Γεωμετρία Riemann.

Εισαγωγή.

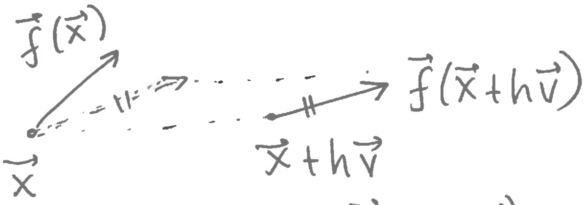
$\mathbb{R}^n$: ευκλείδιος χώρος

$\vec{f}(x_1,\dots,x_n)$: διανυσματική συνάρτηση (π.χ. διεύθυνση της ταχύτητας του ανέμου σε κάθε σημείο).

Ξέρουμε πως να παραγωγίζουμε διανυσματικές συναρτήσεις:

$$D_{\vec{v}}\vec{f}\Big|_{\vec{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}(\vec{x}+h\vec{v})-\vec{f}(\vec{x})}{h}$$

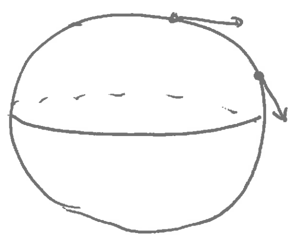
η διαφορά στον αριθμητή έχει νόημα, έστω κι αν τα διανύσματα βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία!



Το διάνυσμα $\vec{f}(\vec{x}+h\vec{v})$ στο $\vec{x}+h\vec{v}$ "ταυτίζεται" με ένα παράλληλο διάνυσμα στο $\vec{x}$ για να πάρουμε τη διαφορά.

Ξέρουμε ποια κίνηση είναι π.χ. ισοταχής - αυτή χωρίς επιτάχυνση.

Γενίκευση: του χώρου π.χ. επιφάνεια μιας σφαίρας, ενός τόρου.



Πώς μπορεί να οριστεί η αφαίρεση έτσι ώστε να "σεβόμαστε τη γεωμετρία" του χώρου;

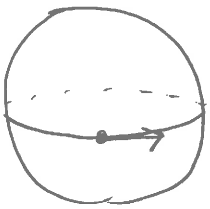
Με τρόπο δηλαδή που να αντικατοπτρίζει την εμπειρία των δισδιάστατων κατοίκων μιας σφαίρας;

• Τι είναι ένα διάνυσμα $\vec{f}(\vec{x})$;

• Πώς ορίζουμε $D_{\vec{v}}\vec{f}$ τ.ω. $D_{\vec{v}}\vec{f}=\vec{0}$ αν οι κάτοικοι δεν "αισθάνονται/αντιλαμβάνονται" επιτάχυνση;

• Πότε π.χ. η ταχύτητα του ανέμου είναι σταθερή;

S^2



κίνηση στον ισημερινό με σταθερή νόρμα ταχύτητας ⇒ οι κάτοικοι δεν αισθάνονται επιτάχυνση / η επιτάχυνση είναι κάθετη στη σφαίρα

- έχουμε γεωδαισιακή.

• Στο $\mathbb{R}^3$ αλλάζει διεύθυνση και φορά αλλά οι κάτοικοι δεν το αντιλαμβάνονται.

• Ποια είναι η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία;

• Πώς βρίσκουμε την καμπύλη μικρότερου μήκους (γεωδαισιακή).

Στη διαφορική γεωμετρία βλέπαμε την σφαίρα S^2 ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$

• Εδώ ορίζουμε πιο γενικά σύνολα, ζητούμε απλά να υπάρχουν συντεταγμένες σε κάθε σημείο.

<u>Τοπολογικός Χώρος</u>: (Ορισμός) Είναι ένα σύνολο X στο οποίο ορίζουμε τα ανοικτά (κλειστά = συμπληρώματα ανοικτών) υποσύνολα, έτσι ώστε η ένωση (ακόμη και μη αριθμήσιμων) ανοικτών συνόλων να είναι ανοικτό σύνολο και η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων να είναι ανοικτό.
Τα X και ϕ είναι ανοικτά, και είναι και κλειστά
(V κλειστό ανν $X \setminus V$ ανοικτό).

π.χ. ① $\mathbb{R}$: (a) Αν ορίσουμε U ανοικτό ανν U είναι τυχαία ένωση υποσυνόλων της μορφής $\{a < x < b\} \equiv (a,b)$ τότε $\mathbb{R}$ είναι τοπολογικός χώρος.
$\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ ονομάζονται <u>βάση</u>.

(b) Αν ορίσουμε U ανοικτό ανν U είναι τυχαία ένωση υποσυνόλων της μορφής $\{a \le x \le b\} \equiv [a,b]$, τότε είναι τοπολογικός χώρος με αυτή την τοπολογία και $A = \bigcup_n [\frac{1}{n}, 1] = (0,1]$ είναι ανοικτό. Επίσης

$$A^c = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0] \cup (1, \infty) = \Big\{\bigcup_n [-n, 0]\Big\} \cup \Big\{\bigcup_n [1+\tfrac{1}{n}, n+1]\Big\}$$

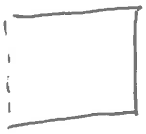
είναι ανοικτό, άρα A κλειστό — όλα τα υποσύνολα είναι και κλειστά και ανοικτά!

(c) $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ U ανοικτό αν είναι τυχαία ένωση υποσυνόλων της μορφής (a,b) ή $(-\infty, c) \cup (b, \infty) \cup \{\infty\}$.
είναι τοπολογικός χώρος.
Μπορούμε ν.δ.ο. είναι ομοιομορφικός με S^1 όπου ανοικτά: (θ_1, θ_2) σε πολικές

② $\mathbb{R}^n$ (a) ανοικτά: $(a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times \dots \times (a_n,b_n)$ η βάση.
(b) ανοικτά $\{\vec{x} \mid \|\vec{x}\| < r\} = B_r(\vec{x})$ η βάση με μπάλες.

S^2: Ορισμός: $V \subset S^2$ ανοικτό ανν υπάρχει $U \subset \mathbb{R}^3$ ανοικτό τω. $V = U \cap S^2$ - τοπολογία επαγόμενη από τον $\mathbb{R}^3$.

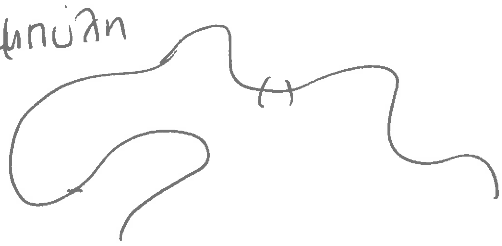
Ανοικτό "=" το σύνορο δεν περιέχεται στο σύνολο.

 μη ανοικτό.

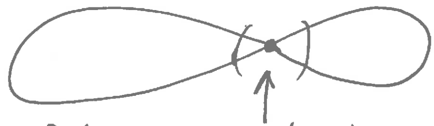
Για υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ π.χ. S^2, S^n, χώρος. η τοπολογία θα είναι η επαγόμενη από το $\mathbb{R}^n$.

<u>Πολλαπλότητα:</u> Τοπολογικός χώρος που τοπικά "μοιάζει" με ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ για κάποιο n.

π.χ. καμπύλη



όχι όμως αν τέμνεται



εδώ τοπικά μοιάζει με X
όχι με $\longleftrightarrow$.

"Μοιάζει" ≡ υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση η οποία να είναι συνεχής και με συνεχή αντίστροφο από ένα το σύνολο στο άλλο. (ομοιομορφισμός).

- Η απόδειξη δεν είναι εύκολη γενικά.

• Η αιτία για αυτό τον ορισμό είναι για να μπορούμε να περιγράψουμε το κάθε σημείο απλά, δίνοντας του συντεταγμένες.

• Ένα ανοικτό σύνολο γύρω από ένα σημείο ονομάζεται και <u>γειτονιά</u>

<u>Ορισμός</u> <u>Μια πολλαπλότητα διάστασης</u> n, M είναι ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος είναι

(i) Hausdorff διαχωρίσιμος (για κάθε ζεύγος σημείων x, y με $x \neq y$ υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα A, B με $x \in A$, $y \in B$ και $A \cap B = \emptyset$ (disjoint neighborhoods)

(ii) Αριθμήσιμος $2^{ου}$ βαθμού (2^{nd} countable) : η τοπολογία του έχει αριθμήσιμη βάση.,
(π.χ. στο $\mathbb{R}$ $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$ $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \neq 0$).

και στον οποίο
(iii) Κάθε σημείο έχει μια γειτονιά που είναι ομοιομορφική με ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.
Δηλαδή $\forall x \in M$, υπάρχει $A \subset M$ ανοικτό, $U_A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και Φ_A απεικόνιση, $\Phi_A : U_A \to A$ τ.ω. Φ_A 1-1, επί συνεχής με συνεχή αντίστροφο.

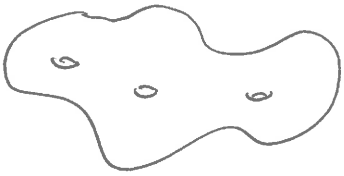
Τα ζεύγη (U_A, X_A) ονομάζονται χάρτες συντεταγμένων.

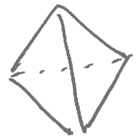
Η συλλογή $\{(U_A, X_A)\}$ ονομάζεται άτλαντας.

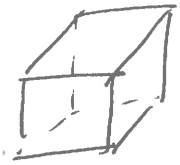
- Παρατήρηση $\bigcup_A (X_A(U_A)) = M.$

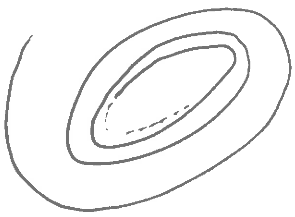
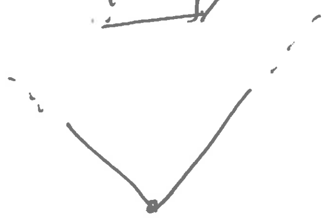
<u>Παραδείγματα</u>: <u>ΝΑΙ</u>:

S^2 ,  τόρος

,

επιφάνεια τετραέδρου 

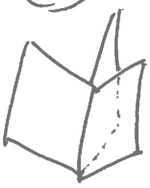
επιφάνεια κύβου 

, 

Ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

<u>ΟΧΙ</u> πολλά.

 κάποιος δίσκος - έχει σύνορο.

 τρίπτυχο

- Χρειαζόμαστε να μιλούμε διαφορικές εξισώσεις, να παραγωγίζουμε σε πιο γενικούς χώρους
- δηλαδή μια διαφορική δομή.

<u>Ορισμός:</u> Μια πολλαπλότητα διάστασης n, M, ονομάζεται <u>διαφορίσιμη πολλαπλότητα</u> αν έχει ένα άτλαντα

$A = \{(U_\alpha, X_\alpha)\}_\alpha$ τ.ω. (i) Για κάθε α, β με $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$

τότε τα σύνολα $X_\alpha^{-1}(W)$, $X_\beta^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτά στο $\mathbb{R}^n$ και η απεικόνιση

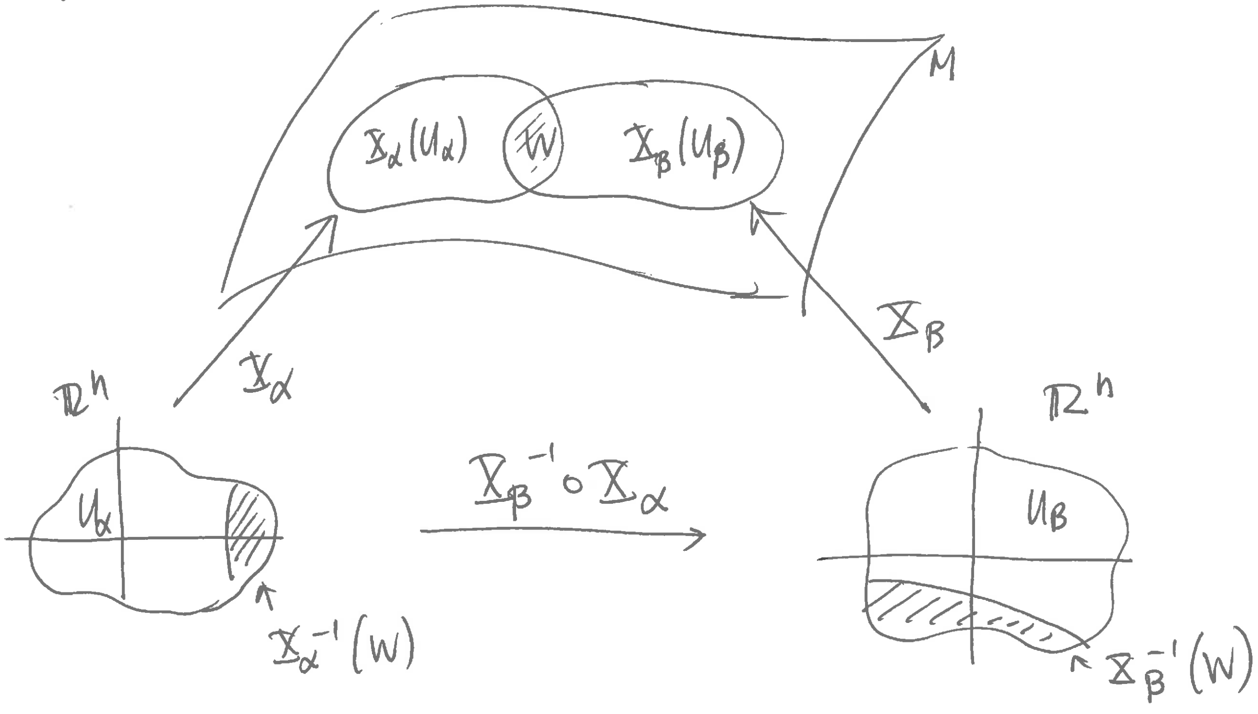
$$X_\beta^{-1} \circ X_\alpha : X_\alpha^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow X_\beta^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n$$

είναι διαφορίσιμη (C^∞, λεία).

(δηλαδή $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ είναι διαφορομορφισμός, αφού το ίδιο πρέπει να ισχύει για $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$ και X_α, X_β ομοιομορφισμοί).

Όταν ισχύει αυτή η ιδιότητα οι απεικονίσεις X_α, X_β ονομάζονται <u>συμβατές</u> (compatible).

Επίσης (ii) ο άτλαντας A είναι μέγιστος, δηλαδή δεν περιέχεται σε μεγαλύτερο λείο άτλαντα.



Αν οι απεικονίσεις $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ είναι C^r, τότε η πολλαπλότητα ονομάζεται C^r διαφορίσιμη.

Αν $p \in X_\alpha(U_\alpha)$ τότε ο χάρτης (U_α, X_α) ονομάζεται και παραμέτρηση ή χάρτης συντεταγμένων για την M στο p.

$X_\alpha(U_\alpha)$: ονομάζεται γειτονιά (συντεταγμένων) του p.

Ο άτλαντας $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, X_\alpha)\}_\alpha$ ονομάζεται και διαφορική δομή.

* Για έλεγχο διαφορισιμότητας πολλαπλότητας ξεκινούμε με σύνολο $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}_\alpha$ όπου $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά και $X_\alpha : U_\alpha \to M$ απεικονίσεις και αρκεί ν.δ.ο.

- $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = M$, καλύπτουν
- X_α είναι 1-1
- X_α συμβατοί.

Με αυτές τις συνθήκες μπορούμε να πάρουμε ότι η M είναι διαφ. πολλαπλότητα αν δώσουμε στην M την τοπολογία που είναι η επαγόμενη από τις X_α. Με αυτό τον τρόπο οι X_α είναι ομοιομορφισμοί. (εξ ορισμού)

<u>Τοπολογία</u> της M: Οι ανοικτές γειτονιές της M δίνονται από τυχαίες ενώσεις συνόλων της μορφής $X_\alpha(V)$ με $V \subset U_\alpha$ ανοικτό.
Άρα $A \subset M$ ανοικτό αν $X_\alpha^{-1}(A \cap X_\alpha(U_\alpha))$ ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ $\forall \alpha$.

- Ο μεγιστικός άτλαντας θα είναι ο μέγιστος $\mathcal{A}$ που περιέχει τις $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}_\alpha$ πιο πάνω.

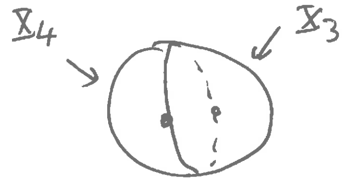
<u>Παραδείγματα</u> (0) $\mathbb{R}^n$, C^∞ πολλαπλότητα.

A $\quad S^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\}.$

1. Πρώτη διαφορική δομή.

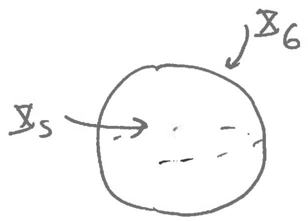
$X_1(u,v) = \{(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}) \mid \sqrt{u^2+v^2} < 1\}$

$X_2(u,v) \qquad -\sqrt{\quad}$



$X_3(u,v) = \{(u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v) \mid \sqrt{u^2+v^2} < 1\}$

$X_4(u,v) = \qquad -\sqrt{\quad}$.



$X_5(u,v) = \{(\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v) \mid \sqrt{u^2+v^2} < 1\}$

$X_6(u,v) \qquad -\sqrt{\quad}$

$X_i : A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 < 1\} \to S^2$

A ανοικτό $\quad A \subset \mathbb{R}^2 \quad \to$ η M είναι διάστασης 2.

Κάθε X_i είναι 1-1 (επί εξ ορισμού)

π.χ. $X_1(u_1,v_1) = X_1(u_2,v_2) \Leftrightarrow (u_1, v_1, \sqrt{1-u_1^2-v_1^2}) = (u_2, v_2, \sqrt{1-u_2^2-v_2^2})$

$\Rightarrow u_1 = u_2$ και $v_1 = v_2$

Κάθε X_i είναι συνεχής.

X_i^{-1} ορίζεται

π.χ. $X_1^{-1}(x,y,z) = (x,y)$ για $(x,y,z) \in X_1(A)$ όπου $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

άρα και η X_1^{-1} είναι συνεχής. συνάρτηση. - περιορισμός συνεχούς συνάρτησης

Παρόμοια όλοι οι X_i είναι ομοιομορφισμοί.

- η τοπολογία της S^2 είναι αυτή από το $\mathbb{R}^3$. - ταυτίζεται με την επαγόμενη από τις X_i.

Καλύπτουν την S^2

ν.δ.ο. είναι συμβατοί οι χάρτες.

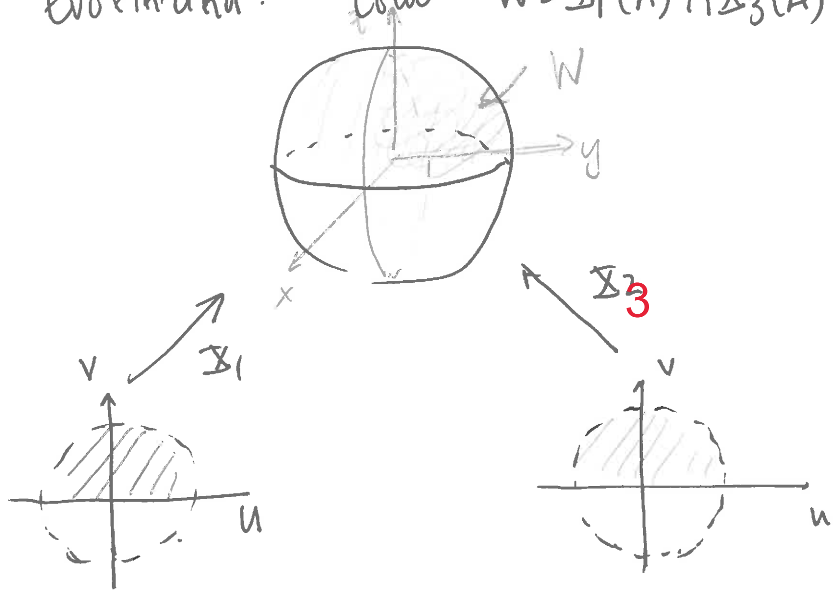
$\mathbb{X}_1(A) \cap \mathbb{X}_2(A) = \emptyset$ $\qquad (U_i = A \ \forall i)$.

Πρέπει να ελέγξουμε

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{X}_1(A) \cap \mathbb{X}_{3,4,5,6}(A) \\ &\mathbb{X}_2(A) \cap \mathbb{X}_{3,4,5,6}(A) \\ &\mathbb{X}_3(A) \cap \mathbb{X}_{5,6}(A) \\ &\mathbb{X}_4(A) \cap \mathbb{X}_{5,6}(A) \end{aligned}\right\}$$

σε 12 τομές.
2 απεικονίσεις σε κάθε μία.
$\mathbb{X}_i^{-1} \circ \mathbb{X}_j$ & $\mathbb{X}_j^{-1} \circ \mathbb{X}_i$

Ενδεικτικά: Έστω $W = \mathbb{X}_1(A) \cap \mathbb{X}_3(A) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1, \ y>0, \ z>0\}$



$\mathbb{X}_1^{-1}(W) = \{(u,v) \in A \mid v>0\}$ ανοικτό

$\mathbb{X}_3^{-1}(W) = \{(u,v) \in A \mid v>0\}$ ανοικτό.

$\mathbb{X}_1^{-1}(x,y,z) = (x,y) \qquad \mathbb{X}_3^{-1}(x,y,z) = (x,z)$

$$\mathbb{X}_3^{-1} \circ \mathbb{X}_1(u,v) = \mathbb{X}_3^{-1}\left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right) = \left(u, \sqrt{1-u^2-v^2}\right) = \left(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)\right)$$

είναι 1-1 και επί - μπορεί να ελεγχθεί πρακτικά.
αλλά και αφού $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_3$ αντιστρέψιμοι, 1-1 & επί, φτάνει να δοθούν τα ανοιχτά πεδία ορισμού και τιμών.

Υπολογιστικά:

$\Phi(u_1,v_1)=\Phi(u_2,v_2) \Rightarrow u_1=u_2$

και $\sqrt{1-u_1^2-v_1^2}=\sqrt{1-u_2^2-v_2^2} \Rightarrow v_1^2=v_2^2$

Αφού $v_1,v_2>0 \Rightarrow v_1=v_2$ $\therefore$ 1-1

Επί: Έστω $(w,z)\in A$ με $z>0$.

ν.δ.ο. υπάρχει $(u,v)\in \mathfrak{X}_1^{-1}(W)$ με $\Phi(u,v)=(w,z)$.

$\Phi(u,v)=(\Phi_1(u,v),\Phi_2(u,v))=(u,\sqrt{1-u^2-v^2})$

Έστω $u=w$

Τοτε $\sqrt{1-u^2-v^2}=z \Leftrightarrow v^2=1-u^2-z^2 \Leftrightarrow v=\sqrt{1-u^2-z^2}>0$.

Διαφορισιμη: $\frac{\partial\Phi_1}{\partial u}=1$ $\frac{\partial\Phi_1}{\partial v}=0$

$\frac{\partial\Phi_2}{\partial u}=-\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$, $\frac{\partial\Phi_2}{\partial v}=-\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$

είναι C^∞ αφου ο παρονομαστής δε μηδενίζεται

Παρατήρηση: $|D\Phi|=$ Ιακωβιανή ορίζουσα της $\Phi=-\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\neq 0$.

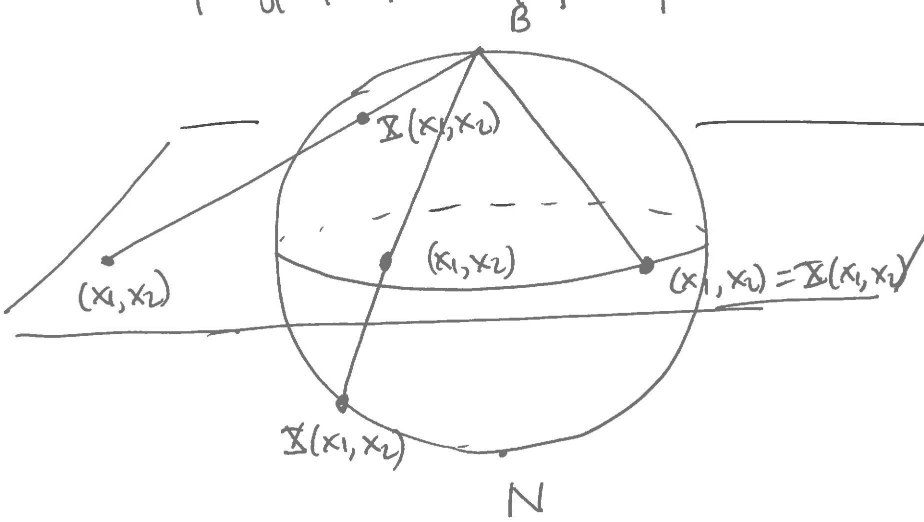
είναι τοπικός διαφορομορφισμος

-προσοχη το Θεώρημα Αντιστρόφου συναρτήσεως δεν αρκεί για να δείξουμε ότι είναι διαφορομορφισμός στο π.ο

Παρόμοια $\mathfrak{X}_3^{-1}\circ\mathfrak{X}_1$ ~~είναι~~ C^∞, το ίδιο για τις υπόλοιπη.

2. 2^{o} μοντέλο - Διαφορική δομή.

Στερεογραφική Προβολή.



$S^2=\{x^2+y^2+z^2=1\}\subset\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2=\{(x,y,0)\subset\mathbb{R}^3\}$

$$X(x_1,x_2)=\Bigg(\underbrace{\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}}_{a},\ \underbrace{\frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}}_{b},\ \underbrace{\frac{-1+x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}}_{c}\Bigg)$$

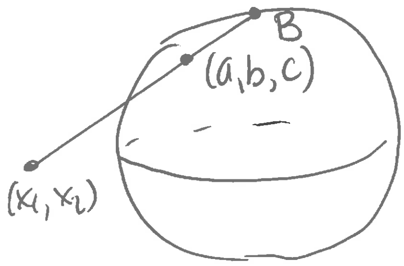
$X(0,0)=(0,0,-1)=N$

Παρατήρηση: $a^2+b^2+c^2=1$ άρα $X:\mathbb{R}^2\to S^2$

όταν $x_1^2+x_2^2\to\infty$, τότε $X(x_1,x_2)\to(0,0,1)=B$.

ν.δ.ο. $X(\mathbb{R}^2)=S^2\setminus B$ $\quad B=(0,0,1)$

Με $(a,b,c)\in S^2\setminus B$ ν.δ.ο. $\exists(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ τ.ω. $X(x_1,x_2)=(a,b,c)$.



Έστω $l(t)=(0,0,1)+t\big[(a,b,c)-(0,0,1)\big]$ η ευθεία από το B στο (a,b,c).

$l(t)\in\{(x,y,0)\}$ ανν. $l_3(t)=0$

$l_3(t)=0\iff 1+t(c-1)=0\iff t=\dfrac{-1}{c-1}$

$\therefore (x_1,x_2)=\dfrac{1}{1-c}(a,b)=\left(\dfrac{a}{1-c},\dfrac{b}{1-c}\right)$

$\therefore X^{-1}(a,b,c)=\left(\dfrac{a}{1-c},\dfrac{b}{1-c}\right)$ με $a^2+b^2+c^2=1$ και $c\neq 1$

δηλαδή $\forall(a,b,c)\in S^2\setminus B$.

Έλεγχος: $\quad X \circ X^{-1} = Id|_{S^2 \setminus B}$

$$X^{-1} \circ X = Id|_{\mathbb{R}^2} \qquad \text{(άσκηση).}$$

X & X^{-1} είναι συνεχείς συναρτήσεις, με κατάλληλο περιορισμό του πεδίου, και με ορισμό ανοικτών στο S^2 τον επαγόμενο από το $\mathbb{R}^3$. ή ισοδύναμα τον επαγόμενο από τη X.

$\therefore$ X ομοιομορφισμός από το $\mathbb{R}^2$ στο $S^2 \setminus B$.

Παρόμοια: $$Y(y_1,y_2) = \left(\frac{2y_1}{1+y_1^2+y_2^2}, \frac{2y_2}{1+y_1^2+y_2^2}, \frac{1-y_1^2-y_2^2}{1+y_1^2+y_2^2} \right)$$
είναι ομοιομορφισμός από το $\mathbb{R}^2$ στο $S^2 \setminus N$.

Εργασία: • Εύρεση Y^{-1} - για να δούμε ότι είναι 1-1, επί.
- • Συνεχή Y, Y^{-1} (ομοιομορφισμοί).
- • $X(\mathbb{R}^2) \cup Y(\mathbb{R}^2) = S^2$
- • $Y^{-1} \circ X$, $X^{-1} \circ Y$ στο $W = S^2 \setminus \{B,N\}$ είναι διαφορομορφισμοί.

- Δίνουν διαφορική δομή για την S^2 με μόνο 2 χάρτες.

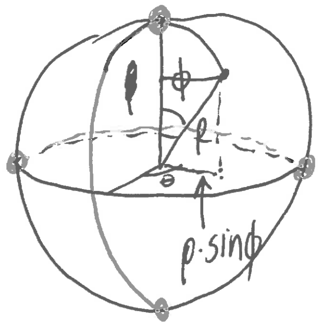
Χρειάζονται 2 χάρτες για να καλυφθεί η σφαίρα
- ο μικρότερος δυνατός αριθμός.

$\nexists$ διαφορομορφισμός από το $\mathbb{R}^2$ στην S^2.

Άσκηση: Να αποδειχθεί ότι S^1 είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα με διαφορική δομή που να δίνεται από 2 στερεογραφικές προβολές.

3ο Μοντέλο:

Σφαιρικές Συντεταγμένες.

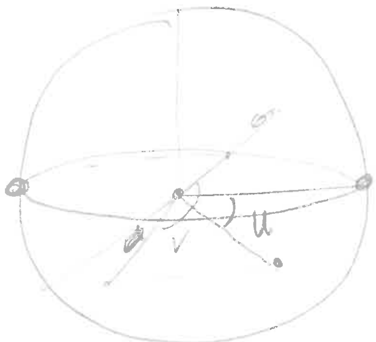


$x = \rho \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta$ $\qquad \rho = R = 1$ fixed

$y = \rho \sin\phi \cdot \sin\theta.$ $\qquad \phi \in (0, \pi)$

$z = \rho \cos\phi$ $\qquad \theta \in (0, 2\pi)$

όλα τα σημεία εκτός από ημικύκλιο με $y = 0$. $x > 0$.



u = γωνία με y θετικό

v = γωνία στο επίπεδο xz με τον αρνητικό άξονα x.

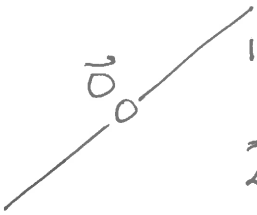
Καλύπτεται με 2 γειτονιές η σφαίρα

Παράδειγμα (B) Πραγματικός Προβολικός Χώρος
(real projective space).

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \left(\equiv \mathbb{R}\mathbb{P}(n)\right) := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\} \;\middle|\; \vec{x} \underset{\uparrow}{\sim} \lambda \vec{x} \text{ για } \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \right\}$$

σχέση ισοδυναμίας.

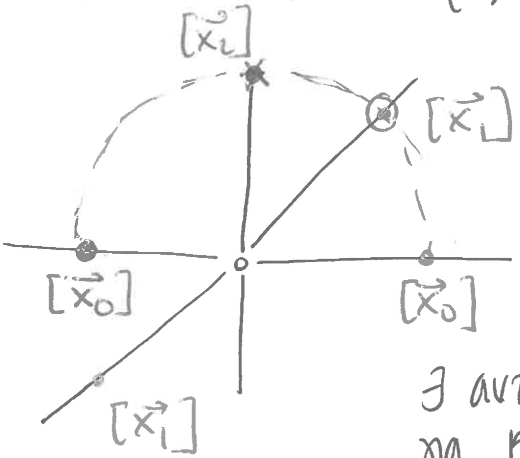
$$\equiv \left\{ \vec{x} \in S^n \;\middle|\; \vec{x} \sim -\vec{x} \right\}$$ αντίποδα σημεία είναι ισοδύναμα.



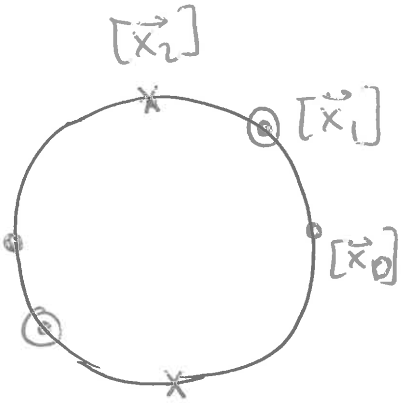
ισοδύναμα σημεία, δηλαδή το ίδιο σημείο.

Στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με το $\vec{x}$ ανήκουν όλα τα σημεία της ευθείας που περνά από το $\vec{x}$ και $\vec{0}$ (το $\vec{0}$ δεν ανήκει στο χώρο).

$\mathbb{P}^1$



$\equiv$

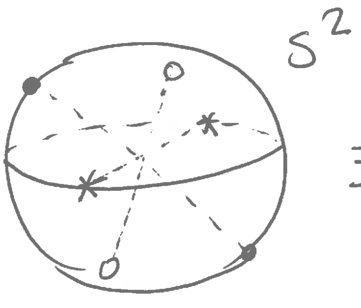


$\exists$ αντιπρόσωπος για κάθε σημείο στον κύκλο ακτίνας 1

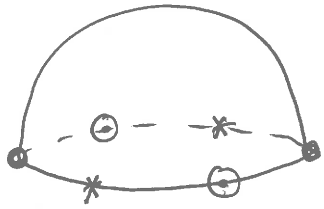
$\equiv$

– φαίνεται ομοιομορφικό με S^1 1-διάστατη πολ/τα!

$\mathbb{P}^2$:

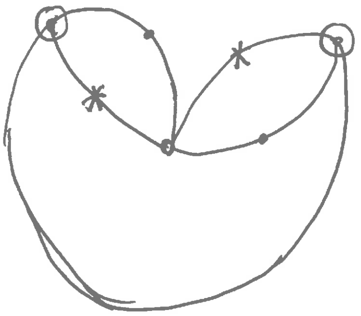


$\equiv$

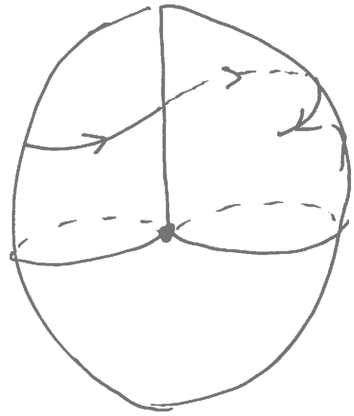


$\equiv$

≡



≡



$\mathbb{P}^2$: μια μη-προσανατολισμένη επιφάνεια (non-orientable) όπως η μπουκάλα του Klein.
- τοπικά 2-διάστατος χώρος!

Αναλυτική, η περιγραφή αυτού του χώρου με συντεταγμένες γίνεται σχετικά εύκολα.

Ορίζουμε: $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ σημείο του $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

για κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$.

Τότε $[x_1, \dots, x_{n+1}] = [\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}]$ $\forall \lambda \neq 0$.

(κλάση ισοδύναμων σημείων)

Όταν $x_1 \neq 0 \Rightarrow [x_1, \dots, x_{n+1}] = [1, \underbrace{\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_n}}_{\text{οποιαδήποτε τιμή στο } \mathbb{R}^n}]$

Άρα η απεικόνιση

$$\Phi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$
$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto [1, y_1, y_2, \dots, y_n]$$

είναι ένας πιθανόν χάρτης συντεταγμένων από το $\mathbb{R}^n$ στο χωρίο $V_1 = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \mid x_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n\mathbb{R}$.

(ν.δ.ο. χάρτης).

· Για να δείξουμε ότι είναι χάρτης, πρέπει να είναι 1-1, επί και ομοιομορφισμός.

επί - ξεκάθαρο

1-1 : $[1, z_1, \dots, z_n] = [1, y_1, \dots, y_n] \Leftrightarrow \dots,$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0$ τ.ω. $(1, z_1, \dots, z_n) = (\lambda, \lambda y_1, \dots, \lambda y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\left.\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & 1 = \lambda \\ & z_1 = \lambda y_1 \\ & \vdots \\ \text{και}\ & z_n = \lambda y_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_i = z_i \quad \forall i$$

$X_1(\vec{y}) = X_1(\vec{z}) \Rightarrow \vec{y} = \vec{z}$, άρα X_1 1-1.

Ομοιομορφισμός: Δίνουμε στο $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ την τοπολογία την επαγόμενη από X_1 άρα θα είναι εξ ορισμού.

Γενικά: $X_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto [y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{θέση } i}}{1}, y_{i+1}, \dots, y_n]$$

<u>Θεώρημα:</u> $\{(\mathbb{R}^n, X_i)\}_{i=1}^{n}$ αποτελούν διαφορική δομή για το $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

<u>Απόδειξη:</u> ∘ Καλύπτουν, ναι - παίρνουμε όλα τα σημεία του $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

∘ 1-1 ✓ - παρόμοια για όλα

∘ (ομοιομορφισμοί εξ ορισμού τοπολογίας του $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$)

∘ Συμβατοί:

$$X_i(\mathbb{R}^n) \cap X_j(\mathbb{R}^n) = V_i \cap V_j = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \mid x_i, x_j \neq 0\} = W$$

Τότε: $X_i^{-1}(W) = X_i^{-1}\left(\{[x_1,\dots,x_{n+1}] \mid x_i, x_j \neq 0\}\right) =$

$$= X_i^{-1}\left(\left\{\left[\frac{x_1}{x_i},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{θέση } i}}{1},\dots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\right] \;\middle|\; x_i, x_j \neq 0\right\}\right) =$$

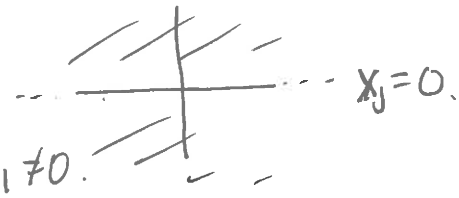
$$= \left\{\left(\frac{x_1}{x_i},\dots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\dots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\right) \;\middle|\; x_k \in \mathbb{R},\ x_i \neq 0,\ x_j \neq 0\right\}$$

$$= \left\{(y_1,\dots,y_n) \;\middle|\; \overset{i>j}{y_j}\ (\text{ή } \overset{i<j}{y_{j-1}}) \neq 0\right\}$$

ανάλογα με αν $i<j$ ή $j<i$

Άρα $X_i^{-1}(W)$: είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με είτε τη συντεταγμένη $x_j \neq 0$ ή $x_{j-1} \neq 0$.

Άρα είναι ανοικτό.



Υποθέτουμε $j>i$ και $(y_1,\dots,y_n) \in X_i^{-1}(W)$ άρα $y_{j-1} \neq 0$.

$$X_j^{-1} \circ X_i(y_1,\dots,y_n) = X_j^{-1}\left([y_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{1},y_i,\dots,y_n]\right)$$

στη θέση j το $y_{j-1} \neq 0$

$$= \left(\frac{y_1}{y_{j-1}},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\frac{1}{y_{j-1}}},\frac{y_i}{y_{j-1}},\dots,\frac{y_{j-2}}{y_{j-1}},\frac{y_j}{y_{j-1}},\dots,\frac{y_n}{y_{j-1}}\right)$$

η οποία είναι διαφορίσιμη ως προς κάθε y_k αφού $y_{j-1} \neq 0$.

- παρόμοια για $j<i$.

∴ Συμβατοί

∴ Διαφ. πολ/τα.