# Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ : Βαθμωτή συνάρτηση πολλών μεταβλητών.
Έχει π.ο. υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και π.τ. στο $\mathbb{R}$.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Παραδείγματα:

① $f(x) = x^2 + \sin x$

② $f(x,y) = x^2 + \sqrt{x^2+y^2} + \cos(xy)$
$\left(f(x_1,x_2) = x_1^2 + \sqrt{x_1^2+x_2^2} + \cos(x_1 \cdot x_2)\right)$

③ $f(x,y) = 10$

④ $f(x,y) = y^2$

⑤ Η θερμοκρασία σε ένα τρισδιάστατο αντικείμενο
$T(x,y,z) = \dots$

⑥ Το εισόδημα ως προς ηλικία: $x$, εκπαίδευση: $y$, χώρα: $z$
$I(x,y,z) = \dots$

⑦ $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

⑧ $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + \sqrt{x_2 x_3} + x_n^5$

$\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, διανυσματική συνάρτηση με
π.ο. στο $\mathbb{R}^n$ και π.τ. στο $\mathbb{R}^m$.

$\vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\right)$
όπου $f_1, \dots, f_m$ βαθμωτές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^n$.

Παραδείγματα

① $\vec{f}(t) = (t, t^2, 1+t)$ : διάνυσμα ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t$.

② $\vec{f}(x,y) = (x^2, xe^y, x^4 + \tan(xy))$

Θέλουμε να τις μελετήσουμε ως προς τη συνέχεια

- Να βρούμε τα όριά τους.
- Πώς ορίζεται το όριο στο $\mathbb{R}^n$;
- Πώς παραγωγίζουμε και ποιά η έννοια της παραγωγισιμότητας;
- Πώς ολοκληρώνουμε;

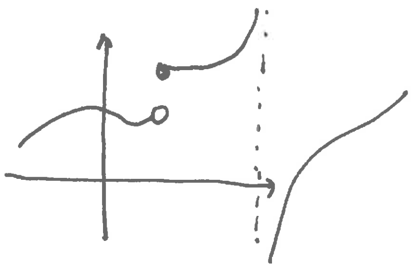
# Γραφική Παράσταση Βαθμωτών Συναρτήσεων:

Γράφημα της $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι το σύνολο $\{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$.

<u>Ορισμός</u>: Για $f(\vec{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, το γράφημα της $f$ είναι το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^{n+1}$

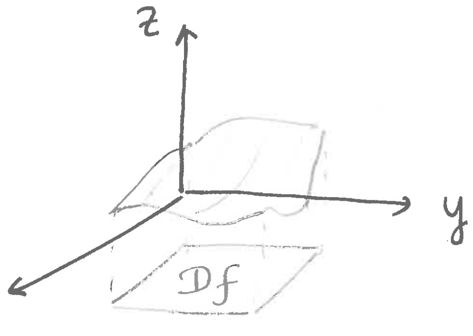
$$\{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in D_f\}.$$

Για $n=1$:



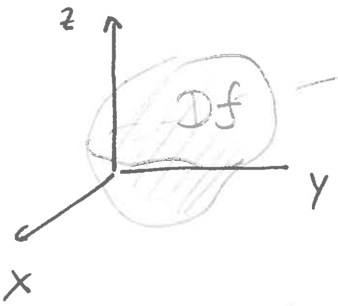
καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ (γενικά)

Για $n=2$:




επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3$

Για $n \geq 3$ - Δύσκολο να σχεδιαστεί




Θέλει $4^η$ διάσταση/άξονα για να αποδωθούν οι τιμές της $f$ σε κάθε $(x, y, z)$.

Χρησιμοποιούμε **Ισοϋψή Σύνολα**

**Ορισμός:** Για $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ το ισοϋψές σύνολο που αντιστοιχεί στην τιμή $c \in \mathbb{R}$, είναι το υποσύνολο του $U$

$U_c = \{ \vec{x} \in U \mid f(\vec{x}) = c \}$.

- Μπορεί να έχει οποιαδήποτε διάσταση $\leq n$.

**Παραδείγματα:** ① $f(x,y) = 2$

$U_2 = \mathbb{R}^2$

$U_c = \emptyset$ για $c \neq 2$

② $f(x,y) = x^2+y^2$

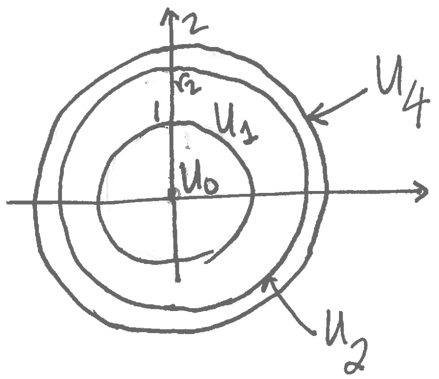
$U_0 = \{(0,0)\}$

$U_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ κύκλος ακτίνας 1

$U_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 2\}$ -"- $\sqrt{2}$

$U_4 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 4\}$ -"- 2

1 εξίσωση, 2 μεταβλητές για κάθε ισοϋψές σύνολο

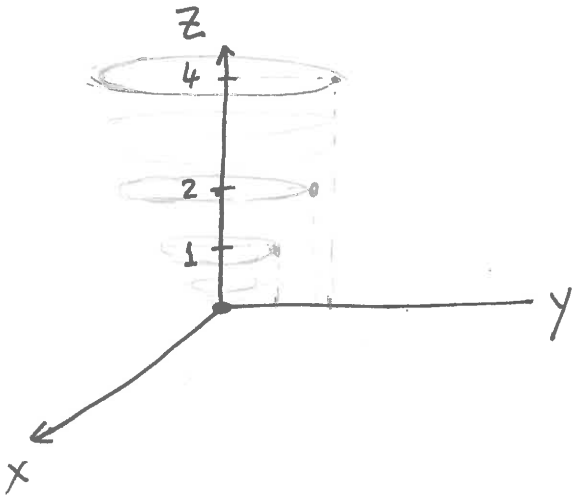



Ισοϋψή σύνολα στο $\mathbb{R}^2$

Γράφημα της $f$:

$c \equiv z$

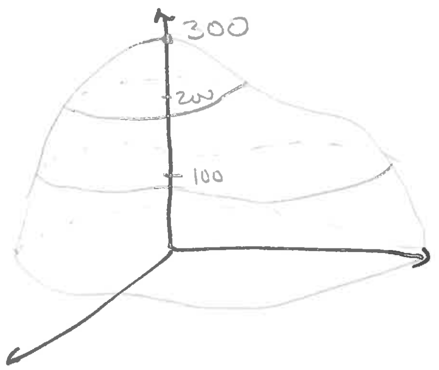
Στο $z = c$ έχουμε κύκλο ακτίνας $\sqrt{c}$ για $c \geq 0$.

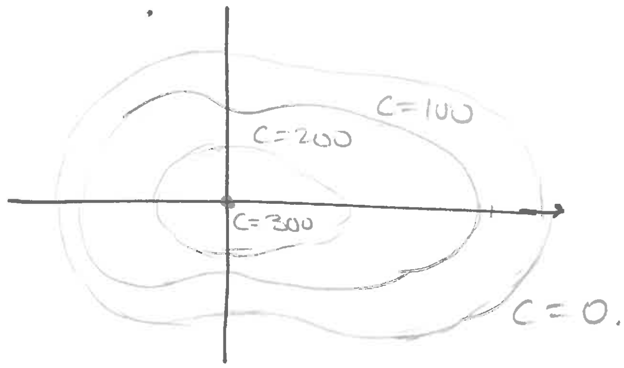


Πώς συνδέονται αναμεταξύ τους; 

• Για $n=2$, τα ισοϋψή επίπεδα είναι οι τομές του γραφήματος της $f$ (επιφάνεια) με οριζόντια επίπεδα - συνήθως παίρνουμε καμπύλη ή σημεία.

Μοιάζουν με τοπογραφικούς χάρτες.



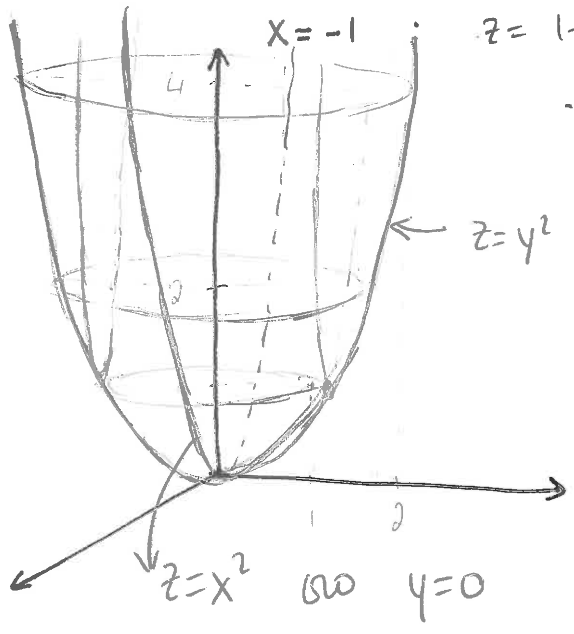

• Τομές με άλλα επίπεδα μας βοηθούν να δούμε τη γραφική παράσταση, π.χ. τομές με άλλα κάθετα επίπεδα.

Για $f(x,y) = x^2+y^2 = z$

Τομή με $x=0$ : $z = y^2$ στο επίπεδο $x=0$ : παραβολή

$y=0$ : $z = x^2$ στο επίπεδο $y=0$ : παραβολή

$x=-1$ : $z = 1+y^2$, $y=+1$ : $z=x^2+1$ : παραβολές.




$z=y^2$ στο $x=0$

"παραβολοειδές"

$z=x^2$ στο $y=0$

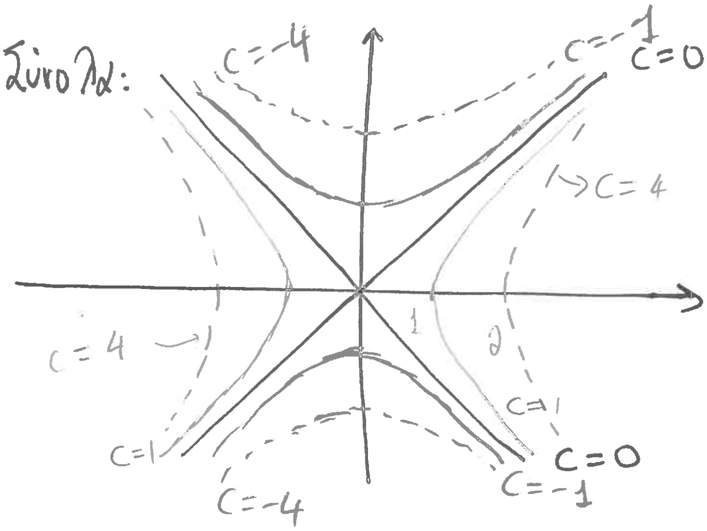
② $f(x,y) = x^2 - y^2$

$c=0$ $\quad y = \pm x$

$c=1$ $\quad y^2 = x^2 - 1$ υπερβολή $(\pm 1, 0)$

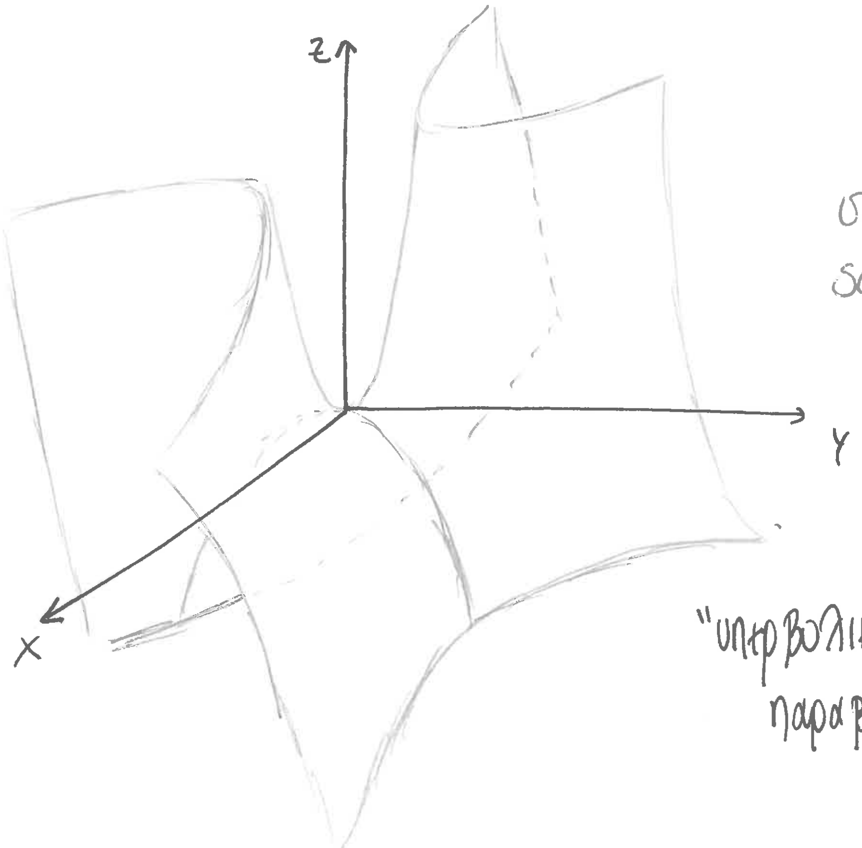
$c=-1$ $\quad y^2 = x^2 + 1$ υπερβολή $(0, \pm 1)$

Ισοϋψή σύνολα:




Άλλες τομές: $x=0 : z = -y^2$ $\quad x = \pm 1 \quad z = 1 - x^2$ } παραβολές

$y = 0 : z = x^2$ $\quad y = \pm 1 \quad z = x^2 - 1$




σέλλα
saddle surface

"υπερβολικό παραβολοειδές

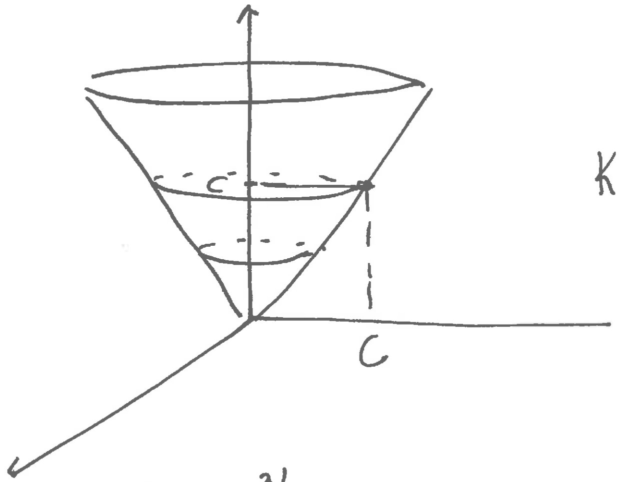
③ $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

Ισοϋψή σύνολα/ Τομές:
$c \geq 0$

$U_c$ = κύκλος ακτίνας $c$, κέντρου $(0,0)$

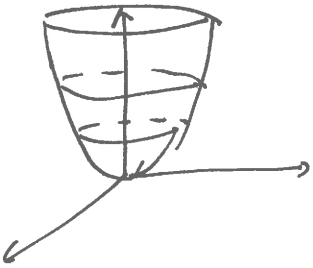
Για $x=0$ $z=|y|$

Για $y=0$ $z=|x|$



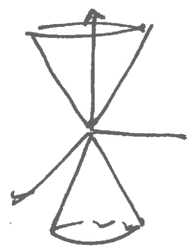

Κώνος.

④ $f(x,y)=(x^2+y^2)^{3/2}$ $y=0$ $z=|x|^3$

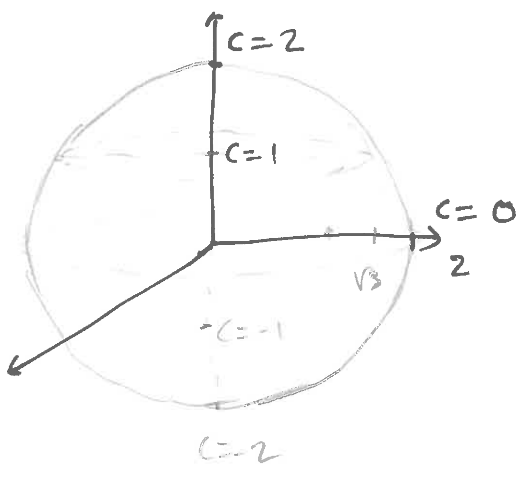


⑤ Συναρτήσεις σε πεπλεγμένη μορφή:

$z^2=x^2+y^2 \Rightarrow z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ : Διπλός κώνος



⑥ $x^2+y^2+z^2=4$ Για $z=c$: $x^2+y^2=4-c^2 \geq 0 \Leftrightarrow |c| \leq 2$.
κύκλος ακτίνας $\sqrt{4-c^2}$




Σφαίρα ακτίνας 2.
(Σφαιρικό κέλυφος)
$x^2+y^2+z^2=4 \Leftrightarrow \|(x,y,z)\|=2$.

⑦ $y^2 = x^2 + z^2$

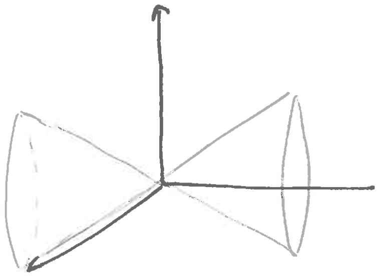
Καλύτερα τομές με $y = c$ για ισοϋψή σύνολα

$y = c$: κύκλο στα $(x, z)$ με κέντρο $(0,0)$ & ακτίνα $c$.

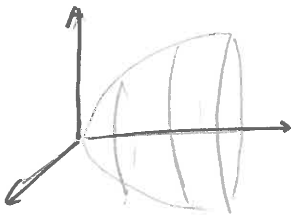
$x = 0$: $y = \pm |z|$

"οριζόντιος" διπλός κώνος.

$z = 0$: $y = \pm |x|$

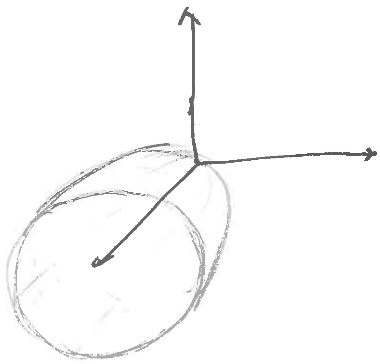


⑧ Παρόμοια: $y = x^2 + z^2$



Παραβολοειδές.

$x = y^2 + z^2$



$n=3$.

① $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ Γράφημα $\subset \mathbb{R}^4$.

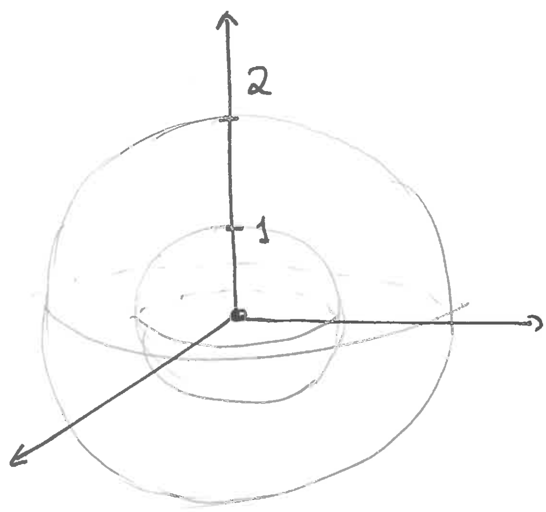
Ισότιμα σύνολα:

Για $c<0$ $U_c = \emptyset$

Για $c=0$ $U_0 = \{(0,0,0)\}$

Για $c>0$ $U_c = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = c\}$ Σφαίρα ακτίνας $\sqrt{c}$.

Ισότιμα Σύνολα:




Άλλη τομή:
για $x=0$: $w = y^2+z^2$
παραβολοειδές.

"Σφαιρικό παραβολοειδές".

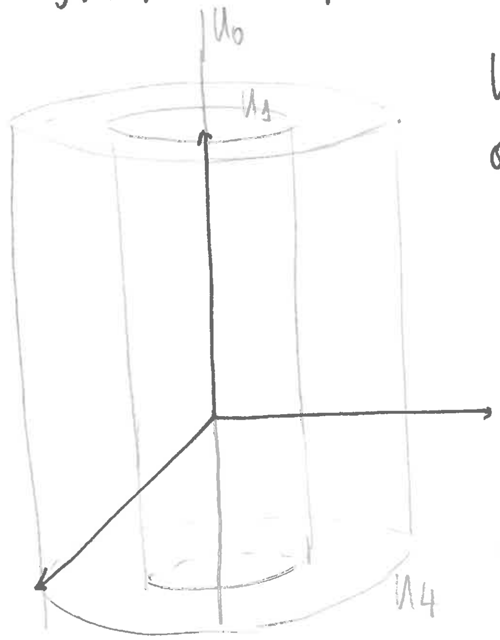
② $f(x,y,z) = x^2+y^2$

$U_0 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=0\} = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

$U_c = \{(x,y,t) \mid x^2+y^2 = c\}$ για $c>0$

σε κάθε $z$ σταθερό, έχουμε κύκλο ακτίνας $\sqrt{c}$

$\therefore$ $U_c$ είναι κύλινδροι.



• Μια εξίσωση 3 μεταβλητών $g(x,y,z)=0$ δίνει επιφάνεια συνήθως (ή καμπύλη, ή σημείο)

• Μια εξίσωση 2 μεταβλητών $h(x,y)=0$ δίνει καμπύλη (ή σημείο).

③ $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

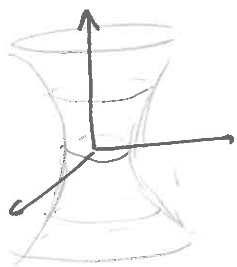
$U_0 = \{(x,y,z) \mid z^2 = x^2+y^2 \iff z = \pm\sqrt{x^2+y^2}\}$ .- διπλός κώνος

$c>0$: $U_c$: $z^2 = x^2+y^2-c \geq 0 \iff \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{c}$

Σε κάθε $z$ σταθερό παίρνουμε κύκλο

Για $x=0$, $y=0$ → υπερβολές.

Συνεκτικό υπερβολοειδές

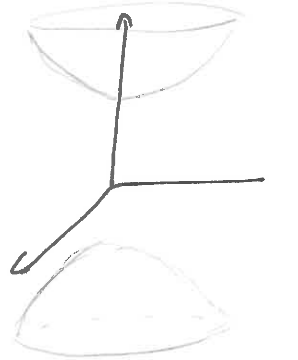


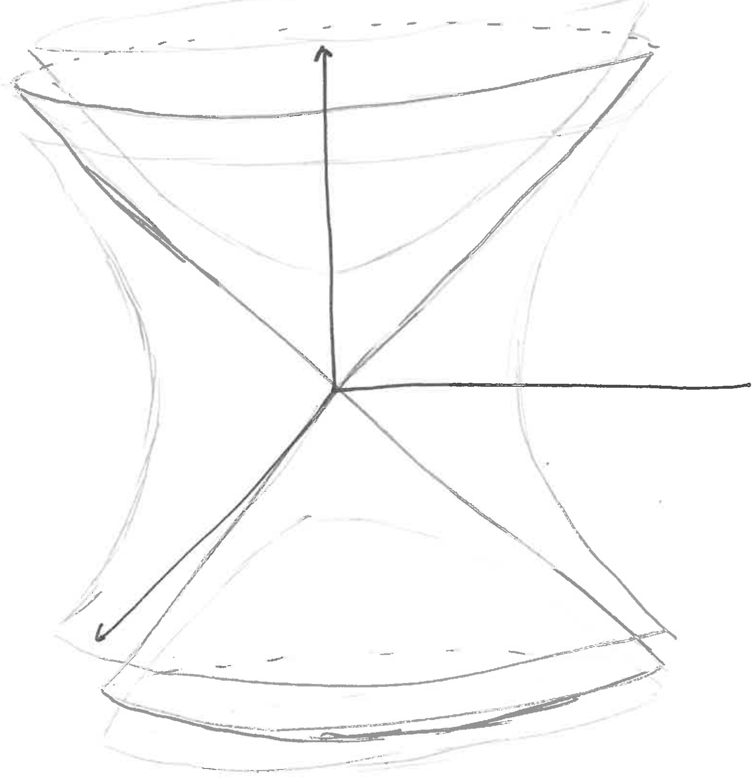
$c<0$ $U_c$: $z^2 = x^2+y^2-c \geq -c > 0 \Rightarrow |z| \geq \sqrt{-c}$

Σε κάθε $z$ σταθερό παίρνουμε κύκλο. (για $|z| \geq \sqrt{-c}$)

Για $x=0$, $y=0$ → υπερβολές

Μη-συνεκτικό υπερβολοειδές





Παρατήρηση:
Τα ισοϋψή σύνολα δεν τέμνονται!

④ $f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ $\quad a,b,c\in\mathbb{R}^+$ σταθερές.

$f=$ σταθερά δίνει ισότιμη επιφάνεια.

π.χ. $f = x^2+y^2+\frac{z^2}{4}$

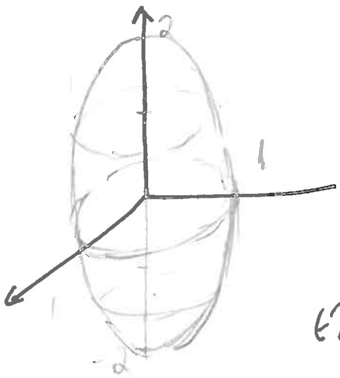
$f=0$: $\{(0,0,0)\}$

$f=1$: $x^2+y^2=1-\frac{z^2}{4}$ για $0\le|z|\le 2$ παίρνουμε κύκλο.
όταν τέμνουμε την επιφάνεια με $z=$ σταθερό:

Για $x=0$: $y^2+\frac{z^2}{4}=1$ έλλειψη

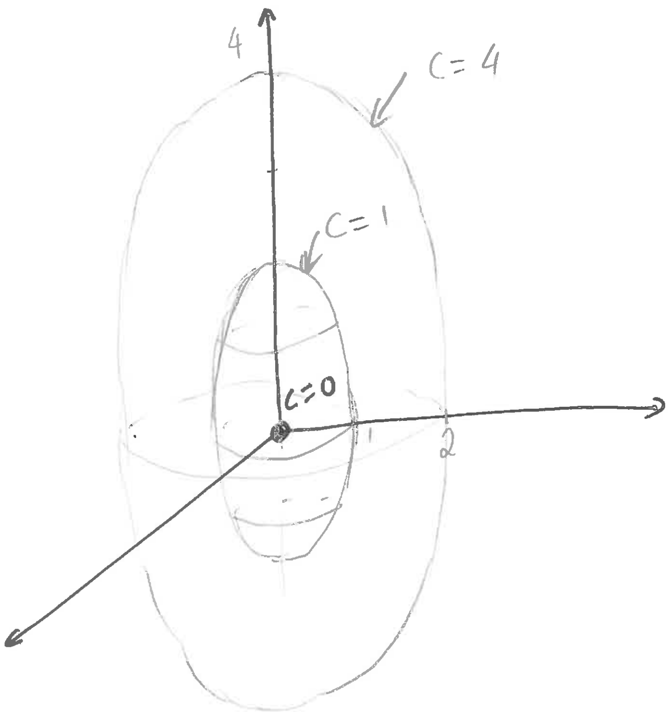
Για $y=0$: $x^2+\frac{z^2}{4}=1$ έλλειψη

$f=1$




ελλειψοειδές.

Ισότιμα σύνολα της $f_i$ είναι ελλειψοειδή με μεταβαλλόμενη διάμετρο:

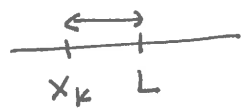


# Όρια και Συνεχή Συναρτήσεων:

## Τοπολογία στο $\mathbb{R}^n$:

Στο $\mathbb{R}$ $\quad \lim_{k\to\infty} x_k = L \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists N>0$ τ.ω. για $k \geq N$

$$|x_k - L| < \varepsilon$$




$|x-y|$: δίνει την απόσταση ανάμεσα σε 2 σημεία στο $\mathbb{R}$. Για να οριστεί το όριο στο $\mathbb{R}^n$ χρειαζόμαστε επίσης την έννοια της απόστασης. έτσι ώστε μια ακολουθία διανυσμάτων (σημείων) $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ να "πλησιάζει" σε ένα άλλο διάνυσμα (σημείο) $\vec{L} \in \mathbb{R}^n$.

**Ορισμός:** Έστω $A$ ένα σύνολο και $d: A \times A \to \mathbb{R}$ τ.ω. $d: (x,y) \mapsto d(x,y)$ μια μη-αρνητική συνάρτηση.

Η $d$ ονομάζεται απόσταση στο σύνολο $A$ αν ικανοποιεί τις πιο κάτω ιδιότητες:

1. $d(x,y) = 0$ ανν $x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in A$, και
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in A$ (τριγωνική ανισότητα).

**Παραδείγματα:** ① Στο $\mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = |x-y|$ ικανοποιεί 1,2,3 $\to$ απόσταση.

② Στο $\mathbb{R}^n$ χρησιμοποιούμε την ευκλείδια νόρμα $\| . \|$

ορίζοντας $\quad d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| = \|(x_1-y_1, x_2-y_2, \dots, x_n-y_n)\| =$

$$= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

όπου $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$

Σίγουρα ικανοποιεί τα 1, 2.

Για το 3:

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \langle (\vec{x}-\vec{y}), (\vec{x}-\vec{y}) \rangle = \langle (\vec{x}-\vec{z}) + (\vec{z}-\vec{y}), (\vec{x}-\vec{z}) + (\vec{z}-\vec{y}) \rangle$$

$$= \|\vec{x}-\vec{z}\|^2 + \|\vec{z}-\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}-\vec{z}, \vec{z}-\vec{y} \rangle$$

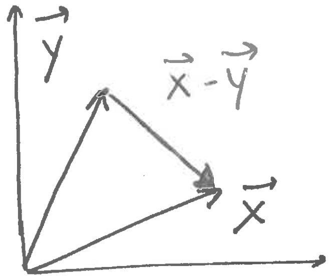
$$\overset{C-S}{\leq} \|\vec{x}-\vec{z}\|^2 + \|\vec{y}-\vec{z}\|^2 + 2\|\vec{x}-\vec{z}\| \cdot \|\vec{z}-\vec{y}\| =$$

$$= \left(\|\vec{x}-\vec{z}\| + \|\vec{y}-\vec{z}\|\right)^2 \Rightarrow \left(d(\vec{x},\vec{y})\right)^2 \leq \left(d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{y},\vec{z})\right)^2$$

$$\Rightarrow d(\vec{x},\vec{y}) \leq d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{y},\vec{z}) \quad \text{αφού } \geq 0.$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

$\mathbb{R}^2$




$d(\vec{x},\vec{y})$ = μήκος του $\vec{x}-\vec{y}$

$$= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

για $\vec{x} = (x_1, x_2)$ $\vec{y} = (y_1, y_2)$.

Παρόμοια στο $\mathbb{R}^3$.

Η ευκλείδια απόσταση δεν είναι η μοναδική απόσταση που μπορεί να οριστεί στο $\mathbb{R}^n$.

③ Άλλη αποστάσεις στο $\mathbb{R}^n$:

$$d_1(\vec{x},\vec{y}) := |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + \dots + |x_n-y_n|$$

$$d_\infty(\vec{x},\vec{y}) := \max\{|x_1-y_1|, \dots, |x_n-y_n|\}$$

για $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

Άσκηση: Ικανοποιούν 1,2,3.

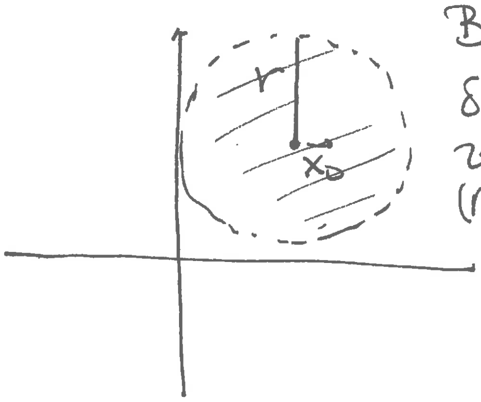
Ορισμός:

$B(\vec{x}_0, r) := \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid d(\vec{x},\vec{x}_0)<r\}$ είναι η ανοικτή μπάλα ακτίνας $r$ με κέντρο το $\vec{x}_0$ στο $\mathbb{R}^n$

$\overline{B(\vec{x}_0, r)} := \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid d(\vec{x},\vec{x}_0)\le r\}$ : η κλειστή μπάλα ακτίνας $r$ με κέντρο το $\vec{x}_0$.

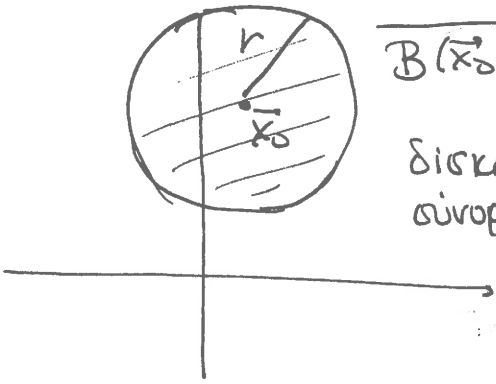
$\mathbb{R}^2$: $d(\vec{x},\vec{x}_0)<r \Leftrightarrow (x_1-x_{0,1})^2+(x_2-x_{0,2})^2<r^2$

$\{(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$



$B(\vec{x}_0, r)$

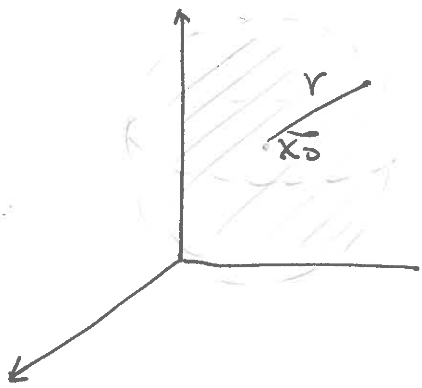
δίσκος χωρίς το σύνορο. (περιφέρεια)



$\overline{B(\vec{x}_0, r)}$

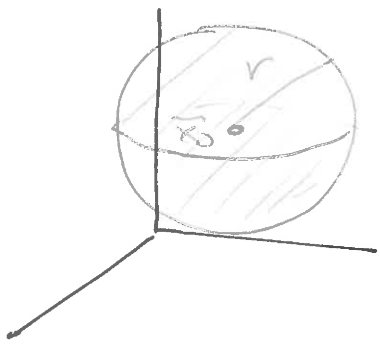
δίσκος με σύνορο.

$\mathbb{R}^3$



$B(\vec{x}_0, r)$

μπάλα χωρίς το περίβλημα.



$\overline{B(\vec{x}_0, r)}$

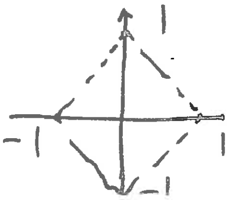
Ορισμός $B_1(\vec{x}_0, r) := \{\vec{x} \mid d_1(\vec{x},\vec{x}_0)<r\}$

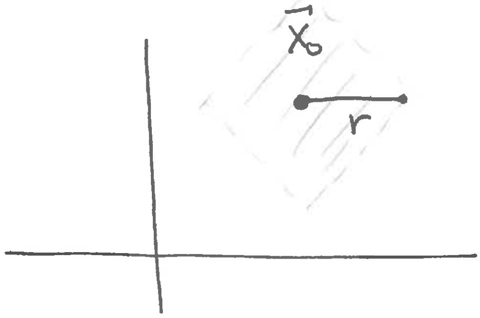
$B_\infty(\vec{x}_0, r) := \{\vec{x} \mid d_\infty(\vec{x},\vec{x}_0)<r\}$

$\mathbb{R}^2$: $\{(x,y) \mid |x|+|y|<1\} = B_1((0,0),1)$

$x,y>0: x+y<1$ $\quad$ $x>0, y<0: x-y<1$

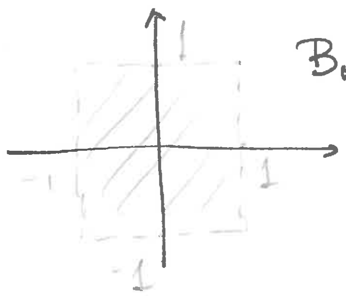
$x<0,y>0: -x+y<1$ $\quad$ $x,y<0: -x-y<1$



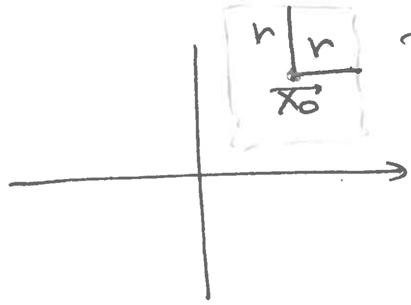



$B_1(\vec{x}_0, r)$

$$B_\infty((0,0), 1) = \{(x,y) \mid \max\{|x|, |y|\} < 1\}$$




$B_\infty((0,0),1)$




$B_\infty(\vec{x}_0, r)$.

Σχέσεις ανάμεσα στις αποστάσεις $d, d_1, d_\infty$ που τις κάνουν ισοδύναμες:

$$d(\vec{x}, \vec{0}) = \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Αφού $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2$ τότε $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\therefore\ d(\vec{x}, \vec{0}) \leq d_1(\vec{x}, \vec{0})$.

Από C-S: 
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x_i| &= \langle (|x_1|, \ldots, |x_n|), (1, \ldots, 1) \rangle \\ &\leq \|(|x_1|, \ldots, |x_n|)\| \cdot \|(1, \ldots, 1)\| \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot d(\vec{x}, \vec{0}) \end{aligned}$$

$$\therefore\ \boxed{d(\vec{x}, 0) \leq d_1(\vec{x}, 0) \leq \sqrt{n} \cdot d(\vec{x}, \vec{0}).}$$

Παρατήρηση: $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{x} - \vec{y}, \vec{0})$ (το ίδιο για $d_1$ και $d_\infty$)

Άρα $\boxed{d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d_1(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt{n}\ d(\vec{x}, \vec{y})}$ $d, d_1$ είναι ισοδύναμες.