1$, $s=0$ $f(1,0)=\exp_p(v)$, $v'(0)=w_N$, $v(0)=v$

Άρα $\frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{(1,0)}=(d\exp_p)_v(w_N)$ και $\frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{(1,0)}=(d\exp_p)_v(v)$

Άρα $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\Big|_{(1,0)}=\langle (d\exp_p)_v(w_N),(d\exp_p)_v(v)\rangle$.

Επίσης $\forall (t,s)\in A$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\right)=\left\langle \frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right),\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle+\left\langle \frac{\partial f}{\partial s},\cancel{\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)}^{\,0}\right\rangle$$

$$\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = D_{\gamma_s'(t)}\gamma_s'(t)$$

αφού $\gamma_s(t)$ γεωδαισιακή

Λήμμα Συμμετρίας: Έστω $f: I_1 \times I_2 \to M$
$$(t,s) \longmapsto f(t,s)$$
μια παραμετρικοποιημένη επιφάνεια στην M για $I_i \subset \mathbb{R}$.

Τότε $$\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right).$$

Απόδειξη: Σε συντεταγμένες, $f(t,s) = (x_1(t,s), \dots, x_n(t,s))$.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial f}{\partial s} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial s} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Άρα $$\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \sum_i \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial s} \cdot \underbrace{\nabla_{\partial/\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}}_{\sum_k \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x_k}} \right)$$

$$= \sum_k \left[\frac{\partial^2 x_k}{\partial s \partial t} + \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial s} \Gamma_{ji}^k \right] \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Παρόμοια $$\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \sum_k \left[\frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial s} + \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial s} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial s} \Gamma_{ij}^k \right] \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$i \leftrightarrow j \qquad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

$$= \frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)$$

□

Συνέχεια απόδειξης:

Άρα $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle\right) = \left\langle \frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right), \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s}\left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s}\left(|\gamma_s'(t)|^2\right) = 0$$ αφού γ_s γεωδ. με $|\gamma_s'| =$ σταθ.

$\therefore \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle =$ σταθερά $\forall t$.

$$\therefore \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{(1,0)} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{(0,0)} = 0$$

QED

Σημειώσεις: Η $f(t,s)$ που ορίσαμε είναι ένα είδος μεταβολής μιας γεωδαισιακής $\gamma(t)$ σε κάθετο διαν. πεδίο $V(s)$ που ορίζεται με βάση το W_N.

Χρησιμοποιήσαμε τη συμμετρία του συνδέσμου L-C $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$ και το ότι $\exp_p(tV(s))$ είναι γεωδαισιακή όταν $s=s_0$ σταθερό, με σταθερή νόρμα ταχύτητας.

Το ότι $\frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = 0$ και $\frac{\partial}{\partial s} \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = 0$ δείχνει ότι οι γεωδαισιακές είναι ένα κρίσιμο σημείο της πολίτας αν επιτρέψαμε κάθετες μεταβολές τους.

$\frac{\partial}{\partial r}$: διαν. πεδίο στην κανονική γεωδαισιακή μπάλα. το οποίο είναι μοναδιαίο και εφαπτόμενο στις γεωδαισιακές που περνούν από το p.

Παρατήρηση: $(d\exp_p)_V(V) = \gamma'(1) = |V| \cdot \frac{\partial}{\partial r}$

Άρα $\frac{\partial}{\partial r} \perp \exp_p(\partial B_r(0))$

<u>Πρόταση 5</u> Έστω $p \in M$, U κανονική γειτονιά στο p και $B \subset U$ κανονική γεωδαισιακή μπάλα με κέντρο p.

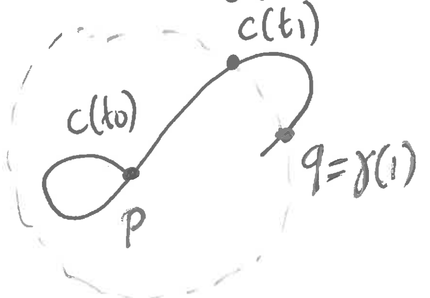
Έστω $\gamma : [0,1] \to B$ γεωδαισιακή με $\gamma(0) = p$.

Αν $c : [0,1] \to M$ είναι διαφορίσιμη κατά τμήματα καμπύλη με $c(0) = \gamma(0) = p$ και $c(1) = \gamma(1)$, τότε $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$.

Αν επίσης $\ell(\gamma) = \ell(c)$ τότε $\gamma([0,1]) = c([0,1])$.

<u>Απόδειξη:</u> $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ για v τ.ω. $|v| = \ell(\gamma) = R$ αφού $\gamma(1) = q \in B$ και $\exp_p$ διαφορομορφισμός στη $B_R(0)$.

Έστω $S_R = \exp_p(\partial B_R(0))$ γεωδ. σφαίρα στο p



Έστω $t_0, t_1 \in [0,1]$ τ.ω. t_0 το μεγαλύτερο t με $c(t_0) = p$ και t_1 η πρώτη στιγμή μετά το t_0 τ.ω. $c(t_1) \in S_R$ (η c μπορεί να βγει έξω από τη μπάλα).

Υποθέτουμε ότι $|c'| = \sigma\tau\alpha\theta$.

Στο $[t_0, t_1]$ η c μπορεί να γραφεί ως

$c(t) = \exp_p(b(t))$ με $b(t)$ καμπύλη στο T_pM στη $B_R(0)$

και $c'(t) = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial r} + N(t)$ $\quad \frac{\partial}{\partial r}$: ακτινικό διάνυσμα

και $N(t)$ εφαπτόμενο στην σφαίρα S στο $c(t)$.

(εκτός πιθανά σε πεπερασμένο αριθμό σημείων).

Από το Λήμμα του Gauss:

$$|c'(t)|^2 = |\alpha(t)|^2 + |N(t)|^2 \quad \text{αφού} \quad \langle \tfrac{\partial}{\partial r}, N(t) \rangle = 0.$$

$\therefore \ |c'(t)| \geqslant |\alpha(t)|$

Άρα. $L(c) = \int_0^1 |c'(t)| \geqslant \int_{t_0}^{t_1} |c'(t)| = L(c|_{[t_0,t_1]})$

$\geqslant \int_{t_0}^{t_1} |\alpha(t)|\, dt$

Έστω $r(c(t))$ η ακτινική απόσταση του $\exp_p^{-1}(c(t))$ από το $\vec{0}$ (στο T_pM).

Δηλαδή αν $c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ σε κανονικές συντεταγμένες,

$r(c(t)) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i(t))^2\right)^{1/2}$ με $\frac{\partial}{\partial r} = \sum_i \frac{x_i}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Τότε $\frac{d}{dt}(r(c(t))) = \langle \frac{1}{r} \cdot c(t), c'(t) \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial r}(c(t)), c'(t) \rangle$

$\quad \| \ \sum_i \frac{1}{r} \cdot 2x_i \cdot x_i' \ //$

Όμως. $\langle c'(t), \frac{\partial}{\partial r} \rangle = \alpha(t)$ από το Λήμμα Gauss.

$\quad \frac{\partial}{\partial r} \equiv \partial/\partial r(c(t))$

$\therefore \ \alpha(t) = \frac{d}{dt}(r(c(t)))$

$\therefore \ L(c) \geqslant \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}(r(c(t)))\, dt = r(c(t_1)) - r(c(t_0)) = R - 0 = L(\gamma).$

Παρατηρούμε ότι η ισότητα ισχύει ανν

$|c'(t)| = |\alpha(t)| \Leftrightarrow c'(t) = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial r}$ και $t_0 = 0$, $t_1 = 1$.

Δηλαδή ανν η c είναι ακτινική γεωδαισιακή από το p στο q, και αφού $|c'| =$ σταθερά τότε $\alpha(t) =$ σταθερά.

Έτσι ισχύει $c([0,1]) = \gamma([0,1])$.

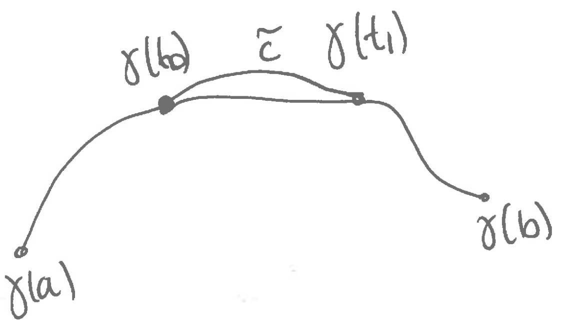
QED.

Πόρισμα 6. Στην ομοιόμορφα κανονική γειτονιά W $\forall q_1, q_2 \in W$ υπάρχει μία μοναδική γεωδαισιακή καμπύλη που τα ενώνει με μέγιστο μήκος δ.

$(\exp_{q_1}(B_\delta(0)) \supset W \ni q_2)$

Πόρισμα 7: Έστω $\gamma : [a,b] \to M$ διαφορίσιμη κατά τμήματα καμπύλη με $l(\gamma) \leq l(c)$ για κάθε καμπύλη (διαφ. κατά τμήμ.) c που ενώνει το $\gamma(a)$ με το $\gamma(b)$.
Τότε η γ είναι γεωδαισιακή. (και $\gamma' \neq 0$).

Απόδειξη: Έστω $t \in [a,b]$
Τότε υπάρχει ομοιόμορφα κανονική γειτονιά W με $\gamma(t) \in W$. και υποδιάστημα $I \subset [a,b]$ τ.ω. $\gamma|_I \subset W$.
t δεν είναι άκρο του I.
Από την Πρόταση 5 η $\gamma|_I$ είναι γεωδαισιακή αφού αν $I = [t_0, t_1]$ τότε $l(\gamma|_I)$ πρέπει να είναι μικρότερο από οποιασδήποτε καμπύλης που ενώνει τα $\gamma(t_0)$ και $\gamma(t_1)$, διαφορετικά η γ δεν είναι η καμπύλη μικρότερου μήκους από το $\gamma(a)$ στο $\gamma(b)$ (μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με πιο σύντομη)



Δηλαδή η γ είναι γεωδαισιακή στο t και άρα C^∞.

t τυχαίο
$\therefore$ γ γεωδαισιακή στο $[a,b]$.

$\square$

<u>Ορισμός:</u> Η <u>απόσταση Riemann</u> ανάμεσα σε δύο σημεία $p, q \in M$ ορίζεται ως

$$d(p,q) = \inf_{c} \{ L(c) \mid c : [0,1] \to M \quad c(0)=p \ , \ c(1)=q$$
$$c \text{ διαφ. κατά τμήματα με } c' \neq 0 \}.$$

<u>Λήμμα 8</u> (M,d) είναι μετρικός χώρος με τοπολογία ως προς d ισοδύναμη με την τοπολογία της πολ/τας M.

Αρκεί ν.δ.ο.

<u>Απόδειξη:</u> (i) $d(p,q) = d(q,p) \geq 0$. ✓

(ii) Αν $d(p,q) = 0 \Rightarrow p = q$.

(iii) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q) \quad \forall p,q,r \in M$.

(ii) Έστω W ομοιόμορφα κανονική γειτονιά του p. με $\exp_p$ διαφορομορφισμό για $|v| < \delta$

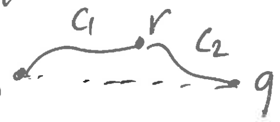
Αν $q \notin W \Rightarrow d(p,q) \geq \delta$ αφού κάθε καμπύλη c πρέπει να περάσει από S_δ - το σύνορο της γεωδ. σφαίρας.

Αν $q \in W$ τότε κάθε καμπύλη c από το p στο q ικανοποιεί $\ell(c) \geq \ell(\gamma)$ με $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ και $|v| = \ell(\gamma)$

Αν $d(p,q) = 0 \Rightarrow q \in \exp_p(B_\varepsilon(0)) \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow q = \gamma_\varepsilon(1) = \exp_p(v_\varepsilon)$ για v_ε με $|v_\varepsilon| < \varepsilon$

Αφού $\exp_p$ διαφορομορφισμός $\Rightarrow p = q$ στέλνοντας το $\varepsilon \to 0$.

(iii) Για κάθε c_1 από το p στο r και c_2 από το r στο q $c_1 \cup c_2$ είναι καμπύλη από το p στο q - αλλά μπορεί να έχει και πιο μικρές $\therefore d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$



- Για την τοπολογία Lee για λεπτομέρειες.
  $\exp_p$ τοπικός διαφορομορφισμός - δίνει ισοδυναμία τοπικά για τις βάσεις ανοικτών.

$\square$

<u>Πόρισμα 9.</u> Αν το x ανήκει σε γεωδαισιακή μπάλα γύρω από το $p \in M$ με κανονικές συντεταγμένες $x = (x_1, \dots, x_n)$, τότε
$$r(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{1/2} = d(p, x),$$
είναι η απόσταση Riemann του p από το x.

<u>Απόδειξη:</u> Αν $v = (x_1, \dots, x_n)$ οι κανονικές συντεταγμένες του x, τότε $\gamma(t) = \exp_p\left(t \frac{v}{\|v\|}\right)$ είναι γεωδαισιακή με $x = \gamma(\|v\|)$ και η γ ελαχιστοποιεί το μήκος αφού ισχύει σε γειτονιά καν. συντεταγμένων όπου $\exp_p$ διαφορομορφισμός.
$$\therefore\ d(p, x) = \ell(\gamma) = \int_0^{\|v\|} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{\|v\|} \left|\frac{\partial}{\partial r}\right| dt = \|v\| = r(x).$$

$\square$

Γεωδαισιακές σε συμμετρικούς χώρους:

- $\mathbb{R}^n$ $\quad \gamma(t)=\vec{x}_0+t\vec{v}_0$ $\quad$ γεωδαισιακή

- $S^{n-1}\hookrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad$ σφαίρα ακτίνας 1

Έστω $\gamma(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$ γεωδαισιακή στην S^{n-1}

με $\gamma(0)=(1,0,\dots,0)=B$

και $\gamma'(0)=\frac{\partial}{\partial x_1}$

Θα δείξουμε ότι $\gamma(t)=(x_1(t),0,\dots,0,x_n(t))$

δηλαδή η γ είναι μεγάλος κύκλος. – τομή με το επίπεδο x_1x_n.

Ας υποθέσουμε ότι $x_i(t_0)\neq 0$ για κάποιο $i\neq 1,n$, και t_0.

Η απεικόνιση $\phi: S^{n-1}\to S^{n-1}$ με $\phi=\Phi|_{S^{n-1}}$ όπου

$$\Phi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)=(x_1,\dots,-x_i,\dots,x_n)$$ είναι

μια ισομετρία. – διατηρεί τις γωνίες ανάμεσα στα εφαπτόμενα διανύσματα:
$$[D\Phi]=\begin{bmatrix}1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1\end{bmatrix}.$$

και άρα Φ είναι μια ισομετρία στο $\mathbb{R}^n$. Αφού στην S^{n-1} η μετρική είναι η επαγόμενη από το $\mathbb{R}^n$, και Φ διατηρεί τη σφαίρα, τότε και $\Phi|_{S^{n-1}}$ είναι ισομετρία. (θέλει απόδειξη).

Δηλαδή αν γ γεωδαισιακή, τότε $\phi\circ\gamma$ είναι γεωδαισιακή. $\quad \gamma(0)=\phi\circ\gamma(0)=B$ για $i\neq 1,n$.

$\gamma'(0)=\frac{\partial}{\partial x_1}$ $\quad (\phi\circ\gamma)'(0)=\frac{\partial}{\partial x_1}$ από πίνακα για $D\Phi$.

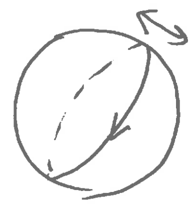
Άλλα $\phi \circ \gamma \neq \gamma$ και γ, $\phi \circ \gamma$ γεωδαισιακές που περνούν από το B πο $t=0$ με την ίδια ταχύτητα $\rightarrow\leftarrow$ μοναδικότητα γ.

$\therefore \gamma(t) = (x_1(t), 0, \dots, 0, x_n(t))$

Γεωδαισιακές για συμμετρικούς χώρους $\equiv$ σταθερές καμπύλες των ισομετριών τους.

- Αν όχι έχουμε την ίδια αντίφαση.

• Στο S^2: γεωδαισιακές οι μεγάλοι κύκλοι.



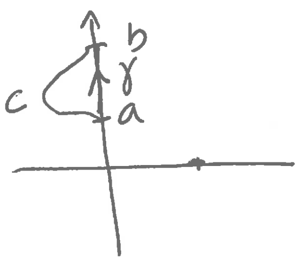
ισομετρία: ανάκλαση ως προς το επίπεδο που ορίζουν.

• $\mathbb{H}^2$ $\left((\mathbb{R}^2)^+, g\right)$ $\quad g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$

$\gamma(t) = (0,t)$ ν.δ.ο. είναι γεωδ. για $t \in [a,b]$ $a>0$: $\gamma' = \frac{\partial}{\partial y}$

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{1}\, dt = \int_a^b \frac{1}{t}\, dt = \ln b - \ln a.$$

Έστω $c(t) = (x(t), y(t))$ καμπύλη με $c(a) = \gamma(a) = (0,a)$ και $c(b) = \gamma(b) = (0,b)$. $\quad c: [a,b] \to \mathbb{H}^2$



$$c'(t) = x'(t)\frac{\partial}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\therefore \ell(c) = \int_a^b |c'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \cdot \frac{1}{y(t)}\, dt \qquad y>0$$

$$\geq \int_a^b |y'(t)| \cdot \frac{1}{y(t)}\, dt \geq \int_a^b y'(t) \cdot \frac{1}{y(t)}\, dt = \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{1}{y}\, dy = \ell(\gamma).$$