<u>Το Θεώρημα Stokes</u>: ΘΘΑΛ για επιφανειακά ολοκληρώματα

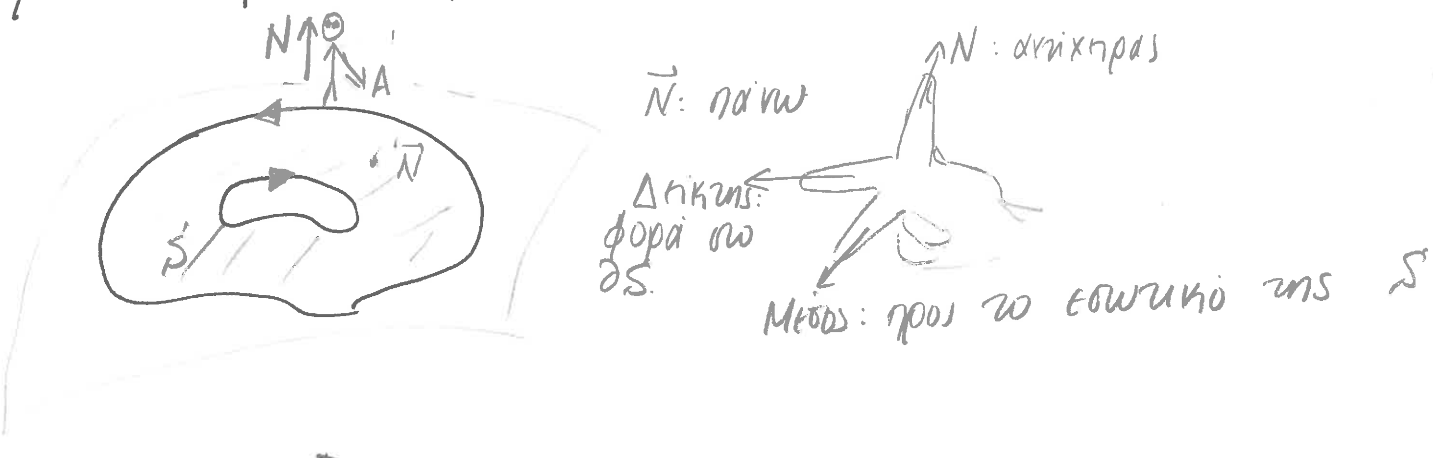
$$\int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1-μορφή}}}{dF} \quad \left(= \int_a^b F'(x)\,dx\right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{αποτίμηση στο σύνορο.}}}{F(b) - F(a)}$$

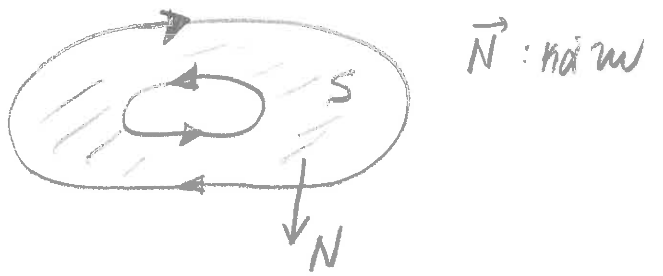
$[a,b] = \partial([a,b])$ προσανατολισμός από το a στο b.

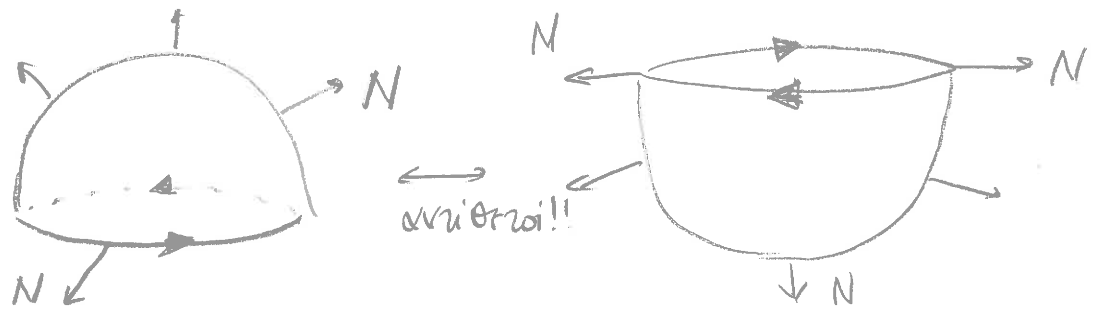
Stokes: $$\iint_S \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2-μορφή}}}{\omega} = \int_{\partial S} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1-μορφή}}}{\phi}$$ όταν $\omega = d\phi$ ακριβής.

Έστω S επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3$ με προσανατολισμό που δίνεται από μη-μηδενικό κάθετο διαν. πεδίο $\vec{N}$, και το ∂S: αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό κατά τμήματα C^1 καμπυλών.

Ο <u>επαγόμενο προσανατολισμός</u> στο ∂S από τον δεδομένο προσανατολισμό της S γίνεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπου τώρα η κατεύθυνση του κεφαλιού (αντίχειρα) είναι προς το $\vec{N}$.







<u>Θεώρημα Stokes:</u>

Έστω S μια επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3$ προσανατολισμένη και ∂S με επαγόμενο προσανατολισμό. ($S: C^1$ & $\partial S: C^1$ κατά τμήματα)

Έστω $\vec{F} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath} + R\hat{k}$ C^1 διαν. πεδίο σε ανοικτό χωρίο της S

Τότε: $$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{dS} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

• $$\nabla \times \vec{F} = \operatorname{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}$$

• Σε μορφή ολοκλήρωσης διαφορικών μορφών το Θ. Stokes δίνεται από:

$$\iint_S \left(\frac{\overset{3}{\partial R}}{\underset{2}{\partial y}} - \frac{\overset{2}{\partial Q}}{\underset{3}{\partial z}}\right) d\underset{2}{y} \wedge d\underset{3}{z} + \left(\frac{\overset{1}{\partial P}}{\underset{3}{\partial z}} - \frac{\overset{3}{\partial R}}{\underset{1}{\partial x}}\right) d\underset{3}{z} \wedge d\underset{1}{x} + \left(\frac{\overset{2}{\partial Q}}{\underset{1}{\partial x}} - \frac{\overset{1}{\partial P}}{\underset{2}{\partial y}}\right) d\underset{1}{x} \wedge d\underset{2}{y}$$

$$= \int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

$3 \to 1 \to 2 \to 3$ συν παραγ.

Αν $\phi = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

$$\omega = d\phi = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz =$$
$$= (P_x\,dx + P_y\,dy + P_z\,dz) \wedge dx + (Q_x\,dx + Q_y\,dy + Q_z\,dz) \wedge dy + (R_x\,dx + R_y\,dy + R_z\,dz) \wedge dz$$
$$= (R_y - Q_z)\,dy \wedge dz + (P_z - R_x)\,dz \wedge dx + (Q_x - P_y)\,dx \wedge dy$$

Αφού $dx \wedge dx (T_u, T_v) = 0$ & $dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$

και $dx \wedge dy (T_u, T_v) = - dy \wedge dx (T_u, T_v)$.

$$\therefore \iint_S d\phi = \int_{\partial S} \phi$$ για την 1-μορφή ϕ.

Ειδικές περιπτώσεις:

- Αν $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ $(\Leftrightarrow W_{\vec{F}} = df)$

Τότε $\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$ (υπενθύμιση / Άσκηση)

γιατί και $d(df) = d(f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz) =$

$$= (f_{xx}dx + f_{xy}dy + f_{xz}dz)\wedge dx + (f_{yx}dx + f_{yy}dy + f_{yz}dz)\wedge dy + (f_{zx}dx + f_{zy}dy + f_{zz}dz)\wedge dz = 0$$

αφού $f_{xy} = f_{yx}$ -μικτές ισούνται για ∇f $C^1 \Rightarrow f$ C^2

και $dx\wedge dx = dy\wedge dy = dz\wedge dz = 0$ ενώ $dx\wedge dy = -dy\wedge dx$ κτλ.

Άρα: $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S} = 0 = \int_{\partial S} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_{\partial S} df$

το οποίο είχαμε δει ότι ισχύει αφού ∂S είναι κλειστή καμπύλη.

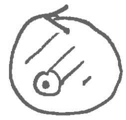
- Αν $R = 0$ ή $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y),\ Q(x,y),\ 0)$ τότε

$$\int_{\partial S} P\,dx + Q\,dz = \iint_S (Q_x - P_y)\,dx\wedge dy.$$

Αν $S \subset$ επιπέδου xy στο $\mathbb{R}^3$, παραμετρικοποιείται από

$T(x,y) = \{(x,y,0) \mid (x,y)\in S\}$ με $\vec{N} = \hat{k}$

ή ∂S προσανατολισμένο με κανόνα δεξιού χεριού

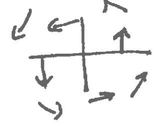


$\therefore$ Το θεώρημα Stokes είναι το θεώρημα Green:

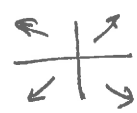
$$\int_{\partial S} P\,dx + Q\,dz = \iint_S (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

Υπενθύμιση: $\nabla\times\vec{F}$ δίνει κατά πόσο το $\vec{F}$ περιστρέφεται

π.χ. $\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,0)$ $\quad \nabla\times\vec{F} = (0,0,1)$



$\vec{F}(x,y,z) = (x,y,0)$ $\quad \nabla\times\vec{F} = (0,0,0)$



Παρατηρήματα:

① Έστω $\vec{\gamma}$ κλειστή καμπύλη στην τομή των επιφανειών:
$x^2+y^2=1$ & $x+y+z=1$, προσανατολισμένη με φορά προς τα πάνω.
Υπολογίστε: $\int_\gamma ye^z dx + xe^z dy + xye^z dz$

$$\vec{F} = \nabla(xye^z) \quad \therefore \quad \nabla\times\vec{F} = \vec{0}$$

$$\therefore \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot\vec{dS} = 0$$

② $\int_\gamma -y^3dx + x^3dy - z\,dz$ με γ όπως στο ①.

$$\vec{\gamma}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1-\cos\theta-\sin\theta) \qquad \theta\in[0,2\pi)$$

$$\int_\gamma \phi = \int_0^{2\pi} -\sin^3\theta\,(-\sin\theta)d\theta + \cos^3\theta\cdot\cos\theta\, d\theta - (1-\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta-\cos\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^4\theta + \cos^4\theta \underbrace{-\cancel{\sin\theta}}_{\int=0} \underbrace{+\cancel{\cos\theta}}_{\int=0} + \sin^2\theta - \cos^2\theta \; d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}[1-2\cancel{\cos2\theta}+\cos^2 2\theta + 1 + \cancel{\cos2\theta} + \cos^2 2\theta] + \frac{1}{2}[\cancel{1}-\cos2\theta - \cancel{1} - \cos2\theta]$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} [2 + 1 + \underbrace{\cancel{\cos4\theta}}_{\int=0} - \underbrace{\cancel{4\cos2\theta}}_{\int=0}]\, d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

β' τρόπος: $\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y^3 & x^3 & -z \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2+3y^2)$

S: $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1-r\cos\theta - r\sin\theta) \qquad r\in[0,1] \quad \theta\in[0,2\pi)$

$\vec{N} = \vec{T}_r\times\vec{T}_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & +\sin\theta & -\cos\theta-\sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & +r\sin\theta - r\cos\theta \end{vmatrix}$ $\qquad \vec{N}_3 = r > 0$: προς τα πάνω ✓
σωστός προσανατολισμός

$$\therefore \iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot\vec{dS} = \iint_S (3x^2+3y^2)\, dx\wedge dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2 \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\, dr\, d\theta =$$

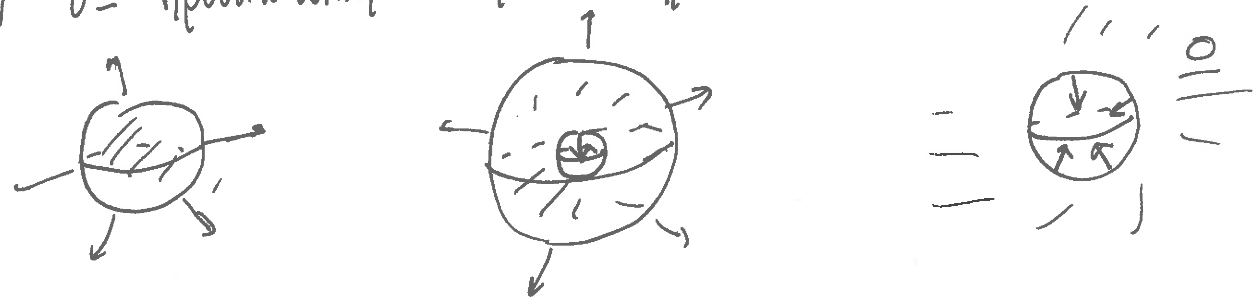
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2\cdot r\, dr\, d\theta = 2\pi\cdot\frac{3}{4}$$

Το Θεώρημα Gauss:

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοικτό φραγμένο σύνολο με $\partial\Omega$ κατά τμήματα C^1 ($\Rightarrow$ 3-μέτρου 0). Αν P, Q, R C^1 συναρτήσεις στο $\overline{\Omega}$ τότε

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$$

όταν $\partial\Omega$ προσανατολισμένο με N προς τα έξω ως προς το εσωτερικό του Ω.



- Αν θεωρήσουμε το διαν. πεδίο $\vec{F} = (P, Q, R)$, τότε το Θ. Gauss γράφεται ως:

$$\iiint_{\Omega} (\mathrm{div}\, \vec{F})\, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

- ονομάζεται και Θεώρημα απόκλισης.

- Σαν διατύπωση μορφών: αν $\omega = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$ 2-μορφή τότε

$$d\omega = (P_x dx + P_y dy + P_z dz) \wedge dy \wedge dz + (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz) \wedge dz \wedge dx$$
$$+ (R_x dx + R_y dy + R_z dz) \wedge dx \wedge dy = (P_x + Q_y + R_z)\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

$$\therefore \iiint_{\Omega} d\omega = \iint_{\partial\Omega} \omega.$$

- Ερμηνεία: $\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathrm{Vol}_3(B_r(x_0))} \cdot \iiint_{B_r(x_0)} \mathrm{div}\, \vec{F}\, dx\,dy\,dz = (\mathrm{div}\, \vec{F})(x_0)$ Θ.Μ.Τ.

$$= \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathrm{Vol}_3(B_r(x_0))} \cdot \iint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$\therefore \mathrm{div}\, F(x_0)$: η ροή του διαν. πεδίου ανά μονάδα όγκου.

Αν $\operatorname{div}\vec{F}(x_0) > 0$: το $\vec{x}_0$ είναι πηγή (source)

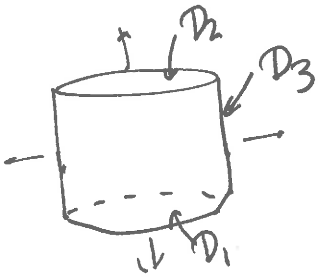
Αν $\operatorname{div}\vec{F}(x_0) < 0$: το $\vec{x}_0$ είναι αρνητική πηγή / ρουφήχτρα (sink)

• Αν $\forall$ κλειστή επιφάνεια $S=\partial\Omega$ $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{dS} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = 0$

Δηλαδή το $\vec{F}$ αντιστοιχεί σε ροή <u>ασυμπίεστου</u> ρευστού (όσο μπαίνει - τόσο βγαίνει)

<u>Παραδείγματα:</u>

① S: επιφάνεια του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ ανάμεσα στα επίπεδα $z=1$ & $z=-1$ και οι δίσκοι $x^2+y^2\leq 1$ στα $z=\pm 1$, προσανατολισμένη προς τα έξω. Υπολογίστε: $\iint_S xy^2\, dy\wedge dz + x^2y\, dz\wedge dx + y\, dx\wedge dy$.



$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2\leq 1,\ -1\leq z\leq 1\}$

$S=\partial\Omega$

$\vec{F}=(xy^2, x^2y, y)$ $\quad \operatorname{div}\vec{F} = y^2+x^2$

$\therefore \iint_S \omega = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{dS} = \iiint_\Omega (\operatorname{div}\vec{F})\, dx\,dy\,dz$ από Θ Gauss.

Σε κυλινδρικές : $= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r\, dr\, d\theta\, dz = 2\pi\cdot z\Big|_{-1}^{1}\cdot \frac{1}{4}r^4\Big|_0^1 = \pi$

2ος τρόπος - χωρίς Θ. Gauss:

D_1: $T_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, -1)$ $\quad 0\leq r\leq 1 \quad 0\leq\theta<2\pi$

$$\vec{N}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r\hat{k} \quad \uparrow$$

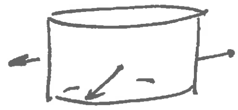
(αντίθετος προσανατολισμός)

D_2: $T_2(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1)$

$\vec{N}_2 = r\hat{k}$ $\uparrow$ σωστός προσανατολισμός.

D_3: $T_3(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$ $\theta \in [0, 2\pi)$ $z \in [-1, 1]$.

$$\vec{N}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\underset{x}{\cos\theta}, \underset{y}{\sin\theta}, 0)$$



έξω : σωστός προσαν.

$$\therefore \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = -\iint_{D_1} \vec{F}\circ T_1 \cdot \vec{N}_1 \, dr d\theta + \iint_{D_2} \vec{F}\circ T_2 \cdot \vec{N}_2 \, dr d\theta + \iint_{D_3} \vec{F}\circ T_3 \cdot \vec{N}_3 \, d\theta dz$$

$$= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \underbrace{r\sin\theta}_{y} \cdot r \, d\theta dr + \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sin\theta \cdot r \cdot d\theta dr +$$

$$+ \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta + \cos^2\theta \sin^2\theta + 0) \, d\theta dz$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\theta}{2} \, d\theta = \pi.$$

② $\vec{F} = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}(x,y,z)$.

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{(\sqrt{\ \ })^3} - \frac{x\cdot(2x)\cdot\frac{3}{2}}{(\sqrt{\ \ })^5} + \frac{1}{(\sqrt{\ \ })^3} - \frac{y(2y)\cdot\frac{3}{2}}{(\sqrt{\ \ })^5} + \frac{1}{(\sqrt{\ \ })^3} - \frac{z(2z)\frac{3}{2}}{(\sqrt{\ \ })^5} =$$

$$= \frac{3}{(\sqrt{\ \ })^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(\sqrt{\ \ })^5} = 0 \quad \text{για } (x,y,z)\neq(0,0,0).$$

Έστω $B_R(0) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$

$S_R(0) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = R^2\} = \partial B_R(0)$. προσανατολισμένη προς τα έξω.

Για $T(\theta,\phi) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)$ παραμ. της $S_R(0)$.

$\vec{N} = (-R^2\sin^2\phi\cos\theta, -R^2\sin^2\phi\sin\theta, -R^2\sin\phi\cos\phi)$: μεσα.- αντίθετως προς

$$\therefore \iint_{S_R(0)} \vec{F}\cdot\vec{dS} = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \vec{F}\circ T \cdot \vec{N}\, d\theta d\phi =$$

$$= +\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{R^3}\big[R\cdot\sin\phi\cdot\cos\theta\cdot R^2\cdot\sin^2\phi\cdot\cos\theta + R\sin\phi\sin\theta\cdot R^2\sin^2\phi\cdot\sin\theta$$
$$+ R\cos\phi\cdot R^2\cdot\sin\phi\cdot\cos\phi\big]\, d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\theta d\phi = 4\pi.$$

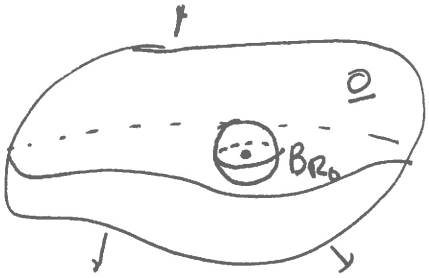
Παρόλο που $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ στο $B_R(\vec{0})\setminus\{\vec{0}\}$

$\iiint_{B_R(0)} \operatorname{div}\vec{F}$ δεν ορίζεται!! αφού $\operatorname{div}\vec{F}\to\infty$ όταν $\vec{x}\to\vec{0}$!!

- Αν $\underline{\Omega}\subset\mathbb{R}^3$ ανοικτό φραγμένο με $\partial\underline{\Omega}$ C^1 και $\vec{0}\notin\underline{\Omega}$

τότε $\iiint_{\underline{\Omega}} \operatorname{div}\vec{F} = 0 = \iint_{\partial\underline{\Omega}} \vec{F}\cdot\vec{dS}$

- Αν $\underline{\Omega}\subset\mathbb{R}^3$ ανοικτό φραγμένο με $\partial\underline{\Omega}$ προσ. προς τα έξω και $\vec{0}\in\underline{\Omega}$



τότε $\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}$ Δ.Ο.

όμως $\exists B_{R_0}(0) \subset \Omega$ γύρω από το $\vec{0}$.

και $\iiint_{\Omega \setminus B_{R_0}(\Omega)} \operatorname{div}\vec{F} = 0 = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{dS} - \iint_{S_{R_0}(0)} \vec{F}\cdot\vec{dS}$

$\uparrow$ έξω από $B_{R_0}(0)$ όπως πριν.

$$\Rightarrow \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{dS} = \iint_{S_{R_0}(0)} \vec{F}\cdot\vec{dS} = 4\pi. \quad \text{από Θ. Gauss.}$$

Αν $0 \notin \Omega \Rightarrow \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{dS} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F} \cdot = 0$

Θ. Gauss: απλοποιεί την ολοκλήρωση διαν. πεδίων με μηδενική απόκλιση - γιατί μπορούμε να τα υπολογίσουμε σε πιο απλές επιφάνειες.

• 2-μορφών όταν $d\omega = 0$ (ακριβείς).