<u>Παρατήρηση:</u>

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (\vec{T}(x_1, \ldots, x_n)) = (y_1, \ldots, y_n)$

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

<u>Ιακωβιανή ορίζουσα:</u> $$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \partial y_1/\partial x_1 & \partial y_1/\partial x_2 & \cdots & \partial y_1/\partial x_n \\ \vdots & & & \\ \partial y_n/\partial x_1 & \partial y_n/\partial x_2 & \cdots & \partial y_n/\partial x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det[T]. \quad !!!$$

Αλλαγή μεταβλητών - Μη γραμμική.

Στο $n=1$: Αντικατάσταση:

$$\int_a^b \sec^2 x \, e^{\tan x} \, dx \qquad \overset{(*)}{u}=\tan x \rightarrow \sec^2 x = 1+u^2$$

$$du = \sec^2 x \, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{1+u^2} \cdot du$$

$$x = \tan^{-1} u.$$

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} (1+u^2) \cdot e^u \left(\frac{1}{1+u^2} du \right)$$

Για $n \geq 2$ πως αλλάζει το $|d^n \vec{x}|$;

Αν $\vec{y} = T(\vec{x})$ $\&$ T γραμμικό $|d^n y| \leftrightarrow |\det[T]| \cdot |d^n \vec{x}|$

3 βασικές μορφές αλλαγής μεταβλητών / μετασχηματισμών

- από φυσική.

$n=2$: πολικές

$n=3$: σφαιρικές και κυλινδρικές.

<u>Ορισμός</u>: Πολικός μετασχηματισμός είναι η απεικόνιση

$$\vec{P} : (0,\infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

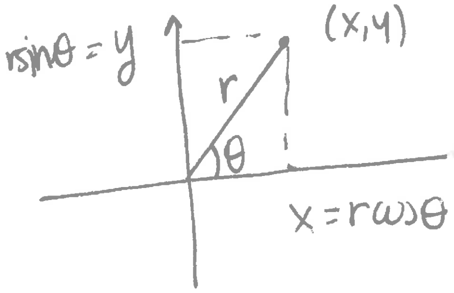
Η $\vec{P}$ είναι ένας 1-1 και επί μετασχηματισμός.

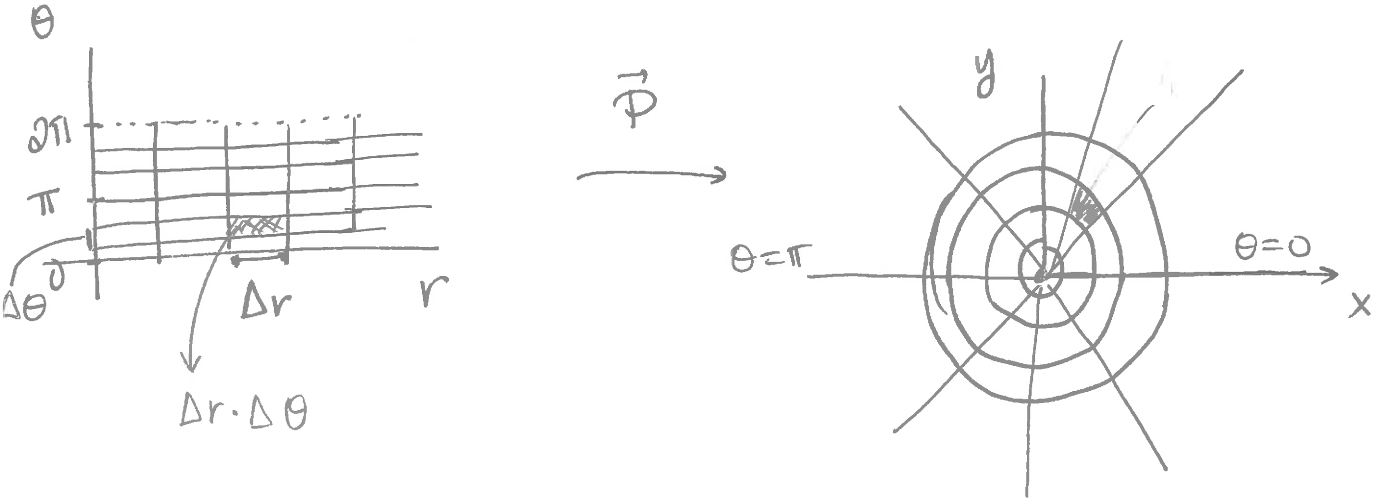
P είναι αντιστρέψιμη και $P^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arg(x,y))$

Δηλ $r = \sqrt{x^2+y^2}$: η απόσταση του (x,y) από το $(0,0)$

και $\theta = \arctan \frac{y}{x} \in [0, 2\pi)$ που να εκφράζει το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται το (x,y).

- η γωνία του $\overrightarrow{(x,y)}$ με τον άξονα x.





Η εικόνα ενός κουτιού $\Delta r \times \Delta\theta$ στο xy επίπεδο δίνει τομέα 

με εμβαδό $\sim r\cdot\Delta\theta\cdot\Delta r$

- κουτιά κοντά στο $(0,0)$ έχουν πιο μικρό εμβαδό σε μεταβλητές (r,θ) παρά σε μεταβλητές x,y.

Διαφορικό:
$$\begin{cases} dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

Πώς αλλάζει το $dxdy$?
Δηλαδή πώς θα ολοκληρώναμε μια συνάρτηση $f(x,y)$ σε χωρίο στο ~~xy~~ xy επίπεδο ως προς τις μεταβλητές (r,θ)?

Ιακωβιανός πίνακας:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det[D\vec{P}] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$: Δίνει το μετασχηματισμό του εμβαδού.

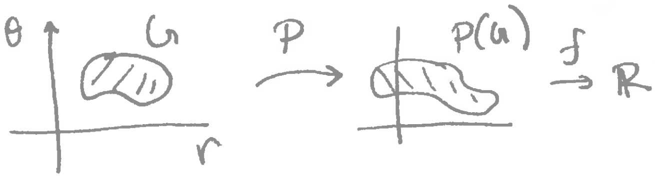
<u>Πρόταση 4</u> Έστω $G \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό με ∂G να έχει 2-μέτρο 0 και $f: \vec{P}(G) \to \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $D = \overline{P(G)}$ (φραγμένη).

Τότε η $f \circ P$ είναι ολοκληρώσιμη στο G και

$$\int_{P(G)} f = \int_G f \circ P \cdot r$$

Δηλαδή: $$\iint_{P(G)} f(x,y)\,dxdy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\,drd\theta$$

$dxdy \sim r\,drd\theta$ στο G.



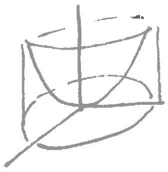
• <u>Προσοχή</u> Στο $r=0$ η ορίζουσα της Ιακωβιανής είναι 0

($r=0, \theta \in [0,2\pi) \mapsto (0,0)$: Η $\vec{P}$ δεν είναι 1-1)

Το σύνολο όμως αυτό έχει μηδενικό 2-μέτρο έτσι δεν επηρεάζει το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης ούτε την ολοκληρωσιμότητά της.

Παραδείγματα:

① Όγκος της περιοχής $A=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\le R^2$ και $0\le z\le x^2+y^2\}$



$$D=\{x^2+y^2\le R^2\}$$

$$Vol_3(A)=\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

D περιγράφεται ~~καλύτερα~~ ευκολότερα σε πολικές

$D=P(G)$ όπου $G=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le R,\ \theta\in[0,2\pi]\}$: ορθογώνιο!!

$$f(P(r,\theta))=f(r\cos\theta, r\sin\theta)=r^2.$$

$$\therefore Vol_3(A)=\iint_D f(x,y)\,dy\,dx=\iint_G f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^R\int_0^{2\pi} r^2\cdot r\,d\theta\,dr=\int_0^R r^3\,dr\cdot\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{4}\,2\pi\cdot R^4$$

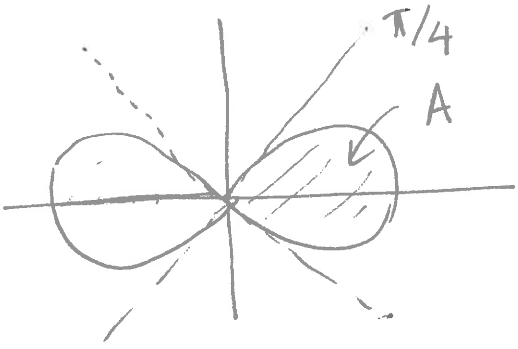
② $A_\alpha=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le R^2$ και $0\le z\le (x^2+y^2)^\alpha\}$

$$Vol_3(A_\alpha)=\int_0^R\int_0^{2\pi} r^{2\alpha}\,r\,d\theta\,dr=2\pi\cdot\left.\frac{r^{2\alpha+2}}{2\alpha+2}\right|_0^R=2\pi\cdot\frac{R^{2\alpha+1}}{2\alpha+2}$$

ορίζεται αν $2\alpha+2>0$ (διαφ. $\ln r$ ή άπειρο στο 0).

③ Λημνίσκος $r^2=a^2\cdot\cos 2\theta$ $\qquad \cos 2\theta\ge 0 \Leftrightarrow 2\theta\in[-\pi/2,\pi/2]\cup[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$

Το σχεδιάζουμε στο επίπεδο xy:



$A=P(G)$ με

$$G=\{(r,\theta)\mid -\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4},\ 0\le r\le a\sqrt{\cos 2\theta}\}$$

$$\therefore Vol_2(A) = \iint_A dx\,dy = \iint_G r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta =$$

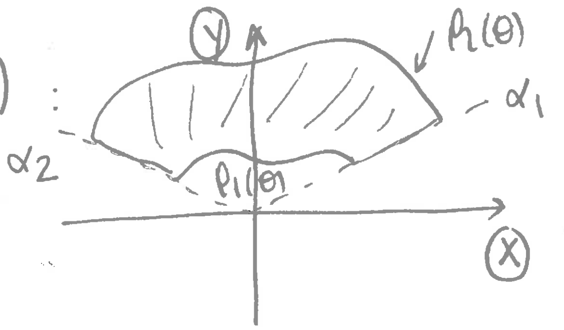
$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{a^2}{2}\cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}$$

Γενικα τα χωρια σε μεταβλητες (r,θ) περιγραφονται με 2 τροπους:

(i) $B = \{(r,\theta) \mid \alpha_1 \le \theta \le \alpha_2,\ \rho_1(\theta) \le r \le \rho_2(\theta)\}$

$\downarrow$

$P(B)$:

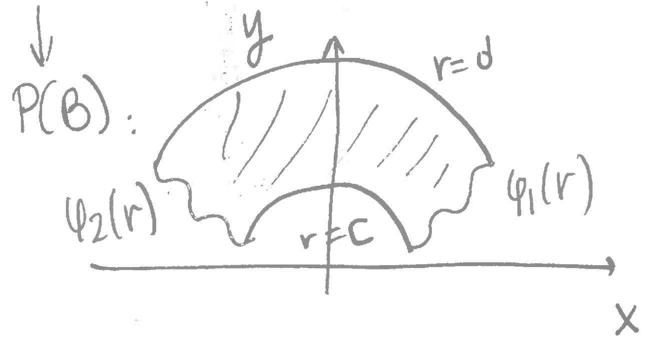


$$Vol_2(P(B)) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} r\,dr\,d\theta$$

(ii) $B = \{(r,\theta) \mid c \le r \le d,\ \varphi_1(r) \le \theta \le \varphi_2(r)\}$

$\downarrow$

$P(B)$:

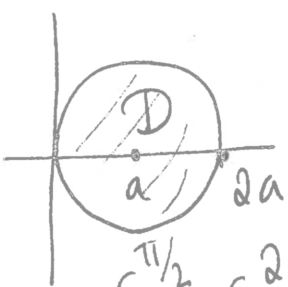


$$Vol_2(P(B)) = \int_{r_1}^{r_2}\int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} r\,d\theta\,dr$$

---

(4) $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 2ax,\ 0 \le z \le \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$

$x^2+y^2 = 2ax \Leftrightarrow (x-a)^2+y^2 = a^2 \to r^2 = 2ar\cos\theta \Leftrightarrow r = 2a\cos\theta$



$D = P(B)$ $\quad B = \{(r,\theta) \mid -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2a\cos\theta\}$

$$Vol_3(\Omega) = \iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint \sqrt{4a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} r\sqrt{4a^2-r^2}\,dr = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4a^2-r^2)^{3/2}\frac{1}{3}\Big|_0^{2a\cos\theta} d\theta = -\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\cancel{(2a)^3\sin^3\theta} - (2a)^3\right] d\theta$$

$$= (2a)^3 \pi \cdot \frac{1}{3}$$

Κυλινδρικές Συντεταγμένες:

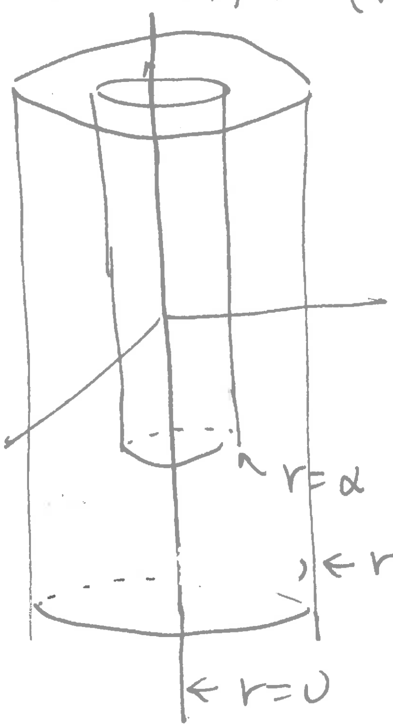
<u>Ορισμός:</u> Κυλινδρικός Μετασχηματισμός ονομάζεται η απεικόνιση:

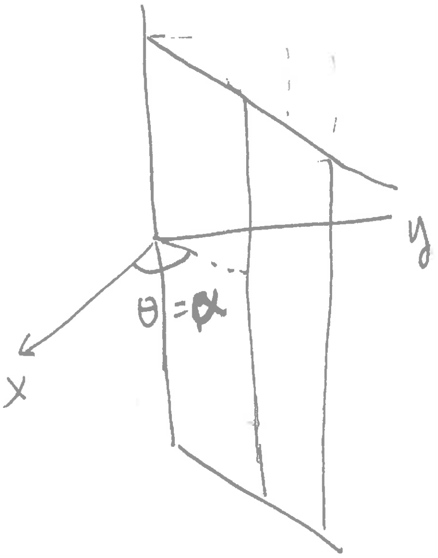
$$\vec{C}: (0,\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z\in\mathbb{R}\}$$

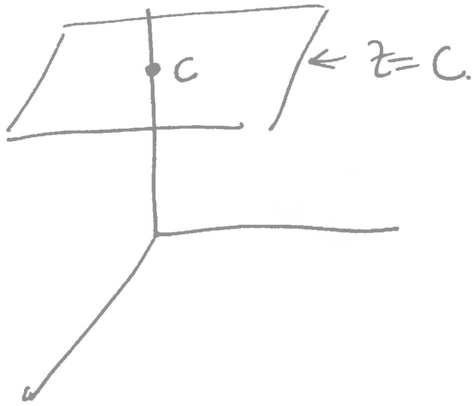
$$(r,\theta,z) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

C: είναι 1-1 και επί

$$C^{-1}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \arg(x,y),\ z\right)$$

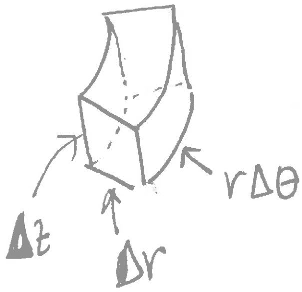






-επιτρέπεται στα r=0 αλλά όχι 1-1

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [D\vec{C}]$$



$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

<u>Πρόταση 5</u> Έστω $G\subset\mathbb{R}^3$ ανοικτό με ∂G να έχει 3-μέτρο 0. και $f: \overline{C(G)} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $D=\overline{C(G)}$ (φραγμένη). Τότε η $f\circ C$ είναι ολοκληρώσιμη στο G και

$$\iiint_{C(G)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{G} \underbrace{f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)}_{f\circ C}\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

• $dx\,dy\,dz$ στο D ~ $r\,dr\,d\theta\,dz$ στο G.

• Στο $r=0$ $\det = 0$ και η C δεν είναι 1-1

$r=0$: άξονας z, έχει μηδενικό 3-μέτρο, άρα δεν επηρεάζει.

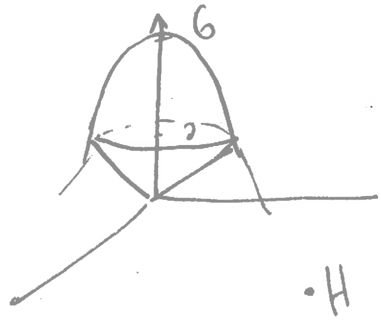
Παραδείγματα:

① $\underline{\Omega} = \{(x,y,z) \mid z \geq \sqrt{x^2+y^2},\ z \leq 6-x^2-y^2\}$. Υπολογίστε $Vol_3(\underline{\Omega})$

$$\sqrt{x^2+y^2} = 6-x^2-y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}-6=0$$

$$a^2+a-6=0 \Leftrightarrow (a+3)(a-2)=0 \rightarrow a=2 \quad (a\geq 0)$$

Ο κώνος $z=\sqrt{x^2+y^2}$ και το παραβολοειδές $z=6-x^2-y^2$ τέμνονται όταν $\sqrt{x^2+y^2}=2$ στο ύψος $z=2$.



Στο $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4\}$

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6-x^2-y^2$$

•Η περιγραφή του $\underline{\Omega}$ και τα ολοκληρώματα γίνονται πιο απλά σε κυλινδρική λόγω της συμμετρίας των εξισώσεων. (εμφανίζεται όρος x^2+y^2)

$\underline{\Omega} = C(B)$ με $B = \{(r,\theta,z) \mid r^2 \leq 4,\ 0\leq\theta<2\pi,\ r \leq z \leq 6-r^2\}$

$(z=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow z=r \ /\ z=6-x^2-y^2 \rightarrow z=6-r^2)$ $r^2 \leq 4 \Leftrightarrow r\in[0,2]$

$$\therefore Vol_3(\underline{\Omega}) = \iiint_{\underline{\Omega}} dx\,dy\,dx = \iiint_B r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_r^{6-r^2} r\,dz\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} r\cdot[6-r^2-r]\,d\theta\,dr = 2\pi\cdot\int_0^2 (6r-r^3-r^2)\,dr =$$

$$= 2\pi\left[3r^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{3}r^3\right]_0^2 = \left[12-4-\frac{8}{3}\right]\cdot 2\pi = \frac{32\pi}{3}$$

Παρόμοια: $\iiint_{\Omega} z \, dxdydz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_r^{6-r^2} z \cdot r \, dz\, d\theta\, dr.$

Σφαιρικές Συντεταγμένες:

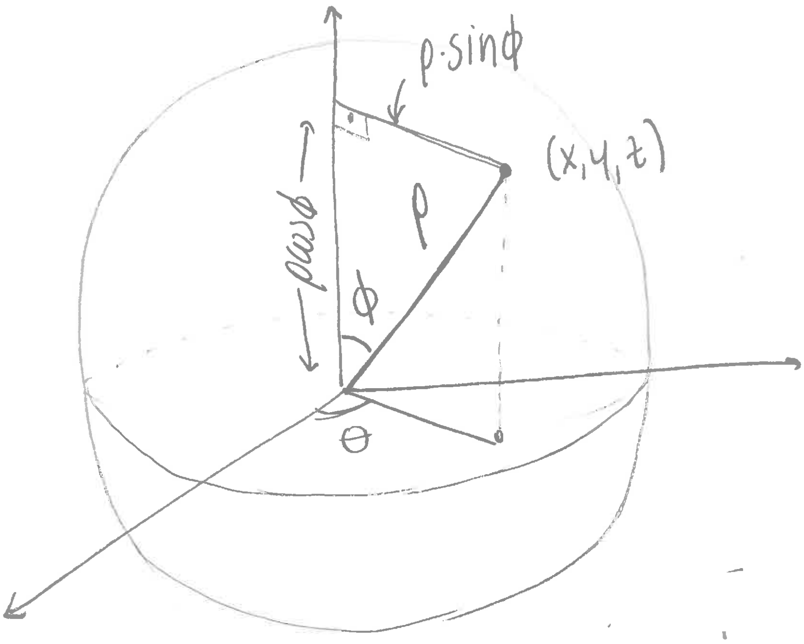
Ορισμός: Σφαιρικός Μετασχηματισμός ονομάζεται η απεικόνιση:

$$S : (0,\infty) \times [0,2\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

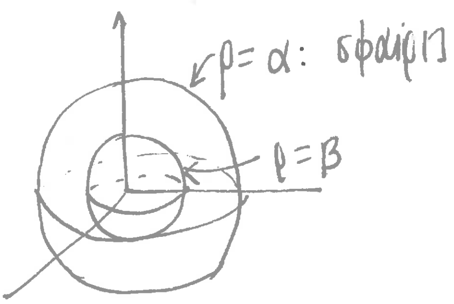
$$(\rho,\theta,\phi) \mapsto (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)$$

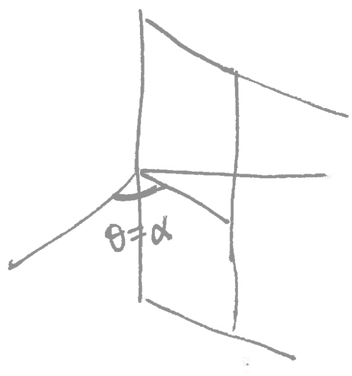
Είναι 1-1 και επί με:

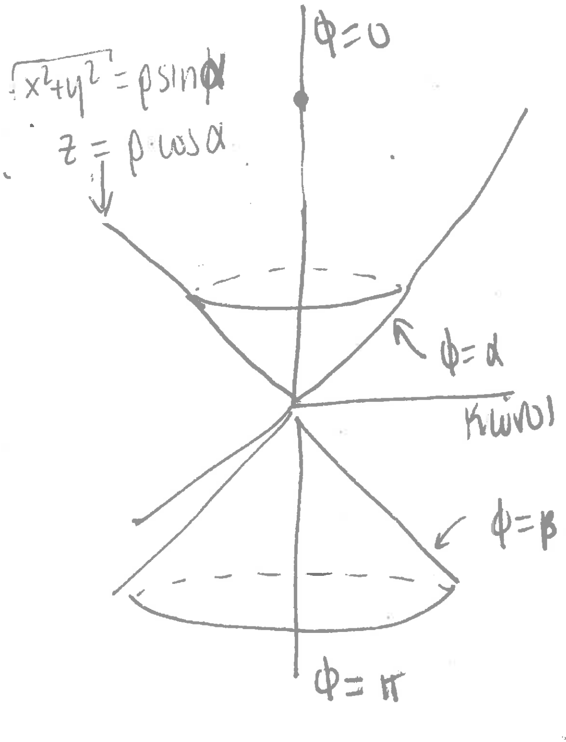
$$S^{-1}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \arg(x,y), \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$



- επεκτείνεται στα $\rho=0$, $\phi=0,\pi$ αλλά όχι 1-1

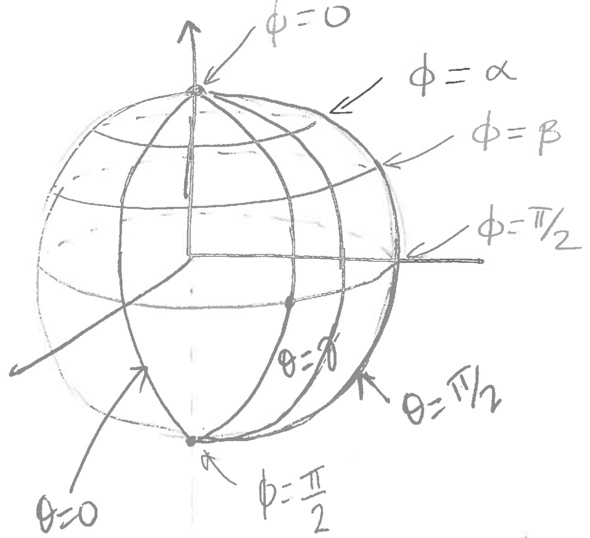






$\phi=\alpha$: $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x^2+y^2}=\rho\sin\alpha \\ z=\rho\cdot\cos\alpha\end{array}\right\}$ $z=\underbrace{\tan\alpha}_{\text{σταθερά}}\cdot\sqrt{x^2+y^2} \to$ κώνο.

Σε σφαίρα $\rho=\rho_0$



$\phi=$ σταθερά: παράλληλο

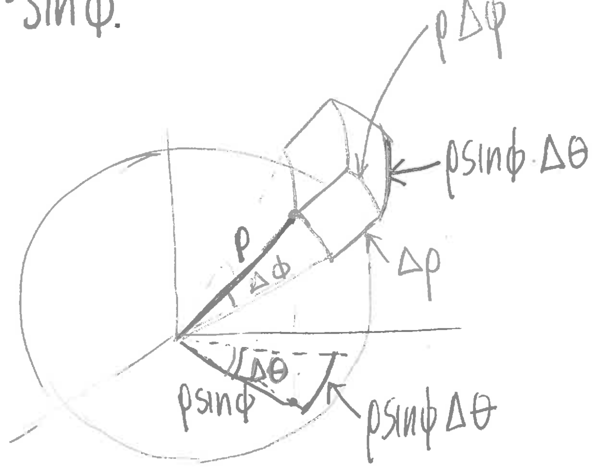
$\theta=$ σταθερά: μεσημβρινό

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right|=\left|\begin{vmatrix}\sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cdot\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cdot\cos\theta & \rho\cos\phi\cdot\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi\end{vmatrix}\right|$$

$$=\left|-\rho^2\sin^3\phi\cdot\cos^2\theta-\rho^2\sin\phi\cdot\cos^2\phi\cdot\sin^2\theta-\rho^2\sin\phi\cdot\cos^2\phi\cos^2\theta-\rho^2\sin^3\phi\cdot\sin^2\theta\right|=$$

$$=\left|-\rho^2\sin^3\phi-\rho^2\sin\phi\cdot\cos^2\phi\right|=+\rho^2\sin\phi.$$

$dx\,dy\,dz \sim \rho^2\sin\phi\; d\rho\, d\theta\, d\phi.$



• S όχι 1-1 στον άξονα z αλλά έχει 3-μέτρο 0.

Πρόταση 6 Έστω $G \subset \mathbb{R}^3$ με ∂G να έχει μηδενικό 3-μέτρο και f ολοκληρώσιμη στο $\overline{S(G)} = D$. Τότε η $f \circ S$ είναι ολοκληρώσιμη στο G και

$$\iiint_{S(G)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{G} \underbrace{f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)}_{f\circ S} \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

Παραδείγματα:

① $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ μπάλα.

$D = S(G)$ $\quad G = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$ ορθογώνιο!!

(όχι 1-1 στο άξονα)

$$\mathrm{Vol}_3(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 \sin\phi \, d\phi\, d\theta\, d\rho =$$

↑ ορίζουμε.

$$= \int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi = \frac{1}{3}\rho^3\Big|_0^R \cdot \phi\Big|_0^{2\pi} \cdot [-\cos\phi]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{3}R^3 \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

② $W = \{(x,y,z) \mid a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}$ $\quad a,b>0$

$W = S(G)$ $\quad G = \{(\rho,\theta,\phi) \mid a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$

$$\iiint_W (x^2+y^2+z^2)^{\alpha} = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^{2\alpha} \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\phi\, d\theta\, d\rho = 4\pi \cdot \int_a^b \rho^{2\alpha+2} d\rho$$

↗ $2\alpha+2 \neq -1$ $\quad 4\pi \cdot \frac{1}{2\alpha+3} \cdot \left[b^{2\alpha-3} - a^{2\alpha+3}\right]^{a}$

↘ $2\alpha+2 = -1$: $\quad 4\pi\,[\log b - \log a]$.

① Περιγραφή σε σφαιρική παρόμοιων χωρίων.

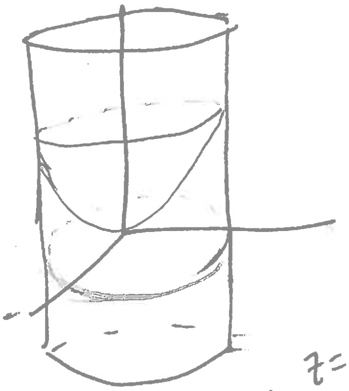
$$D_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2, \; z \geq 0\} = S(G_1)$$

$$G_1 = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 0 \leq \rho \leq R, \; 0 \leq \theta < 2\pi, \; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$D_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2, \; x,y \geq 0\} = S(G_2)$$

$$G_2 = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 0 \leq \rho \leq R, \; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \; 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

③ $\int_B z$ όπου $B \subset \mathbb{R}^3$ το στερεό μέσα στον κύλινδρο $x^2+y^2=1$, πάνω από $z=0$ και κάτω από $z=x^2+y^2$

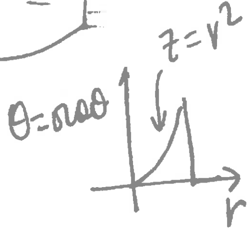


Τομή στο $z=1$.

$D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$ και $0 \leq z \leq x^2+y^2$

Σε κυλινδρικά:

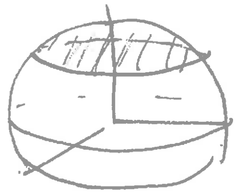
$0 \leq r \leq 1 \quad 0 \leq \theta < 2\pi$ και $0 \leq z \leq r^2$



$$\int_B z = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} z \cdot r \cdot dz \cdot d\theta \cdot dr = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=0}^{z=r^2} r \cdot dr =$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot r^5 dr = \pi \cdot \frac{1}{6} \cdot r^6 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

4) $B = \{(x,y,z) \mid z \geq \frac{1}{2}$ και $x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$



Υπολογίστε $\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^{\alpha} = I$

B: $\quad (x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 3/4\}$

και σε κάθε (x,y) $\quad \frac{1}{2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$

Πιο απλή περιγραφή σε κυλινδρικές:

$B = C(G) \qquad G = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{3/4}\,,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ \frac{1}{2} \leq z \leq \sqrt{1-r^2}\}$

$$I = \int_0^{\sqrt{3/4}} \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^{\sqrt{1-r^2}} (r^2+z^2)^{\alpha} \cdot r \, dz \, d\theta \, dr \quad ??$$

Τομές με $z =$ σταθερό $\qquad \frac{1}{2} \leq z \leq 1$

Σε κάθε z δίσκος $\quad x^2+y^2 \leq 1-z^2 \Leftrightarrow r^2 \leq 1-z^2$

Περιγραφή δίσκου σε πολική / κυλινδρική:

$$G_z = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{1-z^2}\,,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

$$\therefore I = \int_{1/2}^{1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} (r^2+z^2)^{\alpha} \cdot r \, dr \, d\theta \, dz =$$

$\alpha \neq -1$

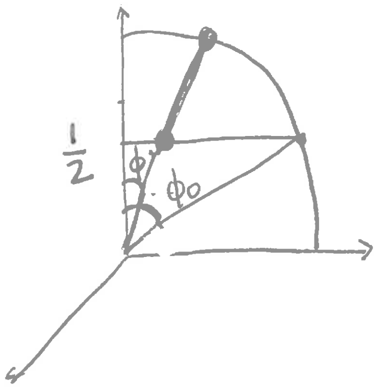
$$= 2\pi \cdot \int_{1/2}^{1} \frac{1}{2} (r^2+z^2)^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{\alpha+1} \Bigg|_{r=0}^{r=\sqrt{1-z^2}} dz = \pi \int_{1/2}^{1} \left[\frac{1}{\alpha+1} (1 - z^{2\alpha+2}) \right) dz$$

$$= \frac{\pi}{\alpha+1} \left[z - \frac{1}{2\alpha+3} \cdot z^{2\alpha+3} \right]_{1/2}^{1} = \frac{\pi}{\alpha+1} \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha+3} + \frac{1}{2\alpha+3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+3} \right]$$

$$= \frac{\pi}{(\alpha+1)(2\alpha+3)} \cdot \left[\frac{2\alpha+1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+3} \right]$$

$\alpha = -1 \to \log$

Σε σφαιρικές:



$0 \le \theta < 2\pi$

Σε κάθε θ

$0 \le \phi \le \phi_0 \qquad \phi_0: \ \cos\phi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{3}$

Σε κάθε ϕ: $z \geq \frac{1}{2}$

$z = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \rho \cdot \cos\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = \frac{1}{2\cos\phi}$

$$\frac{1}{2\cos\phi} \le \rho \le 1$$

$$\therefore \ I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{1/(2\cos\phi)}^{1} \rho^{2\alpha} \cdot \rho^2 \cdot \sin\phi \cdot d\rho\, d\phi\, d\theta =$$

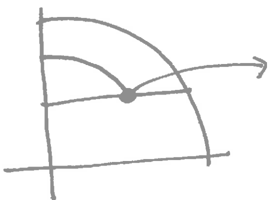
$$= 2\pi \cdot \int_0^{\pi/3} \rho^{2\alpha+3} \frac{1}{2\alpha+3} \Big|_{\rho=\frac{1}{2}(\cos\phi)^{-1}}^{1} \sin\phi \cdot d\phi = \frac{2\pi}{2\alpha+3}\int_0^{\pi/3}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+3} \cdot (\cos\phi)^{-2\alpha-3}\right]\sin\phi\, d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{2\alpha+3}\left[-\cos\phi - \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+3} \cdot \frac{(\cos\phi)^{-2\alpha-2}}{2(\alpha+1)}\right]_0^{\pi/3} = \frac{2\pi}{2\alpha+3}\left[\overbrace{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4(\alpha+1)} + 1}^{1-\frac{1}{2(\alpha+1)}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+4}\frac{1}{\alpha+1}\right]$$

$$= \frac{\pi}{(2\alpha+3)(\alpha+1)} \cdot \left[\frac{2\alpha+1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+3}\right]$$

ή Σε κάθε θ:

$\frac{1}{2} \le \rho \le 1$



$\rho \cdot \cos\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \arccos\left(\frac{1}{2\rho}\right)$

Σε κάθε ρ: $0 \le \phi \le \arccos\left(\frac{1}{2\rho}\right)$

$$\therefore \ I = \int_0^{2\pi}\int_{1/2}^{1}\int_0^{\arccos(1/2\rho)} \rho^{2\alpha+2} \cdot \sin\phi\, d\phi\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_{1/2}^{1} \rho^{2\alpha+2} \cdot (-\cos\phi)\Big|_{\phi=0}^{\phi=\arccos(1/2\rho)} d\rho = 2\pi \int_{1/2}^{1} \rho^{2\alpha+2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2\rho}\right)\right] d\rho$$

$$= \dots$$