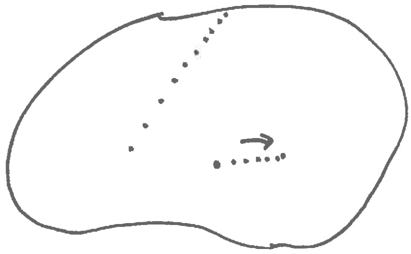
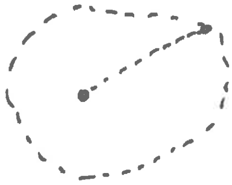
<u>Πρόταση 4.</u> Αν $K \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό και $(\vec{x}_k)$ μια ακολουθία από σημεία του K η οποία συγκλίνει, τότε το όριο της ακολουθίας, $\vec{x}$, ανήκει στο K.





όχι στα ανοικτά

<u>Απόδειξη</u> (Άτοπο απαγωγή.)

Αν $\vec{x} \notin K \Rightarrow \vec{x} \in K^c$.

K κλειστό. άρα K^c ανοικτό $\Rightarrow \exists \varepsilon(x)$ τ.ω. $B(\vec{x}, \varepsilon) \subset K^c$.

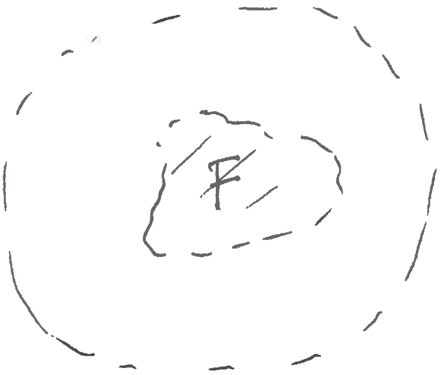
δηλαδή $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap K = \emptyset$.

$(\vec{x}_k) \to \vec{x}$ άρα για το $\varepsilon(\vec{x})$ υπάρχει N τ.ω. $\forall k > N$.

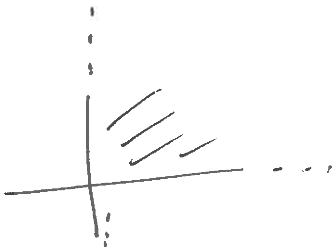
$d(\vec{x}_k, \vec{x}) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \vec{x}_k \in B(\vec{x}, \varepsilon)$ αφού $\vec{x}_k \in K$. $\rightarrow\leftarrow$

$\square$.

<u>Ορισμός</u>: Ένα σύνολο $F \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται <u>φραγμένο</u> αν $\exists R > 0$ τ.ω. $F \subset B(\vec{0}, R)$.



<u>Παρ.</u> $F = \{(x,y)\ x>0, y>0\}$ μη-φραγμένο



$F = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ μη-φραγμένο.

Θεώρημα 5 (Bolzano - Weierstrass)

Έστω $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μια φραγμένη ακολουθία σημείων του $\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(\vec{x}_{k_m})_m$ της $(\vec{x}_k)$ η οποία συγκλίνει.

Απόδειξη Παρατήρηση: Για $n=1$ ισχύει από Λημ. 1.

$|x_{k,j}| \leq \|\vec{x}_k\| \leq R$ $\forall k$, αφού $(\vec{x}_k)$ φραγμένη.

$\therefore$ $|x_{k,j}|$ φραγμένη στο $\mathbb{R}$ $\forall j=1,\dots,n$.

$(x_{k,1})$: μια φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ $(j=1)$.
Από B-W στο $\mathbb{R}$ υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_{m^1},1})$ που συγκλίνει στο x_1 όταν $m^1 \to \infty$.

. Βλέπουμε την $(x_{k_{m^1},1}, x_{k_{m^1},2}, \dots, x_{k_{m^1},n})$
(υπακολουθία της $(\vec{x}_k)$ με $(x_{k_{m^1},1}) \to x_1$).

Η $(x_{k_{m^1},2})$ είναι επίσης φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και άρα έχει υπακολουθία $(x_{k_{m^2},2}) \to x_2$ όταν $m^2 \to \infty$.

. Βλέπουμε την $(x_{k_{m^2},1}, x_{k_{m^2},2}, \dots, x_{k_{m^2},n})$
Παίρνουμε υπακολουθία $(x_{k_{m^3},3}) \to x_3$ της $(x_{k_{m^2},3})$

και συνεχίζουμε επαγωγικά, παίρνοντας υπακολουθία της $(x_{k_{m^{n-1}},n})$, την $(x_{k_{m^n},n}) \to x_n$.

Η $(x_{k_{m^n},j})$ είναι υπακολουθία της $(x_{k_{m^j},j})$ που συγκλίνει στο x_j. Άρα $(x_{k_{m^n},j}) \to x_j$

$\therefore\ (x_{k_{m^n},1}, x_{k_{m^n},2}, \ldots x_{k_{m^n},n})$ υπακολ. της $(\vec{x_k})$

που συγκλίνει στο $(x_1, \ldots, x_n)$.

QED.

<u>Ορισμός</u>. Ένα φραγμένο υποσύνολο C του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται <u>συμπαγές</u> αν κάθε ακολουθία στο C έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, της οποίας το όριο ανήκει στο C.

<u>Θεώρημα 6</u> (Ιδιότητα Heine-Borel) Ένα υποσύνολο C του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές ανν είναι κλειστό και φραγμένο.

<u>Απόδειξη</u>

$(\Leftarrow)$ Έστω C κλειστό και φραγμένο

και $(\vec{x_k})$ ακολουθία στο C, άρα φραγμένη.

Από B-W. $\exists (\vec{x_{k_m}})$ υπακολουθία που συγκλίνει στο $\vec{x}$.

Από Πρόταση 4 $\vec{x} \in C$.

Άρα C συμπαγή εξ ορισμού.

$(\Rightarrow)$ Φραγμένο $\checkmark$ ν.δ.ο. κλειστό. $\Leftrightarrow C^c$ ανοικτό

Αν C^c μη-ανοικτό,

τότε υπάρχει $\vec{x} \in C^c$ τ.ω. $\forall k \in \mathbb{N}\ B(\vec{x}, \frac{1}{k}) \cap C^c \neq \emptyset$

δηλαδή $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \vec{x_k} \in B(\vec{x}, \frac{1}{k})$ και $\vec{x_k} \notin C^c \Leftrightarrow \vec{x_k} \in C$.

$\therefore\ d(\vec{x}, \vec{x_k}) \leq \frac{1}{k}$ και $\vec{x_k} \in C$.

$\therefore\ (\vec{x_k}) \to \vec{x}$, $\vec{x_k} \in C$ και $\vec{x} \in C^c$.

C συμπαγές όμως, άρα το όριο $\vec{x} \in C$. $\rightarrow\leftarrow$

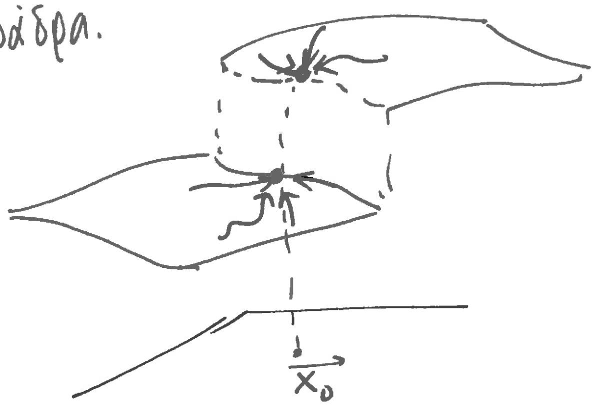
QED.

Όρια Συναρτήσεων:

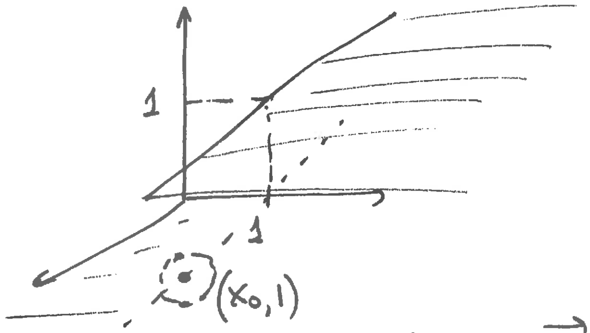
$\mathbb{R}$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$

Στο $\mathbb{R}^n$ υπάρχουν άπειρες διαδρομές για να πάμε στο $\vec{x_0}$.

π.χ. χαράδρα.



$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & y \geq 1 \\ 0 & y < 1 \end{cases}$$



Όλες οι διαδρομές περιέχονται σε μπάλα γύρω από το $\vec{x_0}$.

Ορισμός: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\vec{x_0} \in A$ και $A \setminus \{\vec{x_0}\} \subset D_f$ ($D_f \equiv$ π.ο. της f)

Λέμε ότι <u>η f έχει όριο L καθώς το $\vec{x}$ τείνει στο $\vec{x_0}$</u> αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω. όταν $0 < \|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \delta(\varepsilon)$ τότε $|f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$.

Γράφουμε $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) = L$ ή $f(\vec{x}) \to L$ όταν $\vec{x} \to \vec{x_0}$.

<u>Ορισμός</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό $A \subset D_f$.
Η f είναι <u>συνεχής στο σημείο $\vec{x_0} \in A$</u>, αν

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = f(\vec{x_0}).$$

Δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon, \vec{x_0}) > 0$ τ.ω. όταν $\|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \delta$ τότε $|f(\vec{x}) - f(\vec{x_0})| < \varepsilon$.

Η f είναι <u>συνεχής στο A</u> αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

Άσκηση: Αν $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = L_1$ και $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = L_2$ τότε $L_1 = L_2$
(μοναδικότητα ορίου όπως στο $\mathbb{R}$).

<u>Παραδείγματα.</u>

① $f(x,y) = x^2 + 5y$.

$$\lim_{(x,y) \to (1,2)} f(x,y) = 11.$$

Έστω $\varepsilon > 0$ θέλουμε $\delta > 0$ τ.ω. αν $\|(x,y) - (1,2)\| < \delta$
($\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$).

$$|f(x,y) - 11| = |x^2 + 5y - 11| = |x^2 - 1 + 5y - 10| \leq |x-1||x+1| + 5|y-2|$$

Για $\delta \leq 1$ $|x-1| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \leq 1 \Rightarrow |x+1| = |x-1+2| \leq |x-1| + 2 \leq 3$.

Για $\|(x,y) - (1,2)\| < \delta \Rightarrow |x-1|, |y-2| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$

$\therefore |f(x,y) - 11| \leq 3|x-1| + 5|y-2| \leq 3\delta + 5\delta = 8\delta$

Για $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{8}\}$, αν $\|(x,y) - (1,2)\| < \delta$
τότε $|f(x,y) - 11| < \varepsilon$.

② $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad (x,y)\neq(0,0)$.

Δείξετε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f = 0$.

$$\cancel{|f(x,y)-0| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^3}}$$

Έστω $\varepsilon>0$ θέλω δ τ.ω. αν $\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$ $\left(\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}<\delta\right)$

τότε $|f(x,y)-0|<\varepsilon$.

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}$$

Παρατήρηση: $|x|,|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

Άρα $|f(x,y)-0| \leq \dfrac{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}$

Για $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, όταν $\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$ τότε $|f(x,y)-0|<\varepsilon$.

Παραδείγματα:

① Έστω $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-\sin^3 y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{στο } (0,0)\end{cases}$

Υπάρχει τιμή $\alpha\in\mathbb{R}$ τ.ω. f συνεχής στο $(0,0)$;

$$\left|\frac{x^3-\sin^3 y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|^3+|\sin^3 y|}{x^2+y^2} = (*)$$

$$\left.\begin{array}{l}|\sin y|\le |y| \quad \forall y\in\mathbb{R}\\ |x|,\ |y|\le\sqrt{x^2+y^2}\end{array}\right\} \therefore (*) \le \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\cdot 2}{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

Για $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ όταν $\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, τότε $|f(x,y)-0|<\varepsilon$.

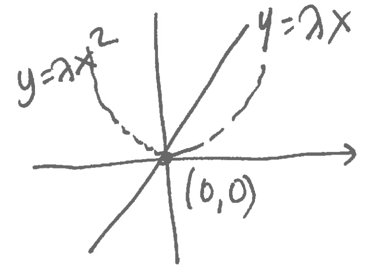
Αν $\alpha=f(0,0)=0$ τότε η f συνεχής στο $(0,0)$

---

② $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ $\qquad \left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1 \not< \varepsilon$. όριο 1 ?

$$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}-1\right| = \frac{y^2}{x^2+y^2}\le 1 \quad ??$$

Για να ορίζεται το όριο πρέπει να είναι το ίδιο σε όλα τα μονοπάτια που οδηγούν στο $(0,0)$.



Απλά μονοπάτια από το $(0,0)$:
$y=0$, $x=0$, $y=\lambda x$ για λ σταθερά
$y=\lambda x^2$

Δοκιμάζουμε: $\underset{(y\neq 0)}{x=0}$ $\quad f(0,y)=\dfrac{0}{y^2}=0 \quad \therefore \lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=0$

$\underset{(x\neq 0)}{y=0}$ $\quad f(x,0)=\dfrac{x^2}{x^2}=1 \quad \therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=1$

Διαφορετικά όρια σε διαφορετική καμπύλη που οδηγούν στο $(0,0)$
$\therefore$ το όριο δεν ορίζεται.

③ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\quad |f| \le \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$

$x=0$ $\quad f(0,y)=0$ $\quad \lim_{y\to 0} f(0,y)=0$

$y=0$ $\quad f(x,0)=0$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x,0)=0$

$y=\lambda x$ $\quad f(x,\lambda x) = \frac{\lambda x^2}{x^2+\lambda^2 \cdot x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$ εξαρτάται από λ.

Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ Δ.Ο. αφού παίρνει διαφορετικές τιμές σε διαφορετικές καμπύλες που οδηγούν στο $(0,0)$.

④ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ $\quad y=\lambda x$ $\quad f(x,\lambda x) = \frac{x^2 \cdot \lambda x}{(1+\lambda^2)\, x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\, x \to 0 \ldots\ldots$ $\forall \lambda$.

Χρειάζεται απόδειξη με ε-δ για να δείξουμε ύπαρξη.

$|f(x,y) - 0| \le \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2 \cdot \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad$ αφού $|x|, |y| \le \sqrt{x^2+y^2}$

Άρα για $\delta=\varepsilon$ όταν $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

τότε $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$.

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f = 0$.

Η f έχει συνεχή επέκταση στο $(0,0)$ αν ορισθεί ως $f(0,0)=0$.

(5) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4+y^4}$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \quad \therefore \quad \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \sim \frac{x^4}{4!}$$

$$f \sim \frac{\frac{x^4}{4!}}{x^4+y^4} \qquad \begin{array}{l} x=0: \quad f=0 \\ y=0: \quad f=\frac{1}{4!} \end{array}$$ Αναμένουμε ότι Δ.Ο.

$$f(0,y) = \frac{0}{y^4} = 0 \quad \therefore \quad \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$$

$$f(x,0) = \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} \qquad \lim_{x\to 0} f(x,0) \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L.H.}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x}{4x^3} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{LH}{=}} \lim \frac{-\cos x + 1}{12x^2}$$

$$\underset{\frac{0}{0}}{\overset{L.H.}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{24x} = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!}$$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f$ Δ.Ο. αφού παίρνει διαφορετικές τιμές σε διαφορετικές καμπύλες που οδηγούν στο $(0,0)$.

(6) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^6} \cdot e^{-y^2/x^6}$$ ($x\neq 0$, δηλαδή βλέπουμε τα (x,y) τ.ω. $\|(x,y)\|<\delta$ και $(x,y)\in D_f$).

$\left.\begin{array}{l} y=\lambda x \\ x=\lambda y \end{array}\right\}$ όχι αρκεί

$y=\lambda x^3$, $x\neq 0$: $$f(x,\lambda x^3) = \frac{\lambda^2 \cdot x^6}{x^6} \cdot e^{-\lambda^2 \cdot x^6/x^6} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda^2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x,\lambda x^3) = \lambda^2 e^{-\lambda^2}$$ εξαρτάται από λ.

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f$ Δ.Ο. αφού παίρνει διαφορετική τιμή σε διαφορετική καμπύλη που οδηγούν στο $(0,0)$.

Η συνέχεια με ακολουθίες:

Πρόταση 7 Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in A$ και $f: A \setminus \{\vec{x}_0\} \to \mathbb{R}$.

1. $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$ ανν για κάθε ακολουθία $(\vec{x}_k)$ στο $A \setminus \{\vec{x}_0\}$ με $(\vec{x}_k) \to \vec{x}_0$ τότε $f(\vec{x}_k) \to L$.

2. Αν $\vec{x}_0$ στο π.ο. της f τότε η f είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$ ανν για κάθε ακολουθία $(\vec{x}_k)$ στο $A \setminus \{\vec{x}_0\}$ με $(\vec{x}_k) \to \vec{x}_0$ τότε $f(\vec{x}_k) \to f(\vec{x}_0)$.

Παράδειγμα: $f(x,y) = \sin\frac{1}{xy}$ $\quad x \neq 0,\ y \neq 0$.

$$\frac{1}{xy} = 2\pi k \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2\pi k} \qquad x_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \quad y_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$$

$$\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) = (0,0) \qquad \lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = 0$$

$$\frac{1}{xy} = 2\pi k + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} \qquad x_k = \frac{1}{\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right)^{1/3}} \quad y_k = \frac{1}{\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right)^{2/3}}$$

$$\lim(x_k, y_k) = (0,0) \qquad \lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = 1$$

Η f τείνει σε διαφορετικό όριο πάνω σε διαφορετικές ακολουθίες που τείνουν στο $(0,0)$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f$ Δ.Ο.

Συνεχή Διανυσματικών Συναρτήσεων.

Ορισμός: Μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (A ανοικτό) είναι συνεχής στο $\vec{x}_0 \in A$ αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon, \vec{x}_0)$ τ.ω. όταν $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n < \delta$ τότε $\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\|_m < \varepsilon$.

Παράδειγμα: Μια γραμμική συνάρτηση $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής.

Από Γραμμική άλγεβρα. $\exists$ $m \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$

τ.ω. $$L(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$L(\vec{x}) = (L_1(\vec{x}), \ldots, L_m(\vec{x}))$$

όπου $$L_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$\|L(\vec{x}) - L(\vec{x}_0)\|_m = \|L(\vec{x} - \vec{x}_0)\|_m \quad \text{(γραμμική)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(L_i(\vec{x} - \vec{x}_0)\right)^2}$$

$$|L_i(\vec{x} - \vec{x}_0)| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_{0,j})\right| \le \left(\max_j |a_{ij}|\right) \cdot \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_{0,j}|$$

$$\le \max_j |a_{ij}| \sqrt{n} \, \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n$$

$$\therefore \|L(\vec{x}) - L(\vec{x}_0)\|_m \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\max_j |a_{ij}|\right)^2 n \, \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n^2}$$

$$\le \overbrace{\sqrt{m}\sqrt{n} \max_{i,j} |a_{ij}|}^{M} \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n \qquad \text{Έστω } \delta = \frac{\varepsilon}{M}.$$

<u>Πρόταση 8</u> Μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{f}: A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής στο $\vec{x}_0\in A$ αν οι συνιστώσες συναρτήσεις $f_1, f_2, \dots, f_m : A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $\vec{x}_0$.

Απόδειξη ίδια με Πρόταση 1.

<u>Ιδιότητες Συνεχών Συναρτήσεων:</u>

<u>Πρόταση 9</u>: (α) Έστω $\vec{f}, \vec{g}: A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ δύο διανυσματικές συναρτήσεις, συνεχείς στο A.

Τότε: (i) $\vec{f}+c\vec{g}$ είναι συνεχής στο A $\forall c\in\mathbb{R}$

(ii) Για $m=1$: $f\cdot g$ είναι συνεχής στο A

και f/g -"-

όταν $g(\vec{x})\neq 0$ στο A. ~~[illegible]~~

(β) Αν $\vec{f}: A\subset\mathbb{R}^n \to B\subset\mathbb{R}^m$

$\vec{g}: B\subset\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ A, B ανοικτά.

και $\vec{f}$ συνεχής στο $\vec{x}_0$ και $\vec{g}$ συνεχής στο $\vec{f}(\vec{x}_0)\in B$ τότε η $\vec{g}\circ\vec{f}$ είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$.

Αποδείξεις όπως στο $\mathbb{R}$. $|x-y|$ & $|f(x)-f(y)|$ αντικαθιστώνται με $\| \ \|_n$ $\| \ \|_m$ $\| \ \|_k$.