ΜΑΣ 202

- Ολοκλήρωση συναρτήσεων $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Για $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  - Γενίκευση ολοκληρώματος Riemann.
    - Κριτήρια ολοκληρωσιμότητας (για ποιές f και ποιό χωρίο)
    - Θεώρημα Fubini για υπολογισμό.
  - Ορίζουσες & μέτρηση όγκου – Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών
  - Θεωρήματα σύγκλισης.
  - Όγκοι $\int_{\Pi} f$ $\quad \Pi \subset \mathbb{R}^n$.

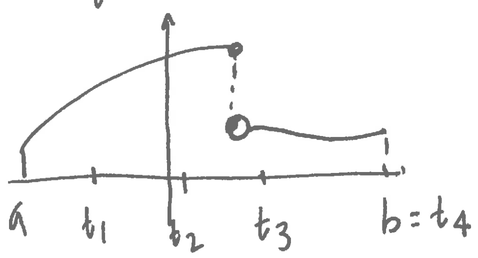
- Για $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:
  - Επικαμπύλια & επιφανειακά ολοκληρώματα -παραμέτριση
  - Διαφορικές Μορφές / Θεώρημα Stokes (ΘΘΑΛ - γενίκευση)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\int_a^b f \left(= \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f\,dx\right)$$ "Εμβαδό ανάμεσα στην f και άξονα x".

<u>Ορισμός</u>: Μια <u>διαμέριση</u> P του $[a,b]$ είναι μια επιλογή σημείων $t_0,\dots,t_k$ όπου $a=t_0<t_1<\dots<t_k=b$.
Η P χωρίζει το $[a,b]$ σε υποδιαστήματα $[t_{i-1},t_i]$ για $i=1,\dots,k$

$\|P\| = \max\limits_i (t_i - t_{i-1})$: η <u>λεπτότητα</u> της διαμέρισης.



Για f φραγμένες: $$L(f,P)=\sum_{i=1}^{k} m_i (t_i - t_{i-1}) \qquad m_i := \inf\{f(x) \mid t_{i-1}\le x\le t_i\}$$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{k} M_i (t_i - t_{i-1}) \qquad M_i := \sup\{f(x) \mid t_{i-1}\le x\le t_i\}$$

αφού m_i, M_i ορίζονται. (Αξίωμα πληρότητας).

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L} = \sup\{L(f,P) \mid P \text{ διαμ. του } [a,b]\} \\ \mathcal{U} = \inf\{U(f,P) \mid \quad \text{-"-} \quad\} \end{array}\right\} \text{ ορίζονται για } f \text{ φραγμένη.}$$

<u>Ορισμός</u>: f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ανν $\mathcal{L}=\mathcal{U}$.
Ορίζουμε $\int_a^b f = \mathcal{L}=\mathcal{U}$, το ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$.

<u>Παρατηρήσεις</u>: $$L(f,P) \le \int_a^b f \le U(f,P) \quad \forall P$$
$$L(f,P_1) \le L(f,P_2) \le U(f,P_2) \le U(f,P_1)$$
αν P_2 εκλέπτυνση της P_1.

• f συνεχής στο $[a,b]$ $\rightarrow$ $\int_a^b f$ ορίζεται

-επιτρέπονται κάποια σημεία ασυνέχειας, πόσα;

***. παράδειγμα: Αν $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ $\quad \int_a^b f$ Δ.Ο. f ασυνεχής στο $\mathbb{R}$.

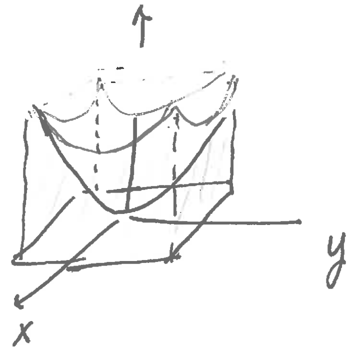
Ολοκλήρωση $\quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

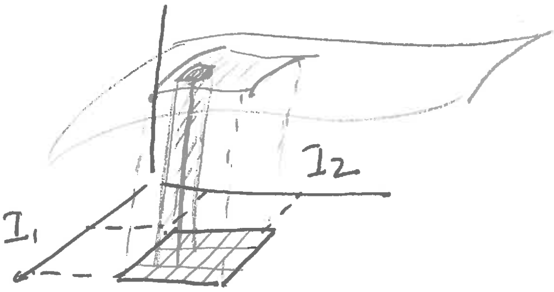
$$I = [a,b] \longrightarrow \Pi = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \qquad I_j = [a_j, b_j]$$

$$= \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_j \leq x_j \leq b_j \quad j = 1, \dots, n\}.$$

$$f(x) \longrightarrow f(x_1, \dots, x_n)$$

π.χ. $f(x,y) = x^2 + y^2$





Ορισμός: Μια διαμέριση P του ορθογωνίου $\Pi = I_1 \times \dots \times I_n$ με $I_j = [a_j, b_j]$ είναι μια συλλογή $P = (P_1, \dots, P_n)$ από διαμερίσεις, όπου P_j είναι διαμέριση του I_j που αποτελείται από $t_{j,0}, t_{j,1}, \dots, t_{j,k_j}$ με

$$a_j = t_{j,0} < t_{j,1} < \dots < t_{j,k_j} = b_j \qquad j = 1, \dots, n$$

διαφορετικό για κάθε I_j πιθανό.

Υποορθογώνια της διαμέρισης:

$$Q = [t_{1,i_1-1}, t_{1,i_1}] \times [t_{2,i_2-1}, t_{2,i_2}] \times \dots \times [t_{n,i_n-1}, t_{n,i_n}], \text{ για } 1 \leq i_1 \leq k_1, \dots, 1 \leq i_n \leq k_n.$$

π.χ. Αν $P_1 = t_0, t_1, \dots, t_m$ διαμ. του $[a,b]$

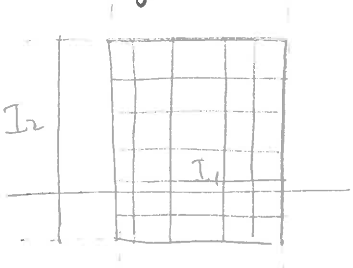
και $P_2 = s_0, s_1, \dots, s_\ell$ διαμ. του $[c,d]$

τότε (P_1, P_2) διαμερίζει το $[a,b]\times[c,d]$ σε $m\cdot\ell$ ορθογώνια της μορφής $Q = [t_{i-1}, t_i]\times[s_{j-1}, s_j]$

για $1\le i\le m$, $1\le j\le \ell$.

$$\mathrm{Vol}_2(Q) = (t_i - t_{i-1})\cdot(s_j - s_{j-1}).$$

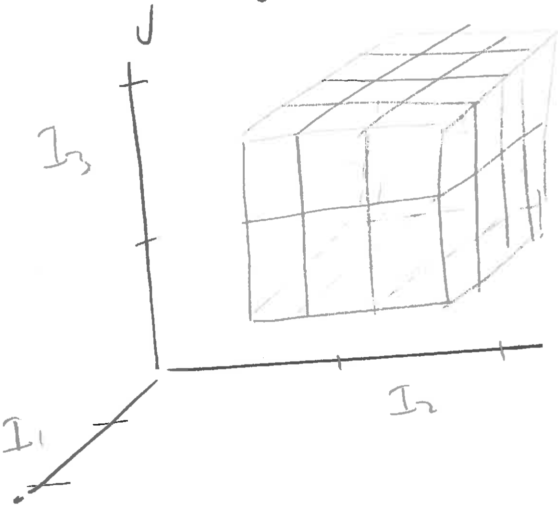
↑ στο $\mathbb{R}^2$



Γενικά $\mathrm{Vol}_n(Q) = (t_{1,i_1} - t_{1,i_1-1})\cdot(t_{2,i_2} - t_{2,i_2-1})\cdot\ldots\cdot(t_{n,i_n} - t_{n,i_n-1})$

Η $P = (P_1, \dots, P_n)$ έχει $k_1\cdot k_2\cdot\ldots\cdot k_n$ υπορθογώνια

$\|P\| = \max \|P_j\|$ - Το μέγιστο μήκος πλευράς των υπορθογωνίων.



<u>Ορισμός</u>: Αν η $f: \Pi\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη τότε ορίζουμε

$$m_Q(f) = \inf\{f(\vec{x}) \mid \vec{x}\in Q\}$$

$$M_Q(f) = \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x}\in Q\}$$

- σε κάθε υπορθογώνιο Q.
- ορίζονται αφού f φραγμένη

$\mathrm{osc}_Q(f) := M_Q(f) - m_Q(f)$ η <u>διακύμανση</u> της f στο Q.

Ορισμός: $L(f,P) = \sum_{Q\in P} m_Q(f)\, Vol_n(Q)$: κάτω άθροισμα Riemann της f ως προς P

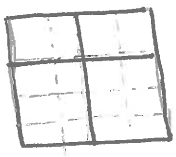
$U(f,P) = \sum_{Q\in P} M_Q(f)\, Vol_n(Q)$: Άνω άθροισμα -"- -"-

Παρατήρηση:
- $L(f,P) \leq U(f,P) \quad \forall P$.
- $m_Q(f)\cdot Vol_n(Q)$: όγκος πρίσματος $n+1$ διάστασης.

Πρόταση 1 Αν η P' είναι εκλέπτυνση της P (κάθε υποορθογώνιο της P' περιέχεται σε υποορθογώνιο της P) τότε

$$L(f,P) \leq L(f,P') \leq U(f,P') \leq U(f,P).$$

Απόδειξη: Έστω Q υποορθογώνιο της P.
Τότε $Q = \bigcup_{i=1}^{k} Q_i'$ με Q_i': υποορθογώνια της P'



$\cdot - \cdot$ P

$" \dots "$ P'

Άρα $Vol_n(Q) = \sum_i Vol_n(Q_i')$

$$L(f,P) = \sum_Q m_Q(f)\, Vol_n(Q)$$

$$L(f,P') = \sum_{Q'} m_{Q'}(f)\, Vol_n(Q')$$

Για $Q_i' \subset Q$ $\quad m_Q(f) \leq m_{Q_i'}(f) \quad \forall i=1,\dots,k$

Επίσης $\quad M_Q(f) \geq m_{Q_i'}(f) \quad (*)$

$$\therefore\ m_Q(f)\, Vol_n(Q) = m_Q(f)\left[Vol_n(Q_1') + \dots + Vol_n(Q_k') \right]$$

$$\leq m_{Q_1'}(f)\, Vol_n(Q_1') + \dots + m_{Q_k'}(f)\cdot Vol_n(Q_k')$$

Άρα $L(f,P) = \sum_{Q \in P} m_Q(f)\, Vol_n(Q)$

$$\leq \sum_{Q \in P} \sum_{Q_i' \subset Q} m_{Q_i'}(f) \cdot Vol_n(Q_i')$$

$$= \sum_{Q' \in P'} m_{Q'}(f)\, Vol_n(Q') = L(f,P').$$

αφού η συλλογή των $Q_i' \subset Q$ δίνει όλα τα Q' της P'.

Το ότι $U(f,P') \leq U(f,P)$ ισχύει από $(*)$ παρόμοια $\square$

<u>Ορισμός:</u> Μια φραγμένη συνάρτηση $f: \Pi \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ονομάζεται <u>Riemann ολοκληρώσιμη</u> αν $\mathcal{L} = \mathcal{U}$, όπου

$$\mathcal{L} = \sup \{ L(f,P) \mid P \text{ διαμ. του } \Pi \}$$ και

$$\mathcal{U} = \inf \{ U(f,P) \mid P \text{ διαμ. του } \Pi \}$$

<u>Συμβολισμός:</u> $\mathcal{L} = \mathcal{U} = \int_\Pi f = \int_{I_1 \times \ldots \times I_n} f = \int_\Pi f(x)\, dx = \int_\Pi f(\vec{x}) |d^n \vec{x}|$

$$= \int_\Pi f(x_1, \ldots, x_n) \underbrace{dx_1 \ldots dx_n}_{\text{ενιαίο όχι πολλαπλό ολοκλήρωμα.}}$$

Για $n=2$: $\int_\Pi f = \iint_\Pi f$

$n=3$: $\int_\Pi f = \iiint_\Pi f$

όχι

$\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$

• Παρατήρηση, $\forall$ διαμέριση P, P' του Π $\quad L(f,P) \leq \int_\Pi f \leq U(f,P')$

Θεώρημα 2 (Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας Riemann).

Μια φραγμένη συνάρτηση $f: \Pi \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη ανν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $P_0 = P_0(\varepsilon)$ του Π τ.ω. $U(f,P_0) - L(f,P_0) < \varepsilon$.

(Παρατήρηση: Αν P εκλέπτυνση του P_0, τότε ισχύει
$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$)

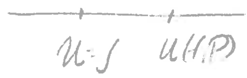
Απόδειξη: $(\rightarrow)$ Έστω f ολοκληρώσιμη και $\varepsilon > 0$

$\int_\Pi f = \alpha = \sup\{L(f,P) \mid P \text{ διαμ. του } \Pi\}$.

Από τον ορισμό του sup $\exists P_1(\varepsilon)$ διαμ. του Π

τ.ω. $\int_\Pi f - L(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\int_\Pi f = \mathcal{U} = \inf\{U(f,P) \mid P \text{ διαμ. του } \Pi\}$.



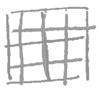
Από τον ορισμό του inf $\exists P_2(\varepsilon)$ διαμ. του Π

τ.ω. $U(f,P_2) - \int_\Pi f < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\therefore \; U(f,P_2) - \int_\Pi f + \int_\Pi f - L(f,P_1) < \varepsilon$

$\Rightarrow U(f,P_2) - L(f,P_1) < \varepsilon$.

Έστω $P_0(\varepsilon)$ κοινή εκλέπτυνση του $P_1(\varepsilon)$ & $P_2(\varepsilon)$ (ένωση)



$\Rightarrow L(f,P_1) < L(f,P_0) < U(f,P_0) < U(f,P_2)$

Άρα $U(f,P_0) - L(f,P_0) < U(f,P_2) - L(f,P_1) < \varepsilon$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε πως $\forall \varepsilon>0$ υπάρχει $P_0(\varepsilon)$ τ.ω.

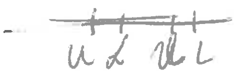
$$U(f,P_0)-L(f,P_0)<\varepsilon.$$

$\mathcal{U}=\inf\{U(f,P)\mid P$ διαμ. του $\Pi\}$
$\mathcal{L}=\sup\{L(f,P)\mid P$ διαμ. του $\Pi\}$ $\Big\}$ ορίζονται αφού f φραγμένη.

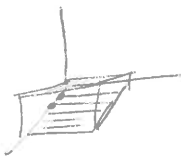
και $\left.\begin{array}{l}\mathcal{U}\leq U(f,P_0)\\ \mathcal{L}\geq L(f,P_0)\end{array}\right\}\Rightarrow \mathcal{U}-\mathcal{L}\leq U(f,P_0)-L(f,P_0)<\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0.$

Όμως $\left.\begin{array}{l}\mathcal{U}-\mathcal{L}\geq 0\\ \text{και } \mathcal{U}-\mathcal{L}<\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0\end{array}\right\}\ \mathcal{U}-\mathcal{L}=0 \Rightarrow f$ ολοκλ.

$\square$



Παραδείγματα:



① $f(x,y)=x.\qquad \Pi=[0,1]\times[0,1].$

P_k με φ: $\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right]\times[0,1] \qquad i=1,\dots k.$

$$L(f,P_k)=\sum_i m_i \operatorname{Vol}(\varphi_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{k}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{k^2}\cdot\sum_{i=1}^{k}(i-1)=\frac{k(k-1)}{2k^2}$$

$$U(f,P_k)=\sum_i M_i \operatorname{Vol}(\varphi_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{k^2}\cdot\sum_{i=1}^{k}i=\frac{k(k+1)}{2k^2}$$

άρα $\sup\{L(f,P_k)\mid k\in\mathbb{N}\}=\lim\limits_{k\to\infty}(L(f,P_k))=\frac{1}{2}\leq\mathcal{L}$

$\inf\{U(f,P_k)\mid k\in\mathbb{N}\}=\lim\limits_{k\to\infty}(U(f,P_k))=\frac{1}{2}\geq\mathcal{U}$

$\therefore\ \mathcal{L}=\mathcal{U}=\frac{1}{2}$ αφού $\mathcal{L}\leq\mathcal{U}$

(2) $f(x,y,z)= \begin{cases} 1 & y\in\mathbb{Q} \\ 0 & y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

P διαμ. του $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ σε υπορθογώνια Q.

$m_Q(f)=0 \quad \forall Q$ (ύπαρξη $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ σε οποιοδήποτε υποδιάστημα του $[0,1]$ - πυκνό

$M_Q(f)=1 \quad \forall Q$ — " — $y\in\mathbb{Q}$ — " —

πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ & $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$!

$\therefore \left.\begin{array}{ll} L(f,P)=0 \quad \forall P \Rightarrow \mathcal{L}=0 \\ U(f,P)=1 \quad \forall P \Rightarrow \mathcal{U}=1.\end{array}\right\}$ f δεν είναι ολοκλ. στο Π

(3) Η συνάρτηση $f=1$ σε ορθογώνιο $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ είναι ολοκληρώσιμη.

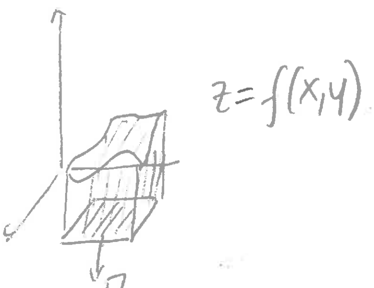
και $\int_\Pi 1 := Vol_n(\Pi)$. n-διάστατος όγκος του Π.

Επίσης $\int_\Pi \lambda = \lambda\cdot Vol_n(\Pi) \quad \forall \lambda\in\mathbb{R}$ σταθερά.

(4) Αν $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ και $f:\Pi\to\mathbb{R}$, $f\geq 0$, Riemann ολοκληρώσιμη.

τότε $\int_\Pi f$ δίνει τον όγκο (εξ ορισμού) του στερεού διάστασης $n+1$.

$T=\{(\vec{x},z)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \vec{x}\in\Pi,\ 0\leq z\leq f(\vec{x})\}$.



• Προς το παρόν δεν έχουμε τεχνικές ολοκλήρωσης για

π.χ. $\int_{[0,1]\times[3,4]} (x^2-y^2)$.

Ιδιότητες Ολοκλήρωσης: Θεώρημα 3:

Έστω $f,g : \Pi \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δύο φραγμένες και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο Π. ~~Και~~

① Η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη στο Π και $\int_\Pi (f+g) = \int_\Pi f + \int_\Pi g$

② $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\int_\Pi \lambda \cdot f = \lambda \cdot \int_\Pi f$

③ Αν $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$ $\forall \vec{x} \in \Pi$ τότε

$$\int_\Pi f \leq \int_\Pi g$$

④ ~~Η~~ $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_\Pi f \leq \int_\Pi |f|$

⑤ Οι $\max(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$, $\min(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$

είναι ολοκληρώσιμες, άρα και $f^+ = \max(f,0)$ $f^- = -\min(f,0)$.

⑥ Η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη $\left[\int_\Pi f \cdot g \neq \int_\Pi f \cdot \int_\Pi g \text{ γενικά}\right]$

Αποδείξεις

① Για κάθε υποορθογώνιο φ διαμέρισης P

$m_\varphi(f) + m_\varphi(g) \leq m_\varphi(f+g)$

$M_\varphi(f) + M_\varphi(g) \geq M_\varphi(f+g)$ (*)

inf f inf g μπορεί να είναι σε διαφορετικά σημεία.

$\therefore \sum_\varphi m_\varphi(f) Vol(\varphi) + \sum_\varphi m_\varphi(g) Vol(\varphi) \leq \sum_\varphi m_\varphi(f+g) Vol(\varphi)$

$\Rightarrow L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P)$ $\forall P$.

$\therefore \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) \leq \mathcal{L}(f+g)$

Παρόμοια από (*) $\mathcal{U}(f+g) \leq \mathcal{U}(f) + \mathcal{U}(g)$

Αφού $\mathcal{U}(f) + \mathcal{U}(g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) \Rightarrow \mathcal{U}(f+g) = \mathcal{L}(f+g) = \int f + \int g$

$\therefore \int f+g = \int f + \int g$. □

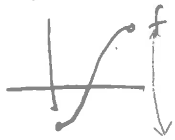
(2) $m_\varphi(\lambda f) = \lambda m_\varphi(f)$, $M_\varphi(\lambda f) = \lambda M_\varphi(f)$ } για $\lambda > 0$

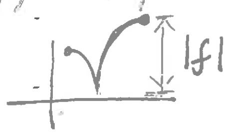
$m_\varphi(\lambda f) = \lambda M_\varphi(f)$, $M_\varphi(\lambda f) = \lambda m_\varphi(f)$ } για $\lambda < 0$.

(3) $M_\varphi(f) \le M_\varphi(g)$ $\forall \varphi$.

(4) $|f|$ ολοκληρώσιμη: $M_\varphi(|f|) - m_\varphi(|f|) \le M_\varphi(f) - m_\varphi(f)$ $\forall \varphi$

(αποδεικνύεται για $f>0$, $f<0$, διακύμανση
η διακύμανση είναι η ίδια ή μικρότερη)





Καταλήγουμε: $U(|f|,P) - L(|f|,P) \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ για κάποιο

$\therefore$ $|f|$ ολοκλ.

Άρα $f \le |f| \xrightarrow{(3)} \int f \le \int |f|$

(5) Από το (4) & (1), (2)

Παρατήρηση $f = f^+ - f^-$. Μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι διαφορά 2 μη-αρνητικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \ge 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & f(x) \le 0 \\ 0 & f(x) > 0 \end{cases}$$

(6) $f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$

Αρκεί ν.δ.ο. f ολοκλ. $\to f^2$ ολοκλ.

* <u>Λήμμα:</u> f φραγμένη στο Q, τότε

$$\sup_{x,y\in Q} |f(x)-f(y)| = \sup_Q f - \inf_Q f$$

• "Απόδειξη": $|f(x)-f(y)| \underset{\uparrow}{=} f(x)-f(y) \leq \sup_Q f - \inf_Q f$

χωρίς απώλεια γενικότητας

$\{x_i\}$ με $f(x_i) \to \sup f$

$\{y_j\}$ με $f(y_j) \to \inf f$

---

f^2 ολοκλ:

$$\sum_{Q\in P} \left(M_Q(f^2) - m_Q(f^2)\right) \mathrm{Vol}_n(Q) \overset{?}{<} \varepsilon$$

Για $x,y\in Q$ $\quad |f^2(x)-f^2(y)| = |f(x)+f(y)|\,|f(x)-f(y)|$

$$\leq \left(|f(x)|+|f(y)|\right) |f(x)-f(y)|$$

$$\leq 2\sup_Q|f| \cdot \left(\sup_Q f - \inf_Q f\right)$$

$$\therefore\ M_Q(f^2) - m_Q(f^2) \overset{\text{Λήμμα}}{=} \sup_{x,y\in Q} |f^2(x) - f^2(y)| \leq 2\sup_Q|f| \cdot \left(M_Q(f) - m_Q(f)\right)$$

$$\therefore\ U(f^2,P) - L(f^2,P) \leq \underbrace{2\sup_Q|f|}_{\leq M.} \cdot \left(U(f,P) - L(f,P)\right)$$

Για $\varepsilon>0$ $\exists P_0(\varepsilon)$ τ.ω $U(f,P_0) - L(f,P_0) < \frac{\varepsilon}{2M}$ από Κρ. Ολ. Riem.

$\therefore\ U(f^2,P_0) - L(f^2,P_0) < \varepsilon \quad \therefore f^2$ ολοκλ.

$\square$