Αλλαγή Μεταβλητών:

Μια συνάρτηση $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται μετασχηματισμός. Η $\vec{F}$ είναι διανυσματική συνάρτηση.

Αν η $\vec{F}$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, τότε υπάρχει πίνακας A τ.ω. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x}$.

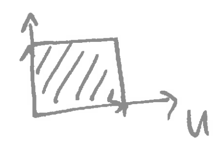
Παρατήρηση: Έστω $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός τ.ω.

$$T(u,v) = \underset{A}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = (a_1 u + b_1 v,\ a_2 u + b_2 v)$$

ο T είναι 1-1 και επί ανν $\det[A] \neq 0$ ανν $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ Γ.Α.

Έστω $G = P(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ όπου $\vec{e}_1 = \hat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{e}_2 = \hat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$G = \{(u,v) \mid u,v \in [0,1]\}$



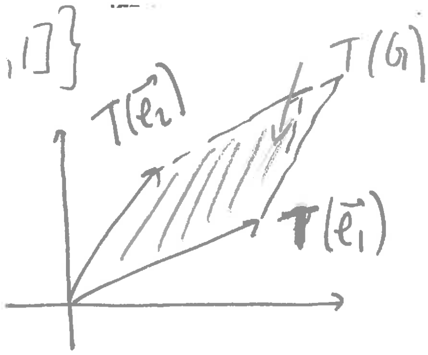
$\mathrm{Vol}_2(G) = 1$.

$$T(G) = \{(a_1 u + b_1 v,\ a_2 u + b_2 v) \mid u,v \in [0,1]\}$$

$$= \{\underset{t_1}{u}(a_1, a_2) + \underset{t_2}{v}(b_1, b_2) \mid u,v \in [0,1]\}$$

$$\equiv P\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= P\left(T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2)\right)$$



$$\mathrm{Vol}_2(T(G)) = \left|\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right| = |\det(A)| \quad !!$$

Παρόμοια:

Αν $G = P(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \{ t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 \mid t_1, t_2 \in [0,1]\}$

τότε $T(G) = \{ T(t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2) \mid t_1, t_2 \in [0,1]\}$

T γραμμ. απ. $= \{ t_1 \cdot T(\vec{v}_1) + t_2 \cdot T(\vec{v}_2) \mid t_1, t_2 \in [0,1]\}$

$= P(T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2))$.

$Vol_2(G) = |\det[\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2]|$

$Vol_2(T(G)) = |\det[T(\vec{v}_1) \quad T(\vec{v}_2)]|$

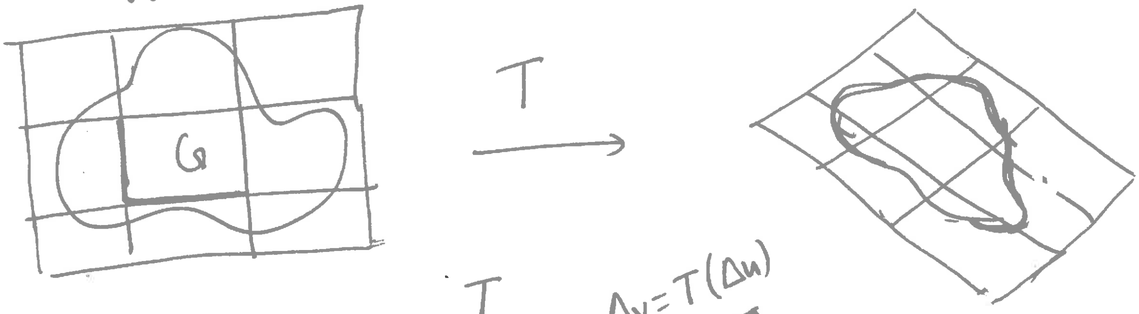
$= |\det(A \cdot [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2])| = |\det(A)| \cdot |\det[v_1 \ v_2]|$

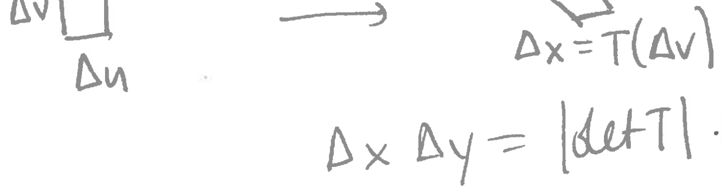
ο πίνακας του T. $= |\det(A)| \cdot Vol_2(G)$.

$|\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} \end{bmatrix})$$

Βαθμωτή μεταβολή στον όγκο όταν ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός.



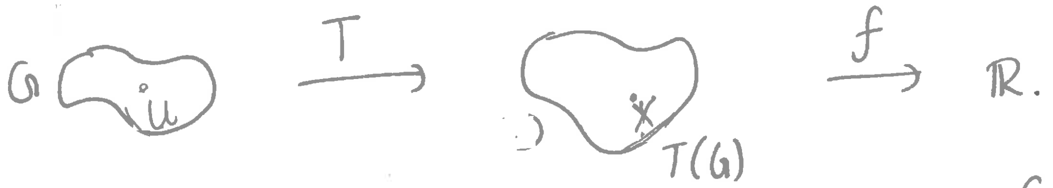


$\Delta x \, \Delta y = |\det T| \cdot \Delta u \Delta v$

Θεώρημα 2: Έστω $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $[T]$ πχη. Αν $G\subset\mathbb{R}^n$ για το οποίο $Vol_n(G)$ ορίζεται (∂G έχει n-μέτρο 0), τότε ο όγκος του $T(G)$ ορίζεται ($\partial T(G)$ έχει n-μέτρο 0) και

$$Vol_n(T(G)) = |\det[T]|\cdot Vol_n(G).$$

Θεώρημα 3: (Γραμμική αλλαγή μεταβλητών).
Έστω $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός και $f:\Pi\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο χωρίο $D=T(G)$, με ∂D να έχει n-μέτρο 0.



Τότε η συνάρτηση $f\circ T$ είναι ολοκληρώσιμη στο G και

$$\int_{T(G)} f(x)\,|d^n x| = |\det T|\cdot\int_G f(u)\cdot|d^n(u)|$$

$f\circ T$: παίρνει την f πίσω στο G.

$$\int_{T(G)} f = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_Q f(\xi_Q)\,Vol_n(Q) = \lim_{\|\bar P\|\to 0}\sum_{\bar Q} f(T(\zeta_{\bar Q}))\,Vol_n(T(\bar Q))$$

$$= \lim_{\|\bar P\|\to 0}\sum_{\bar Q} f\circ T(\zeta_{\bar Q})\,|\det T|\cdot Vol_n(\bar Q)$$

$\bar Q$: παραλληλεπίπεδα αλλά αν T αντιστρέψιμος τότε μπορεί να γίνει η ολοκλήρωση σε αυτά.

$n=1$: $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^2 f(\frac{1}{2}\cdot u)\cdot \frac{1}{2}\cdot du$

Αν $x=\frac{1}{2}u \Rightarrow T(u)=\frac{1}{2}u \rightarrow dx=\frac{1}{2}du = |\det[T]|\cdot du$

$0\le x\le 1$: $T(G)=[0,1]$.

$\Downarrow$

$0\le u\le 2$: $G=[0,2]$

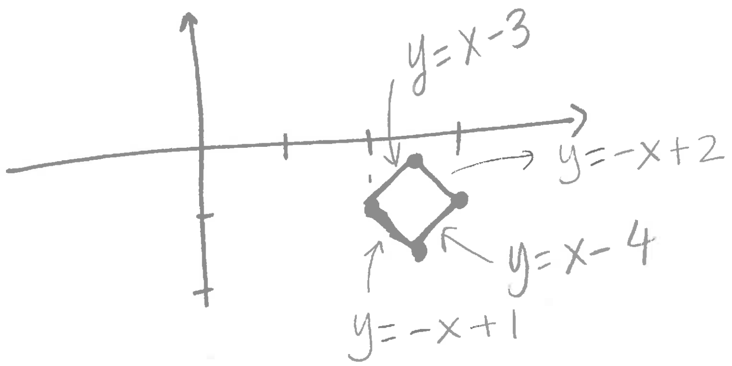
Το u είναι "διπλάσιο" του x
άρα "χρειάζεται" ο παράγοντας $\frac{1}{2}$ για να
κρατηθεί ίδιο το ολοκλήρωμα.

Παραδείγματα:

① Έστω D: παραλληλόγραμμο με κορυφές $(2,-1)$, $(5/2, -\frac{1}{2})$
$(3,-1)$ και $(5/2, -3/2)$.

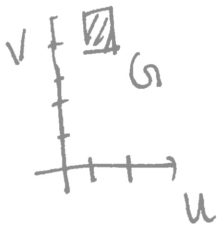
Υπολογίστε $\iint_D \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}$

• Τόσο το D όσο και η f πολύπλοκοι χώροι.



$D=\{(x,y) \mid 1\le x+y\le 2,\ 3\le x-y\le 4\}$

Θέτοντας $u=x+y$ και $v=x-y$ η f δίνεται από $\sqrt{u}\cdot\sqrt[3]{v}$
και το χωρίο περιγράφεται από $1\le u\le 2$ $\quad 3\le v\le 4$



$\longrightarrow \quad T(G)=D \qquad T(u,v)=(x,y)$

Θέλουμε x,y ως προς (u,v)

$$\left.\begin{aligned} u&=x+y\\ v&=x-y \end{aligned}\right\} \quad x=\frac{u+v}{2}, \quad y=\frac{u-v}{2}$$

$$T(u,v)=\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$ γραμμ. μετασχημ.

από το $G=[1,2]\times[3,4]$ στο D.

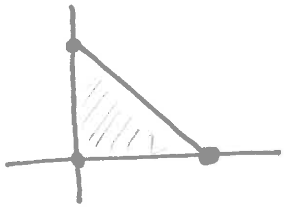
$$\det[T]=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_G f(x(u,v),y(u,v))\cdot|\det[T]|\,du\,dv=\int_1^2\int_3^4 \sqrt{u}\cdot\sqrt[3]{v}\,\frac{1}{2}\,dv\,du$$

$$=\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot v^{4/3}\Big|_3^4=\frac{1}{4}\left[2^{3/2}-1\right]\cdot\left[4^{4/3}-3^{4/3}\right]$$

(2) $$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dy\, dx$$

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$$



Πιο απλό ολοκλήρωμα αν θέσουμε $u = x+y$ $v = x-y$.

$$\Rightarrow x = (u+v)\tfrac{1}{2} \qquad y = (u-v)\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$T(u,v) = \left(\tfrac{1}{2}(u+v), \tfrac{1}{2}(u-v)\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Ποιό είναι το G τ.ω. $T(G) = D$;

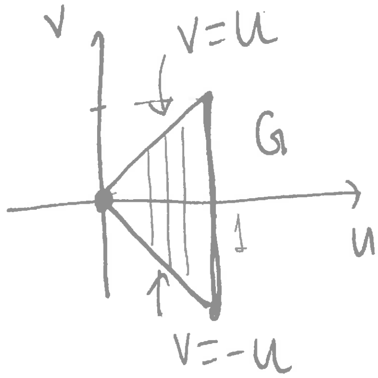
T γραμμικός άρα παίρνει ευθείες σε ευθείες και τις κορυφές πολυέδρου σε κορυφές πολυέδρου!

∴ Το G τρίγωνο και αρκεί να βρούμε κορυφές.

$(x,y) = (0,0) \xleftarrow{T} (u,v) = (0,0)$

$(x,y) = (1,0) \xleftarrow{T} (u,v) = (1,1)$

$(x,y) = (0,1) \xleftarrow{T} (u,v) = (1,-1)$



$$\therefore I = \iint_G e^{-v/u} \cdot |\det[T]|\, du\, dv = \frac{1}{2} \cdot \iint_G e^{-v/u}\, du\, dv$$

καλύτερα $dv\,du$

$$G = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 1,\ u \le v \le -u\}$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-u}^{u} e^{-v/u}\, dv\, du = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 -u \cdot e^{-v/u}\Big|_{v=-u}^{v=u}\, du =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 +u\left[e^{-1} - e^{1}\right] du = -\frac{1}{4}u^2\left[e^{-1} - e\right]\Big|_0^1 \cdots$$

Είναι ολοκληρώσιμη η $e^{-v/u}$;

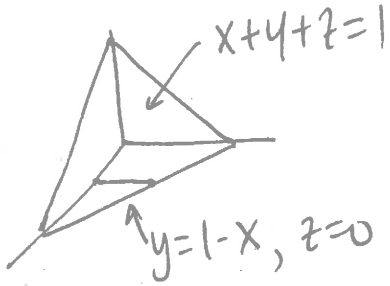
Αφού $-u \le v \le u$ και $u \geq 0$ $\Rightarrow$ $-1 \le \frac{v}{u} \le 1$ $\Rightarrow$ $e^{-v/u}$ είναι φραγμένη στο χωρίο μας παρόλο που $u \to 0$.

και ασυνεχής μόνο στο $(u,v)=(0,0)$

$\therefore$ ολοκληρώσιμη!

(3) P_1 : πυραμίδα με κορυφή

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \| & \| & \| & \| \\ \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \end{array}$$



$$Vol_3(P_1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz\,dy\,dx = \frac{1}{6}.$$

P_2 : πυραμίδα με κορυφή

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}-2\\-5\\2\end{bmatrix}. \\ \| & \| & \| & \| \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array}$$

Υπολογίστε $Vol_3(P_2)$.

Έστω $T = \begin{bmatrix} w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Τότε $T(v_i) = w_i$ $\forall i = 1,2,3,4$ και $T(P_1) = P_2$

αφού γραμμ. μετασχ.

$$Vol_3(P_2) = \iiint_{P_2} 1 = \iiint_{T(P_1)} 1 = \iiint_{P_1} 1 \cdot |\det T| = |\det T| \cdot Vol_3(P_1)$$

$$= \frac{33}{6}.$$

$$\det T = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 5 - 2 + 6 + 10 + 2$$

$$= 33.$$