② Βαal:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{2x}{(x+y)^3} - \frac{\cancel{x+y}}{(x+y)^{\cancel{3}2}}\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[2x\,(x+y)^{-2}\left(-\tfrac{1}{2}\right) \Big|_{y=0}^{y=1} + (x+y)^{-1} \Big|_{y=0}^{y=1} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{-x}{(x+1)^2} + \cancel{\frac{x}{x^2}} + \frac{1}{x+1} - \cancel{\frac{1}{x}} \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\, dx$$

$$= -(1+x)^{-1} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\cancel{x+y}}{(x+y)^{\cancel{3}2}} - \frac{2y}{(x+y)^3}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[-(x+y)^{-1} - 2y\,(x+y)^{-2}\left(-\tfrac{1}{2}\right) \right]_{x=0}^{x=1} dy =$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{1+y} + \cancel{\frac{1}{y}} + \frac{y}{(1+y)^2} - \cancel{\frac{y}{y^2}} \right] dy$$

$$= \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2}\, dy = (1+y)^{-1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$\int_0^1 \int_0^1 f\, dy\, dx \neq \int_0^1 \int_0^1 f\, dx\, dy$ ο λόγος είναι ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο Π.

• Η f δεν είναι φραγμένη στο Π. $\int_\Pi f$ Δ.Ο. παρόλο που είναι ασυνεχής μόνο στο $(0,0)$.

• Το θεώρημα Fubini μας βοηθά να γράψουμε $\int_{\Pi} f$ σε πολλαπλό ολοκλήρωμα για f ολοκληρώσιμη

π.χ. $$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

$$\int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,g]} f = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right] dy\right] dx$$

$\Leftrightarrow$ ή με όποια άλλη σειρά θέλουμε.

• Μας επιτρέπει να αλλάζουμε επίσης τη σειρά ολοκλήρωσης - μπορεί το ένα να είναι πιο εύκολο από το άλλο.

③ Good: πολύ δουλειά.

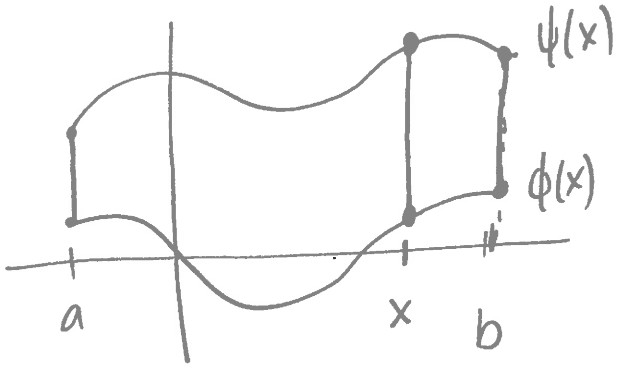
__Θεώρημα 25:__ Έστω $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις, με $\phi(x) \leq \psi(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

$$D = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Αν η f είναι συνεχής στο D τότε

$$\int_D f = \int_a^b \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx.$$

Απόδειξη: ∂D έχει 2-μέτρο 0 αφού είναι πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων



$$\int_D f = \int_\Pi f \cdot 1_D \qquad \Pi = [a,d]\times[c,d]$$

$F = f\cdot 1_D$ έχει $A_F \subset \partial D$ ... με 2-μέτρο 0 ...

Επίσης
$$F_x(\ ,y) = \begin{cases} f(x,y) & \phi(x) \le y \le \psi(x) \\ 0 & c \le y < \phi(x) \ , \ \psi(x) < y < d. \end{cases}$$

F_x: είναι ολοκληρώσιμη ως προς y για κάθε x, αφού είναι ασυνεχής μόνο σε 2 σημεία το πολύ.

$\therefore$ $F_x(y)$ είναι ολοκλ. στο $[c,d]$ $\forall x$.

$$\therefore \int_D f = \int_\Pi f\cdot 1_D = \int_\Pi F = \int_a^b \left[\int_c^d F(x,y)\,dy\right]dx$$ από Fubini - Πόρισμα 24

Όμως $$\int_c^d F(x,y)\,dy = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$ - αφού στα υπόλοιπα σημεία $f=0$.

$$\therefore \int_D f = \int_a^b \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx.$$

$\square$

Συμβολισμός: για $A \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένο:

$$\int_A f \equiv \iint_A f \equiv \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot 1_A \equiv \iint_{\mathbb{R}^2} f \cdot 1_A$$

④ Έστω $f(x,y) = \begin{cases} \sin(x+y) & (x,y) \in [0,1] \times [0,\frac{1}{2}] = A \\ \frac{2x}{y} & (x,y) \in [0,1] \times (\frac{1}{2}, 1] = B \end{cases}$

Εξηγήστε γιατί $\int_{[0,1]\times[0,1]} f$ ορίζεται και υπολογίστε το.

$$f(x,y) = \sin(x+y) \cdot 1_A + \frac{2x}{y} \cdot 1_B$$

Η f είναι συνεχής στο $A \setminus \partial A$ και στο $B \setminus \partial B$.

με $A_f \subset \partial A \cup \partial B$. (παρατ. του $\frac{2x}{y} \neq 0$ στο $\overline{B}$).

A, B: είναι φραγμένα ορθογώνια με $\partial A \cup \partial B$ να είναι πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}^2$.

άρα $\partial A \cup \partial B$ έχει μηδενικό 2-όγκο (και 2-μέτρο).

$\therefore f$ ολοκλ. στο $[0,1]\times[0,1]$, και $f \cdot 1_A$, $f \cdot 1_B$ ολοκληρώσιμη για τον ίδιο λόγο.

$$\therefore \int_{[0,1]\times[0,1]} f = \int_{[0,1]\times[0,1]} f \cdot 1_A + \int_{[0,1]\times[0,1]} f \cdot 1_B$$

Από Πόρισμα 24 στο Θ. Fubini

$$\int_{\Pi} f \cdot 1_A = \int_A \sin(x+y) = \int_0^1 \int_0^{1/2} \sin(x+y)\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 -\cos(x+y) \Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 \left[\cos(x+\tfrac{1}{2}) + \cos x \right] dx =$$

$$= -\sin(x+\tfrac{1}{2}) + \sin x \Big|_0^1 = -\sin\tfrac{3}{2} + \sin 1 + \sin\tfrac{1}{2}$$

Παράδειγμα:

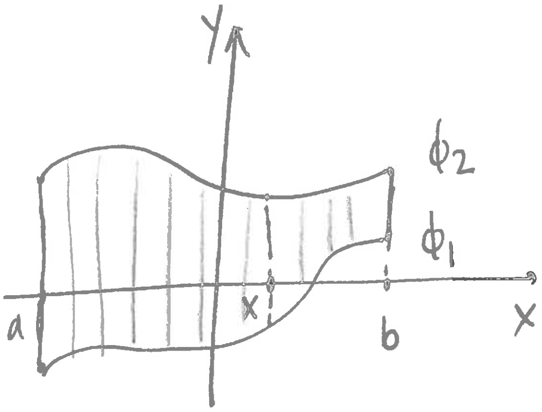
$$\int_{\Pi} f \mathbb{1}_B = \int_B \frac{2x}{y} = \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2x}{y}\, dy\, dx = \int_0^1 2x \ln y \Big|_{\frac{1}{2}=y}^{1=y} dx$$

$$= \int_0^1 -2x \ln \frac{1}{2}\, dx = \ln 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \ln 2.$$

$$\therefore \int_{[0,1]\times[0,1]} f = -\sin \frac{3}{2} + \sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \ln 2.$$

Μορφές χωρίων στο $\mathbb{R}^2$:

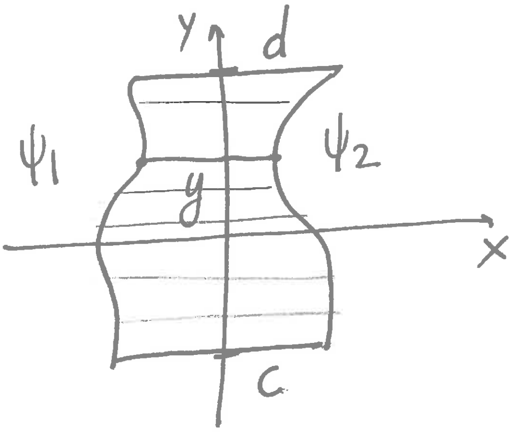
$T = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$ με $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$



Θ.25:

$$\iint_T f = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\, dy\right] dx$$

$S = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$ με $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$



Θ.25 (παρόμοια)

$$\iint_S f = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx\right] dy$$

- f συνεχής στο T/S
- Για κάποια χωρία δουλεύουν και οι 2 περιγραφές αλλά το ένα πολλαπλό ολοκλήρωμα μπορεί να είναι πιο απλό από το άλλο.

Παραδείγματα:

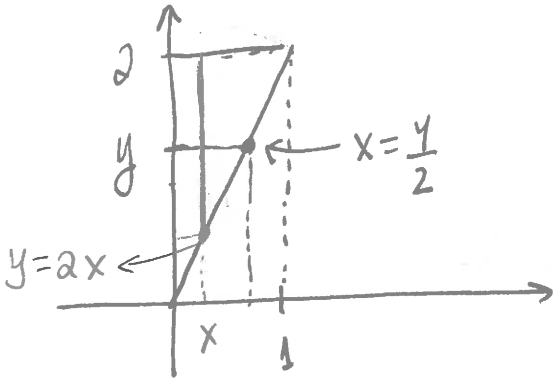
① $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le 2x\le y\le 2\}$ Υπολογίστε $Vol_2(T)$ αν ορίζεται

(α) $0\le x\le 1$ (Μέγ. κ ελάχιστη τιμή του x).

$2x\le y\le 2$ Τα όρια του y σε κάθε x

(β) $0\le y\le 2$ Μέγ. κ ελάχ. τιμή του y

$0\le 2x\le y \iff 0\le x\le \frac{y}{2}$: Τα όρια του x σε κάθε y.



$Vol_2(T)=\int_{\mathbb{R}^2} 1_T$

1_T ασυνεχής στο ∂T που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}^2$: $x=0$, $y=2$, $y=2x$.

Άρα $Vol_2(\partial T)=0$, και άρα η 1_T είναι ολοκληρώσιμη αφού T φραγμένο.

Από Θ.25./Fubini

τα όρια του y για x σταθερό

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_T = \int_0^1\left[\int_{2x}^{2} 1\cdot dy\right]dx = \int_0^1 (2-2x)\,dx = 2x-x^2\Big|_0^1 = 1$$

ή

$$=\int_0^2\left[\int_0^{y/2} 1\cdot dx\right]dy = \int_0^2 \frac{y}{2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot y^2\Big|_0^2 = 1$$

τα όρια του x για y σταθερό

~~Παρατήρηση:~~

~~$\iint_T f(x,y) \neq \iint f(x,y)\,dx\,dy$~~

Το πιο πολύπλοκο μέρος είναι να σχεδιάσουμε σωστά το χωρίο.

(2)

S: Τα $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ κάτω από τις παραβολές $y=x^2$ και $y=(x-2)^2$ και πάνω από τις ευθείες $y=-x$ και $y=x-2$.

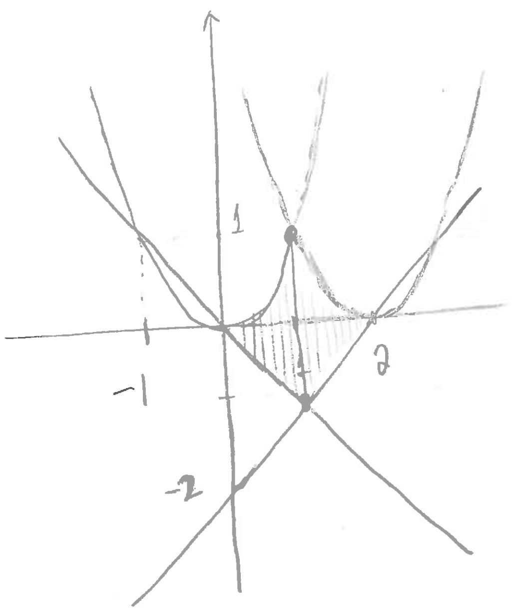
Βρίσκουμε τα σημεία τομής: $x^2=(x-2)^2 \Leftrightarrow -4x+4=0 \Leftrightarrow x=1$

$x^2=-x \Leftrightarrow x=0,-1.$

$(x-2)^2=x-2 \Leftrightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x-2=-1 \Rightarrow x=1$

$-x=x-2 \Leftrightarrow x=1$



$$S=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ -x\le y\le x^2\}$$
$$\cup\{(x,y)\mid 1\le x\le 2,\ x-2\le y\le (x-2)^2\}$$

Για f συνεχή στο S

$$\int_S f=\int_0^1\left[\int_{-x}^{x^2} f\,dy\right]dx+\int_1^2\left[\int_{x-2}^{(x-2)^2} f\,dy\right]dx$$

$S=A_1\cup A_2$ & $A_1\cap A_2$: στην ευθεία $x=1$.

όμως το $A_1\cap A_2$ έχει 2-όγκο μηδενικό (και 2-μέτρο)

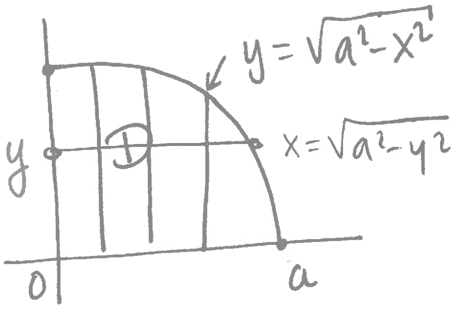
ή: $S=\{(x,y)\mid -2\le y\le 0,\ -y\le x\le y+2\}\cup\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ \sqrt{y}\le x\le -\sqrt{y}+2\}$

③ Απλοποίηση ολοκλήρωσης με αλλαγή στη σειρά dydx / dxdy.

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}\, dy\, dx$$

Χρειάζεται $y = a\sin\theta$ .... τριγ. αντικατάσταση.

$y=\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow y^2+x^2=a^2$ ημικύκλιο.



$$D: \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le \sqrt{a^2-x^2} \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} 0 \le y \le a \\ 0 \le x \le \sqrt{a^2-y^2} \end{cases}$$

Αλλάζω την περιγραφή του D. - η f παραμένει ίδια.

$$\int_D f = \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \underset{\uparrow}{\sqrt{a^2-y^2}}\, dx \right] dy$$

πιο απλή

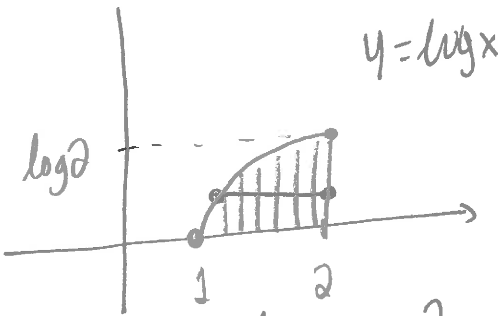
$$= \int_0^a \sqrt{a^2-y^2} \cdot x \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{a^2-y^2}} dy = \int_0^a (a^2-y^2)\, dy$$

$$= a^2 y - \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3.$$

④ $\displaystyle\int_1^2 \left[\int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,dy\right]dx$

$D: \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \log x \end{cases}$ η $\begin{cases} 0 \le y \le \log 2 \\ e^y \le x \le 2 \end{cases}$

$y = \log x \Leftrightarrow x = e^y$



$$\int_D f = \int_0^{\log 2}\left[\int_{e^y}^{2} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,dx\right]dy =$$

$$= \int_0^{\log 2} \left(\tfrac{1}{2}x^2 - x\right)\sqrt{1+e^{2y}}\Big|_{x=e^y}^{2}\,dy = \int_0^{\log 2}\left(-\tfrac{1}{2}e^{2y} + e^y\right)\sqrt{1+e^{2y}}\,dy.$$

$u = 1+e^{2y} \quad du = 2e^{2y}dy$

$v = e^y \quad dv = e^y dy$

$$= \int_1^5 -\tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{u}\,du + \int_1^2 \sqrt{1+v^2}\,dv \quad (*)$$

$v = \tan\theta \quad dv = \sec^2\theta\,d\theta$

$\int \sec^3\theta\,d\theta = \sec\theta\cdot\tan\theta - \int \sec\theta\cdot\underbrace{\tan^2\theta}_{-1+\sec^2\theta}\,d\theta$

…… $\int \sec^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\cdot\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| = \frac{1}{2}\sqrt{1+v^2}\cdot v + \frac{1}{2}\ln\left|v+\sqrt{1+v^2}\right|$

$$(*) = -\frac{1}{4}\cdot u^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_1^5 + \left[\frac{1}{2}v\cdot\sqrt{1+v^2} + \frac{1}{2}\ln\left|v+\sqrt{1+v^2}\right|\right]_1^2 = \ldots$$

⑤ Παρατήρηση: Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a,b]$

και $g(y)$ συνεχής στο $[c,d]$

και $\Pi = [a,b]\times[c,d]$, $h(x,y) = f(x)\cdot g(y)$

τότε $$\iint_{\Pi} h = \iint_{\Pi} f(x)\cdot g(y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x)\cdot g(y)\cdot d\cancel{x}y\right] dx$$

σταθερά ως προς y

$$= \int_a^b f(x)\left[\int_c^d g(y)\,dy\right] dx$$

σταθερά ως προς x $\forall x$ αν c,d σταθερές

$$= \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\cdot\left[\int_c^d g(y)\,dy\right].$$

π.χ. $$\int_a^b\int_c^d x\cdot y\,dy\,dx = \int_a^b x\,dx\cdot\int_c^d y\,dy$$

Όμως. $\iint_T xy$ για T:  δε πάει το γινόμενο!!

· Αφαιρέθηκαν υπολογίζονται οι όγκοι ~~εκ περιστροφής (Βασικά / Άσκ. 2)~~

Τριπλά ολοκληρώματα:

① Αν $B = [0,1]\times[-2,0]\times[0,\frac{1}{2}]$, υπολογίστε $\iiint\limits_B (x + xe^y + zy)$

$$\iiint\limits_B f = \int_0^1 \int_{-2}^0 \int_0^{\frac{1}{2}} (x + xe^y + zy)\, dz\, dy\, dx$$

για f συνεχή η σειρά ολοκλ. δεν έχει σημασία.

$$= \int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(xz + xe^y z + \frac{1}{2} z^2 y\right)\Big|_{z=0}^{z=\frac{1}{2}} dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_{-2}^0 \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xe^y + \frac{1}{8}y\right] dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xe^y + \frac{1}{16}\cdot y^2\right]_{y=-2}^{y=0} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x - \left[x + \frac{1}{2}xe^2 + \frac{1}{4}\right]\right] dx = \int_0^1 \left[-\frac{1}{2}(1+e^2)\cdot x + \frac{1}{4}\right] dx$$

$$= -\frac{1}{4}(1+e^2)x^2 + \frac{1}{4}x\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}(1+e^2) + \frac{1}{4}.$$

Στερεά στο $\mathbb{R}^3$: Τρισδιάστατα χωρία στο $\mathbb{R}^3$

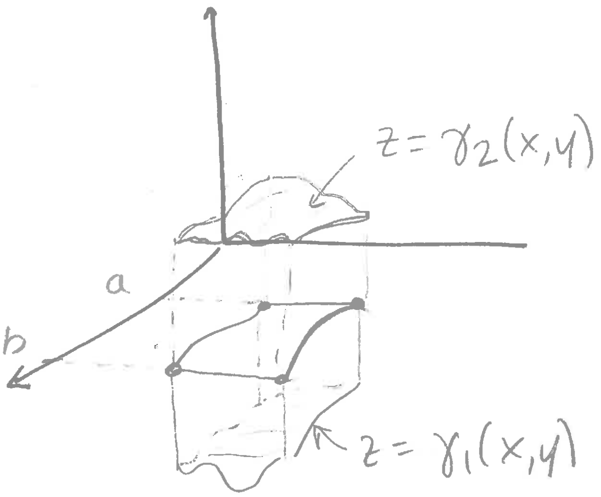
Για τον υπολογισμό $\iiint_T f$ με $T \subset \mathbb{R}^3$ φραγμένο έτσι ώστε ∂T να δίνεται από πεπερασμένο αριθμό γραφημάτων συναρτήσεων σε 2-μεταβλητές. (∂T: επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3$)

Υπάρχουν 2 γενικές μέθοδοι για το σάρωμα του T.

(I) (i) $T = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ και $\gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)\}$

γ_1 & γ_2 - δίνουν 2 επιφάνειες.

D: 2-διάστατο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, φραγμένο.



$$\int_T f = \iint_D \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f \, dz \right] \underbrace{dxdy}$$

↑ με όποια σειρά θέλουμε

$D \subset \mathbb{R}^2$: περιγράφεται όπως πριν πχ με

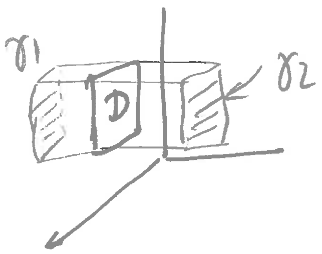
$a \le x \le b$ και $\phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$: $\displaystyle\int_a^b \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f \, dz\,dy\,dx$

ή

$c \le y \le d$ και $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$: $\displaystyle\int_c^d \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f \, dz\,dx\,dy$

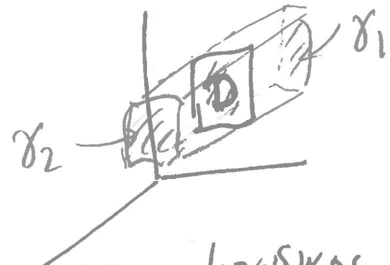
(ii) $T = \{(x,y,z) \mid (x,z) \in D \text{ και } \gamma_1(x,z) \le y \le \gamma_2(x,z)\}$

$$\iiint_T f = \iint_D \left[\int_{\gamma_1(x,z)}^{\gamma_2(x,z)} f \, dy \right] dx\,dz$$



(iii) $T = \{(x,y,z) \mid (y,z) \in D \text{ και } \gamma_1(y,z) \le x \le \gamma_2(y,z)\}$

$$\iiint_T f = \iint_D \left[\int_{\gamma_1(y,z)}^{\gamma_2(y,z)} f \, dx \right] dy\,dz$$

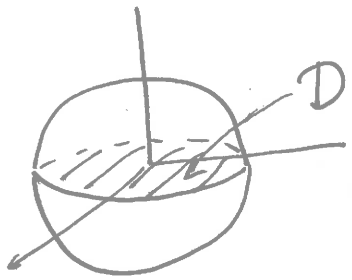


Ο τρόπος να περιγραφεί το T δεν είναι πάντα μοναδικός.

<u>Παράδειγμα</u> $T = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ μπάλα στο $\mathbb{R}^3$.

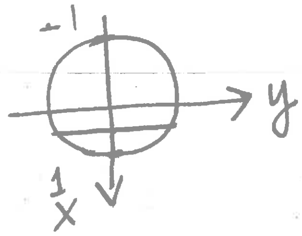
Σύνορο: $x^2+y^2+z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

(i) $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$



$T = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

D: $-1 \le x \le 1$ και $-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$



ή $-1 \le y \le 1$ και $-\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}$

$$\therefore \iiint_T f = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f \; dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f \; dz\; dx\; dy$$

Τροπος (ii) $D = \{(x,z) \mid x^2+z^2 \le 1\}$

$$\therefore -\sqrt{1-x^2-z^2} \le y \le \sqrt{1-x^2-z^2}$$

$$\therefore \iiint_T f = \iint_D \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} f \; dy\right] \underset{\uparrow \text{ 2 τρόποι}}{dx\,dz}$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} f \; dy\, dz\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} f \; dy\; dx\; dz$$

Τροπος (iii) Για $D = \{(y,z) \mid y^2+z^2 \le 1\}$

$$-\sqrt{1-y^2-z^2} \le x \le \sqrt{1-y^2-z^2}$$

<u>Υπολογισμός</u> $Vol_3(T) = \iiint_{\mathbb{T}} 1_T = \iiint_T 1 =$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} dy \cdot dx\, dz$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} 2\cdot\sqrt{1-x^2-z^2}\; dx\, dz$$

<u>Τύποι:</u> $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2-x^2}$

(αντικατ. $x = a\sin\theta$ $\rightarrow \int a^2 \cdot \cos^2\theta = \int a^2 \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \ldots$

Εδώ $a^2 = 1-z^2$

$$\therefore\ Vol_3(T) = \int_{-1}^{1} \left[2 \cdot \frac{(1-z^2)}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{2}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1-z^2-x^2} \right]_{x=-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dz$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[(1-z^2) \cdot \underbrace{[\arcsin 1 - \arcsin(-1)]}_{\pi} + 0 \right] dz =$$

$$= \pi \cdot \left(z - \frac{1}{3} z^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi \qquad \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right).$$