Τοπολογία

Ενδιάμεσο Διάλεξη 6-7.

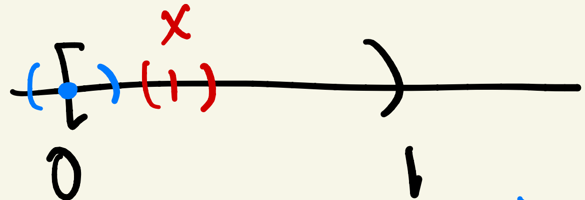
$A\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό αν $\forall \vec{x}\in A$ $\exists\, \varepsilon(\vec{x})>0$ τ.ω. $B(\vec{x},\varepsilon(\vec{x}))\subset A$

<u>**Ορισμός:**</u> Ένα σημείο $\vec{x}\in A\subset\mathbb{R}^n$ ονομάζεται <u>εσωτερικό σημείο του A</u> αν υπάρχει $\delta>0$ τ.ω. $B(\vec{x},\delta)\subset A$

Το σύνολο των εσωτερικών σημείων ενός συνόλου A ονομάζεται <u>εσωτερικό</u> του A και συμβολίζεται $\mathring{A}$ ή $\mathrm{int}(A)$

- $\mathrm{int}(A)\subset A$ εξ' ορισμού.

<u>Παρ.</u> ① $A=[0,1)\subset\mathbb{R}$ $\mathrm{int}(A)=(0,1)$

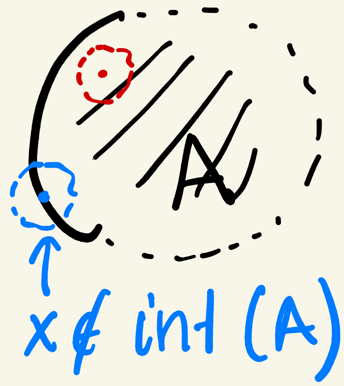


Για $x>0$

$\delta=\min\{x,1-\varepsilon\}$.

Αν $x=0$ $B(0,\varepsilon)\not\subset[0,1)$ $\forall\varepsilon$.

2



Πρόταση: 1. $int(A) \subset A$

2. $int(A)$ είναι ανοικτό και

3. $int(A)$ είναι το μέγιστο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A.

Απόδειξη:

1. Εξ ορισμού αφού αν $x \in int(A)$ $\exists \delta > 0$ με $B(x,\delta) \subset A \Rightarrow x \in A$.

2. Έστω $int(A) \neq \emptyset$ και $x \in int(A)$.
Τότε $\exists \delta > 0$ τ.ω. $B(x,\delta) \subset A$.
Αρκεί ν.δ.ο. $B(x,\delta) \subset int(A)$
$B(x,\delta)$ ανοικτό. άρα αν $y \in B(x,\delta)$ τότε

$\exists\, \varepsilon(y) > 0$ με $B(y, \varepsilon(y)) \subset B(x,\delta) \subset A$

Άρα $y \in int(A) \Rightarrow B(x,\delta) \subset int(A)$

$\therefore$ $int(A)$ ανοικτό.

3. Αν U ανοικτό και $U \subset A$ ν.δ.ο. $U \subset int(A)$

Έστω $x \in U$. Αφού U ανοικτό $\Rightarrow \exists\, \varepsilon(x) > 0$ τ.ω. $B(x, \varepsilon(x)) \subset U \subset A$

$\Rightarrow$ x εσωτ. σημείο του A

$\Rightarrow x \in int(A)$

$\therefore$ $U \subset int(A)$ $\square$

Παρ. (3) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: $int(\mathbb{Q}) = \emptyset$

(4) $\overline{B(\vec{x}, R)} = \{\vec{y} \mid d(\vec{x}, \vec{y}) \leq R\} = A$

$int(A) = B(\vec{x}, R) = \{\vec{y} \mid d(\vec{x}, \vec{y}) < R\}$

Ορισμός Ένα σημείο $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **σημείο επαφής** αν $\forall \delta > 0$ $B(\vec{x}, \delta) \cap A \neq \emptyset$

Το σύνολο των σημείων επαφής του A ονομάζεται **κλειστότητα του A** και συμβολίζεται $\bar{A}$.

Παρ. ① $A = [0,1) \subset \mathbb{R}$

$\bar{A} = [0,1]$

② $A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

$\bar{A} = A \cup \{0\}$

③ $A = B(\vec{x}, R)$ τότε

$\bar{A} = \overline{B(\vec{x}, R)} = \{ \vec{y} \mid d(\vec{x}, \vec{y}) \leq R \}$

Πρόταση: 1. $K \subset \overline{K}$

2. $\overline{K}$ είναι κλειστό και

3. $\overline{K}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το K.

Απόδειξη. 1. Εξ ορισμού

2. $\overline{K}$ κλειστό αν $(\overline{K})^c$ ανοικτό

Έστω $x \in (\overline{K})^c$. Θέλουμε να βρούμε ανοικτή μπάλα του στο $(\overline{K})^c$.

$x \in (\overline{K})^c \Rightarrow x \notin \overline{K} \Rightarrow \exists \delta > 0$ τ.ω.

$B(x, \delta) \cap K = \emptyset$.

$B(x,\delta)$ ανοικτό άρα και για κάθε $y \in B(x, \delta)$ υπάρχει $B(y, \varepsilon(y)) \subset B(x, \delta)$

$\therefore B(y, \varepsilon(y)) \cap K = \emptyset \quad \therefore y \in (\overline{K})^c$

$\therefore B(x, \delta) \subset (\overline{K})^c$

3. Έστω W κλειστό με $W \supset K$.

Έστω $x \in \overline{K}$. Αν $x \notin W \Rightarrow x \in W^c$ ανοικτό και άρα $\exists B(x,\delta)$ με $B(x,\delta) \cap W = \emptyset$

$K \subset W$. Αφού $B(x,\delta) \cap W = \emptyset$ τότε και

$$B(x,\delta) \cap K = \emptyset \quad \therefore \quad x \notin \overline{K} \quad \rightarrow\leftarrow$$

Άρα $x \in W$ $\therefore$ $\overline{K} \subset W$.

$\square$.

<u>Πρόταση</u>: 1. A ανοικτό ανν. $A = \mathrm{int}(A)$

2. K κλειστό ανν $K = \overline{K}$

1. Αν $A = \mathrm{int}(A) \Rightarrow A$ ανοικτό

Αν A ανοικτό αρκεί ν.δ.ο. $A \subset \mathrm{int}(A)$ αφού $\mathrm{int}(A) \subset A$.

$\mathrm{int}(A)$: το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του A και $A \subset A$ $\therefore$ $A \subset \mathrm{int}(A)$ αφού A ανοικτό.

2. Αν $K = \overline{K} \Rightarrow K$ κλειστό

Αν K κλειστό, αφού $K \supset K$ και $\overline{K}$ το μικρότερο κλειστό που περιέχει το $K \Rightarrow \overline{K} \subset K$

Αφού $K \subset \overline{K} \Rightarrow K = \overline{K}$ $\square$.

Ιδιότητες:

Πρόταση: 1. $(\overline{A})^c = \text{int}(A^c)$

(Επομένως $\overline{A}$ κλειστό)

2. $(\text{int}(A))^c = \overline{A^c}$

3. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$

Απόδειξη:

1. Αν $x \in (\overline{A})^c \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \delta$ τ.ω. $B(x,\delta) \cap A = \emptyset$ (ορισμός $\overline{A}$)

$\Leftrightarrow x \in A^c$ και $\exists \delta$ τ.ω. $B(x,\delta) \subset A^c$

$\Leftrightarrow x \in \text{int}(A^c)$ (ορισμός $\text{int}(A^c)$)

2. Έστω $x \in (\text{int}(A))^c \Leftrightarrow x \notin \text{int}(A)$

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad B(x,\delta) \not\subset A$ (δεν ικανοποιείται ορισμός $\text{int}(A)$)

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad B(x,\delta) \cap A^c \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A^c}$ (ορισμός κλειστότητας)

3. $x \in \partial A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

και $B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A}$ και $x \in \overline{A^c} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{A^c}$

$\therefore \partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

Από 2: $\overline{A^c} = (\mathrm{int}(A))^c$

$\therefore \partial A = \overline{A} \cap (\mathrm{int}(A))^c = \{x \mid x \in \overline{A}$ αλλά $x \notin \mathrm{int}(A)\}$

$= \overline{A} \setminus (\mathrm{int}(A))$

$\square$