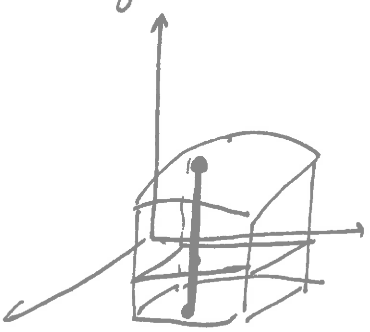
Η μέθοδος (I) είναι γνωστή σαν σάρωση με ράβδους.
Εντοπίζω το D στο χώρο.

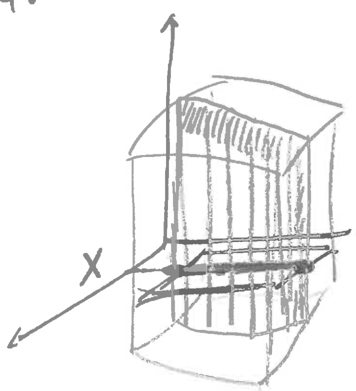


π.χ. D_C στο επίπεδο xy.

Βάζω μια ράβδο - παράλληλη με στο σημείο (x,y). και βρίσκω τα όρια του z ως προς (x,y)

$$\gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)$$

Διατηρώ x σταθερό (ανάλογα το y) και σαρώνω παράλληλα με άξονα y, δημιουργείται μια "φέτα"



Βρίσκω τα όρια του y ως προς x

$$\phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$$

Στο τέλος βλέπω τις οριακές μεγ/κές τιμές του x.

$a \le x \le b$. (σταθερές).

Χτίζω το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f \, dz \, dy \, dx.$$

γίνεται 2η, τα όρια μπορεί να είναι μόνο ως x αφού η 3η ολοκλ. είναι ως προς x.

γίνεται πρώτα δεν υπάρχουν όρια ως προς z.

(II) 2η Μέθοδος: Μέθοδος των τομών.

(i) $a \le x \le b$ η ελάχιστη και μέγιστη τιμή του x στο T.

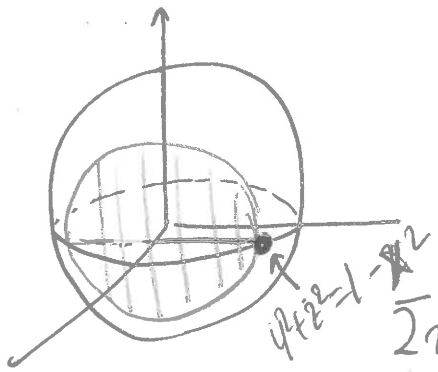
Τέμνω με κάθε επίπεδο $x =$ σταθερό το στερεό και στο επίπεδο x εντοπίζω την τομή D_x

D_x: είναι 2-διάστατο χωρίο όπου τα (y,z) μεταβάλλονται και τα όριά τους μπορεί να εξαρτώνται από το x.

$$D_x = \{(y,z) \mid \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \text{ και } \gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)\}$$

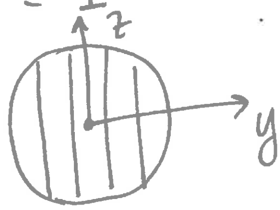
$$\text{ή } = \{(y,z) \mid \phi_1(x) \le z \le \phi_2(z) \text{ και } \gamma_1(x,z) \le y \le \gamma_2(x,z)\}$$

Τότε $$\iiint_T f = \int_a^b \left[\iint_{D_x} f \, dy\,dz\right] \cdot dx \quad \text{< ανάλογα με το } D_x$$



$T = \{x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

$-1 \le x \le 1$



έχω δίσκο D_x ακτίνας $\sqrt{1-x^2} = R$ $\quad D_x = \{(y,z) \mid y^2+z^2 \le 1-x^2\}$

$$D_x = \{(y,z) \mid \underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{-R} \le y \le \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{R} \text{ και } -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

$$= \{(y,z) \mid -\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2} \text{ και } -\sqrt{1-x^2-z^2} \le y \le \sqrt{1-x^2-z^2}\}$$

$$\therefore \iiint_T f = \int_{-1}^{1} \left[\iint_{D_x} f \, dy\,dz \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx \quad \uparrow \text{όπως (I)(i)(α)}$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} dy\,dz\,dx \quad \uparrow \text{όπως (I)(ii)(α)}$$

Παρόμοια (ii) αν αρχικά τέμνω με $y =$ σταθ

$c \leq y \leq d$: $\displaystyle \iiint_T f = \int_c^d \left[\iint_{D_y} dx\,dz \right] dy$

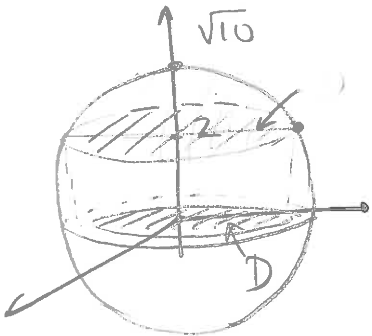
(iii) αν αρχικά τέμνω με $z =$ σταθερό

$c \leq z \leq d$: $\displaystyle \iiint_T f = \int_c^d \left[\iint_{D_z} dx\,dy \right] dz$

6 διαφορετικές σειρές ολοκλήρωσης.
Και οι 2 μέθοδοι τις καλύπτουν.
Ανάλογα με την περίπτωση / ή τι μας είναι πιο προφανές χρησιμοποιούμε. την κατάλληλη

Παραδείγματα:

① Βρείτε τον όγκο του χωρίου $T = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 10 \text{ και } z \ge 2\}$



Τομή στο $z=2$: με $x^2+y^2+z^2=10$

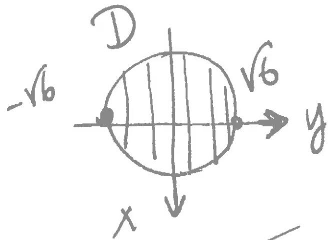
$\to x^2+y^2 = 10-4 \Rightarrow x^2+y^2=6.$

$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 6\}$

και σε κάθε $(x,y) \in D$ $\quad 2 \le z \le \sqrt{10-x^2-y^2}$

↑ στο ημισφαίριο.

$$D = \{(x,y) \mid -\sqrt{6} \le x \le \sqrt{6},\ -\sqrt{6-x^2} \le y \le \sqrt{6-x^2}\}$$



$$\mathrm{Vol}_3(T) = \iiint_T 1 = \iint_D \left[\int_2^{\sqrt{10-x^2-y^2}} dz\right] dy\,dx$$

$$= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \int_{-\sqrt{6-x^2}}^{\sqrt{6-x^2}} \int_{2}^{\sqrt{10-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \int_{-\sqrt{6-x^2}}^{\sqrt{6-x^2}} [\underbrace{\sqrt{10-x^2-y^2}}_{a} - 2]\,dy\,dx$$

$$= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left[\frac{10-x^2}{2} \arcsin\frac{y}{\sqrt{10-x^2}} + \frac{y}{2}\sqrt{10-x^2-y^2} - 2y\right]_{y=-\sqrt{6-x^2}}^{y=\sqrt{6-x^2}} =$$

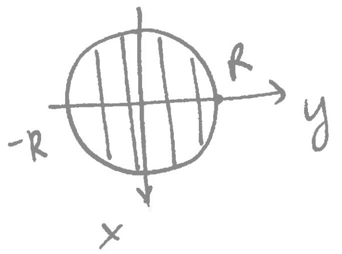
$$= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left[2 \cdot \frac{10-x^2}{2} \arcsin\frac{\sqrt{6-x^2}}{\sqrt{10-x^2}} + 2\sqrt{6-x^2}\cdot\sqrt{4} - 4\sqrt{6-x^2}\right] dx = ??$$

• Μια άλλη σειρά ολοκλήρωσης ίσως πιο εύκολη υπολογιστικά...

Τομή με $z =$ σταθερό.

$2 \le z \le \sqrt{10}$.

D_z: δίσκος στο z με $x^2+y^2 = \underbrace{10-z^2}_{R^2}$



περιγράφεται από

$$D_z = \{(x,y) \mid -\sqrt{10-z^2} \le x \le \sqrt{10-z^2},\ -\sqrt{10-z^2-x^2} \le y \le \sqrt{10-z^2-x^2}\}$$

$$Vol_3(D) = \int_2^{\sqrt{10}} \int_{-\sqrt{10-z^2}}^{\sqrt{10-z^2}} \int_{-\sqrt{10-z^2-x^2}}^{\sqrt{10-z^2-x^2}} dy\, dx\, dz =$$

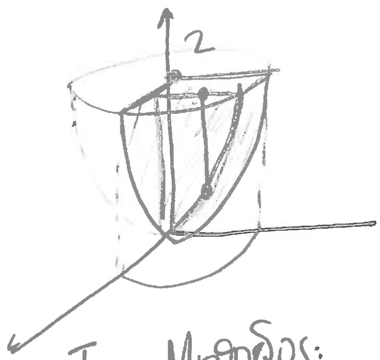
$$= \int_2^{\sqrt{10}} \int_{-\sqrt{10-z^2}}^{\sqrt{10-z^2}} 2\sqrt{\underbrace{10-z^2}_{a^2}-x^2}\, dx\, dz =$$

$$= \int_2^{\sqrt{10}} \left[2 \cdot \frac{10-z^2}{2} \cdot \arcsin\frac{x}{\sqrt{10-z^2}} + \underbrace{2 \cdot \frac{x}{2}\sqrt{10-z^2-x^2}}_{0} \right]_{x=-\sqrt{10-z^2}}^{\sqrt{10-z^2}} dz$$

$$= \int_2^{\sqrt{10}} (10-z^2) \cdot \pi \, dz = \pi \left[10z - \frac{1}{3} \cdot z^3 \right]_2^{\sqrt{10}} = \pi \cdot \left[10\sqrt{10} - \frac{1}{3} \cdot 10\sqrt{10} - 20 + \frac{8}{3} \right]$$

③ W το χωρίο που περιγράφεται από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=2$ την επιφάνεια $z=x^2+y^2$ και που βρίσκεται στο τεταρτημόριο με $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Υπολογίστε $\iiint_W x$

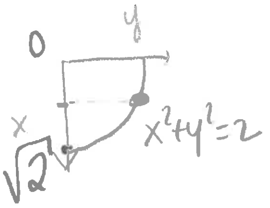


Ισοδύναμα W στην τομή των χωρίων, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\leq 2$, $z\geq x^2+y^2$

I Μέθοδος: $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leq 2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$

(Στο $z=2$: $x^2+y^2=2$).

Σε κάθε (x,y): $x^2+y^2\leq z\leq 2$



Στο x σταθερό: $0\leq y\leq\sqrt{2-x^2}$

$0\leq x\leq\sqrt{2}$

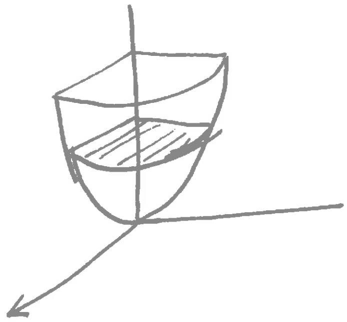
$$\iiint_W x=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2} x\ dz\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}[2-x^2-y^2]x\ dy\,dx=\int_0^{\sqrt{2}}\left[2xy-x^3y-\frac{x}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{2-x^2}}dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\underbrace{2x\sqrt{2-x^2}-x^3\sqrt{2-x^2}}_{x\sqrt{\ }(2-x^2)}-\frac{1}{3}x(2-x^2)\cdot\sqrt{2-x^2}\ dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2}{3}x\cdot(2-x^2)^{3/2}\cdot dx \underset{u=x^2}{=} -\frac{1}{3}\cdot(2-x^2)^{5/2}\cdot\frac{2}{5}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{2}{15}\cdot 2^{5/2}$$

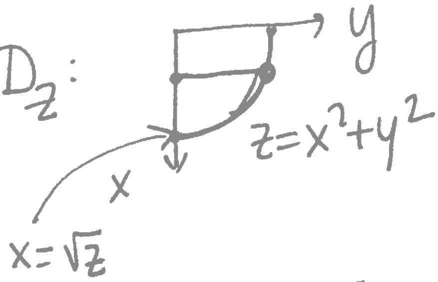
Μέθοδος ΙΙ:



Τομή με $z=$ σταθερό.

$$0 \le z \le 2$$

D_z:



$$0 \le x \le \sqrt{z}$$

$$0 \le y \le \sqrt{z-x^2}$$

$$\iiint_W x = \int_0^2 \left[\iint_{D_z} x \, dxdy \right] dz =$$

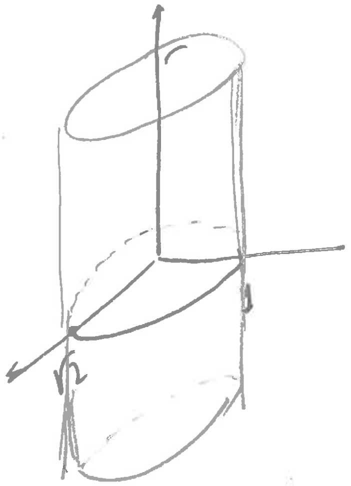
$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z-x^2}} x \, dy\, dx\, dz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} x \cdot \sqrt{z-x^2} \, dx\, dz$$

$$= \int_0^2 -\frac{1}{2} \cdot (z-x^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{z}} dz = \int_0^2 \frac{1}{3}(z)^{3/2} \cdot dz = \frac{1}{3} \cdot z^{5/2} \cdot \frac{2}{5} \Big|_0^2$$

(3) W: Το στερεό που περικλείεται από

$x^2+2y^2=2$ $\quad z=0$ και $\quad x+y+2z=2$.

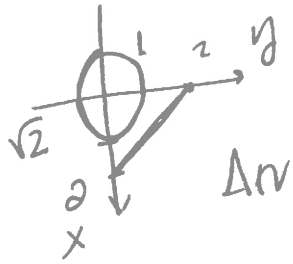
Υπολογίστε $Vol_3(W)$.



$x^2+2y^2=2$: ελλειπτικός κύλινδρος

$x+y+2z=2$: επίπεδο.

Στο $z=0$: $\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x^2+2y^2=2 \end{array}\right\}$ $(2-y)^2+2y^2=2$ $\nexists$ λύσης.



Δεν τέμνονται.

Μέθοδος Ι: $D=\{(x,y) \mid x^2+2y^2\le 2\} = \{(x,y) \mid -1\le y\le 1,\ -\sqrt{2-2y^2}\le x\le \sqrt{2-2y^2}\}$

με $\quad 0\le z\le \frac{1}{2}[2-x-y]$

$$Vol_3(W)=\iiint_W 1=\iint_D\left[\int_0^{\frac12[2-x-y]}dz\right]dx\,dy=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{2-2y^2}}^{\sqrt{2-2y^2}}\int_0^{\frac12[2-x-y]}dz\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{2-2y^2}}^{\sqrt{2-2y^2}}\frac12[2-x-y]\,dx\,dy$$

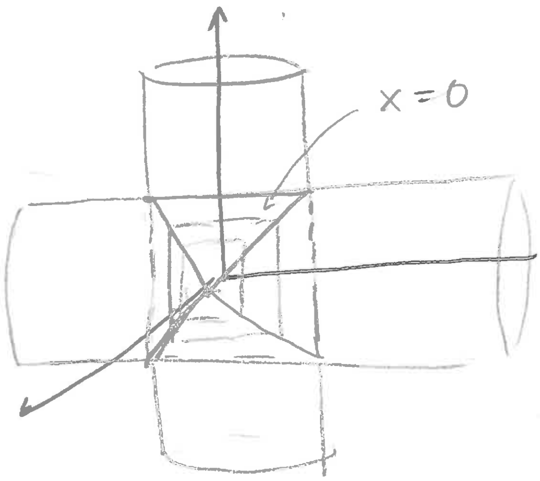
$$=\int_{-1}^{1}\left[x-\underbrace{\frac14 x^2}_{0}-\frac12 xy\right]_{x=-\sqrt{2-2y^2}}^{\sqrt{2-2y^2}}dy=\int_{-1}^{1}\left[2\sqrt{2-2y^2}-y\sqrt{2-2y^2}\right]dy$$

$$=\left[2\sqrt2\cdot\left[\frac12\arcsin y+\frac{y}{2}\cdot\underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{0}\right]-\frac12\sqrt2\,\underbrace{(1-y^2)^{3/2}}_{0}\cdot\frac23\right]_{-1}^{1}=\sqrt2\,\pi$$

(4) S το στερεό ανάμεσα στους κυλίνδρους.

$x^2+y^2\le 1$ και $x^2+z^2\le 1$.

Υπολογίστε $\int_S x$ και $Vol_3(S)$.

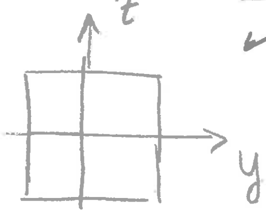


$x^2+y^2\le 1 \Rightarrow y^2\le 1-x^2$

$x^2+z^2\le 1 \Rightarrow z^2\le 1-x^2$

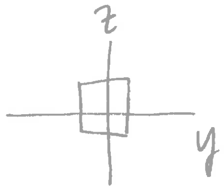
Για $x=0$ $\quad y^2\le 1 \Leftrightarrow |y|\le 1$

$z^2\le 1 \Leftrightarrow |z|\le 1$



Για $x=a$ $\quad |y|\le\sqrt{1-a^2}$

$|z|\le\sqrt{1-a^2}$



Πιο εύκολο αν γίνει τομή με επίπεδο $x=$σταθερό.

Σε κάθε x $\quad D_x$: ορθογώνιο $\{(y,z) \mid |y|\le\sqrt{1-x^2},\ |z|\le\sqrt{1-x^2}\}$

και $x\in[-1,1]$

$$\therefore Vol_3(S)=\int_{-1}^{1}\left[\iint_{D_x} 1\,dy\,dz\right]dx=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz\,dy\,dx$$

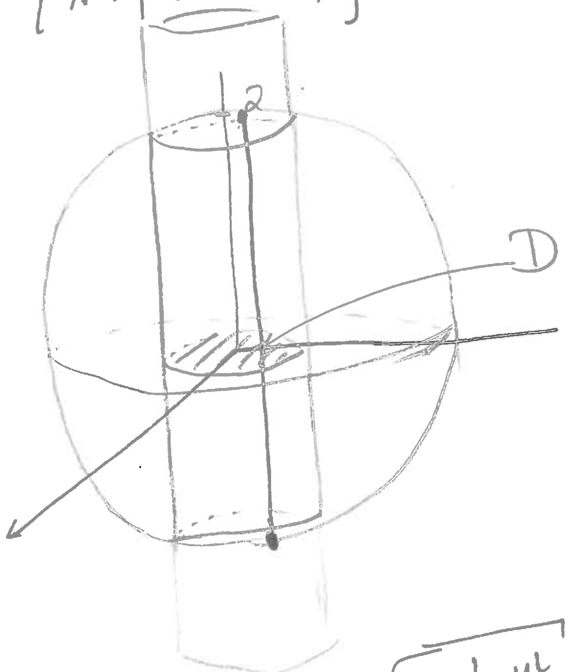
$$=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2}\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}4(1-x^2)\,dx=\left[4x-\frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{16}{3}.$$

$$\iiint_S x=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dz\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}x\cdot 4(1-x^2)\,dx=0$$

περιττή σε συμμετρικό χώρο.

(5) T: Χωρίο μέσα στη σφαίρα $\{x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ και τον κύλινδρο $\{x^2+y^2=1\}$



$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

Σε κάθε $(x,y) \in D$

z από το ένα ημισφαίριο στο άλλο

$$-\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$Vol_3(T) = \iint_D \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$$

- Υπολογιστικά όχι απλό.

<u>Προσοχή:</u> $x^2+y^2 \leq 1$ είναι μέσα στη βάση της σφαίρας όπου $x^2+y^2 \leq 4$.

Αν είχαμε κύλινδρο $x^2+y^2 \leq 6$ και μπάλα $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ τότε η τομή θα ήταν όλη η μπάλα.

• <u>Παρατήρηση:</u> Όλα τα χωρία μας T είναι τέτοια ώστε το σύνορό τους να έχει όγκο 0. - Γραφήματα συνεχών και ολοκληρώνουμε συνεχείς συναρτήσεις σε αυτά.

Γι' αυτό ορίζονται.

Αρχή Cavalieri: - Παρόμοια με μέθοδο τομών (II)

Έστω S στερεό ανάμεσα στα επίπεδα $x=a$, $x=b$ με $A(x)$ το εμβαδό της τομής του S όταν το τέμνουμε με το επίπεδο $x=c$, και A συνεχή συνάρτηση.
Τότε ο όγκος του S ισούται με

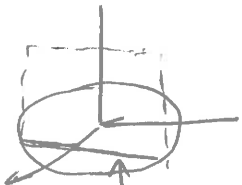
$$Vol_3(S) = \int_a^b A(x)\,dx.$$

τομή στο $x=c$ ~~.......~~ τετράγωνο σταθερού εμβαδού.

$$Vol_3(S) \approx \sum_i A(x_i)\Delta x$$ για διαμέριση P του $[a,b]$.

Παράδειγμα: S στερεό με βάση το δίσκο $\{x^2+y^2\leq 1\}$ και κάθετες τομές σε κάθε x σταθερό
(i) τετράγωνο με πλευρά ... πάνω στο δίσκο
(ii) ισόπλευρο τρίγωνο -''- -''-
Να βρεθεί ο όγκος του.

(i)

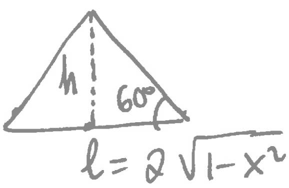


$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\,dx \qquad A(x) = \left[2(1-x^2)^{1/2}\right]^2 = 4(1-x^2)$$

μήκος πλευράς $= 2\sqrt{1-x^2}$ στο x

$$\therefore V = \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)\,dx \; \ldots$$

(ii)



$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}2\sqrt{1-x^2}$$

$$A(x) = \frac{1}{2}\cdot l\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{3}\,\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}(1-x^2)$$

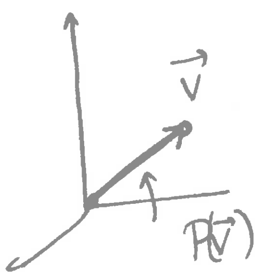
$$\therefore V = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}(1-x^2)\,dx$$

• Παρόμοια οι όγκοι στερεών περιστροφής.

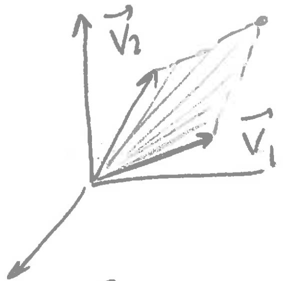
Όγκοι και ορίζουσες:

Ορισμός: Για $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\in\mathbb{R}^n$ το k-παραλληλόγραμμο που παράγουν τα διανύσματα αυτά είναι το σύνολο
$P(v_1,v_2,\dots,v_k)=\{t_1v_1+t_2v_2+\dots+t_kv_k \mid t_i\in[0,1]\}$.

π.χ. $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ $P(\vec{v})=\{t\vec{v}\mid t\in[0,1]\}$ ευθύγραμμο τμήμα

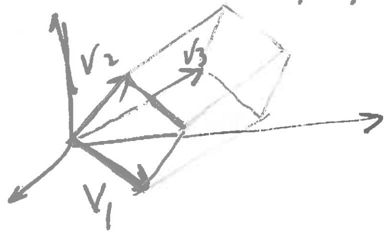


$\vec{v}_1,\vec{v}_2\in\mathbb{R}^3$ $P(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\{t_1\vec{v}_1+t_2\vec{v}_2\mid t_i\in[0,1]\}$.



παραλληλόγραμμο αν v_1,v_2 Γ.Α.
ευθύγραμμο τμήμα αν v_1,v_2 Γ.Ε.

$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\in\mathbb{R}^3$ $P(v_1,v_2,v_3)$: παραλληλεπίπεδο όταν τα $\vec{v}_i$ Γ.Α.



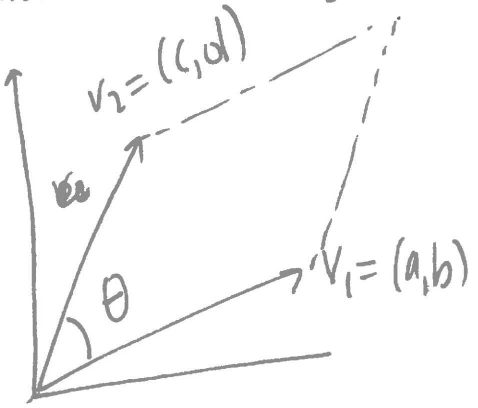
• Η σειρά των $v_1,v_2,v_3,\dots,v_k$ δεν έχει σημασία.

Πρόταση 1: Για $v_1,v_2,\dots,v_n\in\mathbb{R}^n$ $Vol_n(P(v_1,\dots,v_n))=\left|\det[v_1\dots v_n]\right|$
όπου $[v_1\dots v_n]$ ο $n\times n$ πίνακας με στήλες τα $v_1\dots v_n$

<u>Απόδειξη:</u> Από αναλυτική γεωμετρία μέχρι το $\mathbb{R}^3$ για τον κλασσικό όγκο.

Hubbard: απόδειξη με ορισμό ολοκληρώματος

$n=2$



$$Vol_2(P(v_1,v_2)) =$$

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sin\theta$$

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sqrt{1 - \frac{(v_1 \cdot v_2)^2}{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2}} =$$

$$= \sqrt{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - (v_1 \cdot v_2)^2} =$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2} = \sqrt{(ad-bc)^2}$$

$$= \left| \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right|$$

<u>Παρατήρηση:</u> $\det[v_1, \ldots, v_n] = 0$ ανν $\{v_1, \ldots, v_n\}$ γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή σχηματίζουν παραλληλεπίπεδο διάστασης μικρότερης από n - άρα έχουν n-όγκο μηδενικό.

<u>π.χ.</u> $v_1 = \hat{i}$ $\quad v_2 = \hat{j}$ $\quad v_3 = \hat{i}+\hat{j} \in \mathbb{R}^3$.

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$