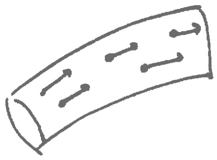
Διανυσματικά πεδία:

Ορισμός: Μια συνάρτηση $F: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ U ανοικτό, που σε κάθε σημείο $x \in U$ ορίζει ένα διάνυσμα $F(x)$ με αρχή το x, ονομάζεται διανυσματικό πεδίο.

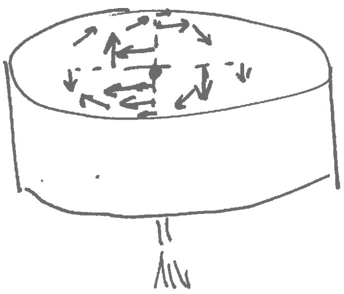
Παρ.

① 

$\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), F_3(\vec{x}))$
προσδίδει σε κάθε $\vec{x}$ το διάνυσμα ταχύτητας του ρευστού στο σημείο $\vec{x}$.
Τόσο η $\|F(\vec{x})\|$ = μέτρο ταχύτητας όσο και η κατεύθυνση μπορούν να αλλάξουν.

② $V(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$

Το διανυσματικό πεδίο που δίνει την οριζόντια ταχύτητα ρευστού που ρέει σε ένα νεροχύτη; στο $(0,0)$

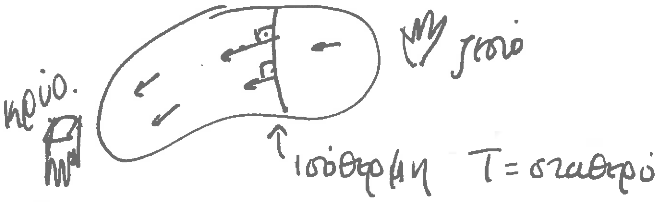


$\|V\| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \to \infty$ όταν $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$
- περιστρέφεται πιο γρήγορα κοντά στην τρύπα του νεροχύτη.

③ Αν $T(x,y,z)$: η θερμοκρασία σε ένα χωρίο $U \subset \mathbb{R}^3$.

$\vec{J} = -k \nabla T \equiv$ ροή της θερμοκρασίας.
↑σταθερά αγωγιμότητας

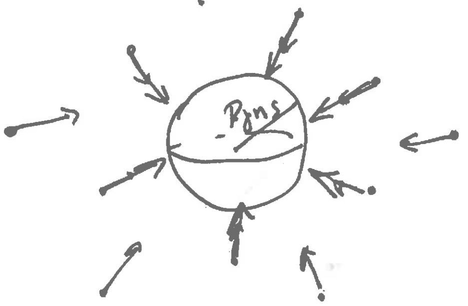
$\vec{J} \perp$ στα ισοϋψή σύνολα του T και "ρέει" από τα ζεστά στα κρύα - όπου φθίνει η T.



④ Βαρυτικό πεδίο πάνω από την επιφάνεια της γης, γη- έχει μάζα M
και έλκει σώμα μάζας m

$$\vec{F} = -\frac{mMG}{r^3}\vec{r} \qquad \vec{r}=(x,y,z) \qquad r=\|\vec{r}\|. \quad \text{- για } r \geq R_{γης}.$$

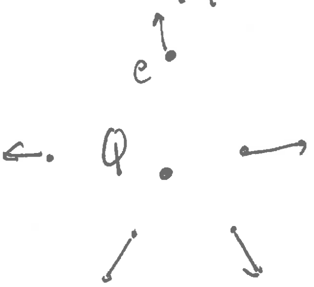
Παρατήρηση: $\vec{F} = -\nabla V = -\nabla\left(\frac{mMG}{r}\right)$: δυναμικό βαρύτητας: $V = -\frac{mMG}{r}$



$|V|$: μεγαλύτερο όσο $r \to R_{γης}$.

⑤ Νόμος Coulomb: Δύναμη φορτίου Q στο $\vec{0}$ πάνω σε σωματίδιο φορτίου e:

$$\vec{F} = \frac{εQe}{r^3}\vec{r} = -\nabla V \quad \text{με} \quad V = +ε\frac{Qe}{r} \qquad ε: \text{σταθερά.}$$



αν Q & e αρνητικά ή θετικά

αν Q, e αντίθετα.

V= σταθερά πάνω σε σφαίρες: ισοδύναμη επιφάνεια.

- Για $f: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη, ορίσαμε $\nabla f: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ένα διανυσματικό πεδίο.
  - Δίνει την κατεύθυνση μέγιστης αύξησης της f.

- Για διαν. πεδία έχουμε (πέρα από DF = πίνακας μερικών) κάποιες ιδιαίτερες παραγώγους που δίνουν πληροφορίες για τη μορφή τους.

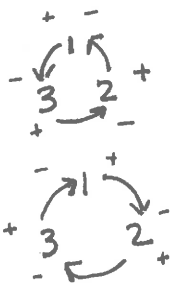
<u>Ορισμός:</u>

Για $F: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1, η <u>απόκλιση</u> του διαν. πεδίου $\vec{F}$ ορίζεται ως:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F \ (\equiv \vec{\nabla} \cdot F) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \quad (= \operatorname{trace}[DF])$$

Για $F: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^1 ο στροβιλισμός του διαν. πεδίου F ορίζεται ως:

$$\operatorname{curl} F = \nabla \times F \ (\equiv \vec{\nabla} \times F) = \text{"}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}\text{"}$$



$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

2,3 1,3 2,1

<u>Παράδειγμα:</u> $F = (x+y, x^2yz, yz)$

$$\operatorname{div} F = (1 + x^2 z + y)$$

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x+y & x^2yz & yz \end{vmatrix} = (z - yx^2, 0, 2xyz - 1)$$

<u>Ιδιότητες:</u> ① Αν f C^2 συνάρτηση στο ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^3$ τότε

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) = 0 \quad \text{και}$$

② Αν F C^2 διαν. πεδίο στο ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^3$ τότε

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

③ Αν f C^2 συνάρτηση στο ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$, τότε

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f \quad \left(= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)$$

Απόδειξη ① $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = \vec{0}$

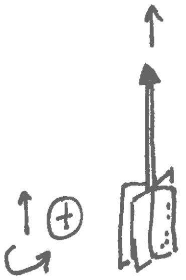
② $$\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_3}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3}} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_1}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_2}}$$

$$= 0.$$

③ απλό.

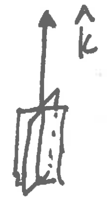
Γεωμετρική Ερμηνεία Στροβιλισμού $\operatorname{curl} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$



άξονας με έλικες. μέσα στο $\mathbb{R}^3$.

Το διανυσματικό πεδίο F: δίνει την κατεύθυνση με την οποία κινείται το ρευστό

Βάζουμε τον άξονα στο σημείο (x,y,z) με τη ράβδο παράλληλη προς τον άξονα z και έλικες προς τα κάτω.

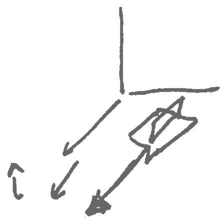


Τότε $\operatorname{curl} F \cdot \hat{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$ είναι ανάλογο με με την ταχύτητα δεξιόστροφης περιστροφής του έλικα

Αν $\operatorname{curl} F \cdot \hat{k} > 0$ 

Αν $\operatorname{curl} F \cdot \hat{k} < 0$ 

Παρόμοια

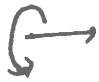


: αν βάλουμε τον έλικα στην κατεύθυνση $\hat{\imath}$ στο σημείο (x,y,z)

Τότε $\mathrm{curl}F\cdot\hat{\imath} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}$ ∼ με ταχύτητα δεξιόστροφης περιστροφής του έλικα

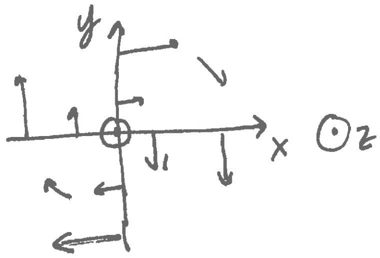
Αν $\mathrm{curl}F\cdot\hat{\imath} > 0$ 

Αν $\mathrm{curl}F\cdot\hat{\imath} < 0$ 

Παρόμοια για $\hat{\jmath}$: $\mathrm{curl}F\cdot\hat{\jmath} > 0$ 

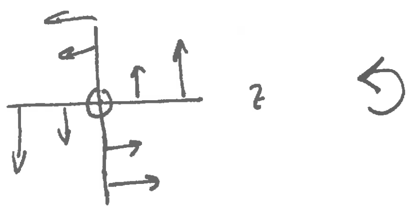
$\mathrm{curl}F\cdot\hat{\jmath} < 0$ 

Παραδείγματα: ① $F_1 = (y,-x,0)$



$\nabla\times F_1 = (0,0,-2)$ περιστρέφεται δεξιόστροφα - με φορά δεικτών.

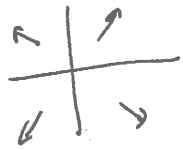
② $F_2 = (-y,x,0)$



$\nabla\times F_2 (0,0,2)$.

③ $F_3 = (x,y,0)$

& $\tilde{F}_3 = (x,y,z)$

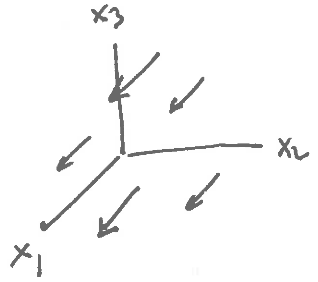


έχουν $\nabla\times F_3 = \nabla\times\tilde{F}_3 = 0$. δεν περιστρέφουν.

Παρατήρηση: $F_3 = \nabla\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right) \Rightarrow \nabla\times(\nabla f) = 0$

$\tilde{F}_3 = \nabla\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)\right) \Rightarrow \nabla\times(\nabla\tilde{f}) = 0$.

④ $F_4 = (F_1, 0, 0)$

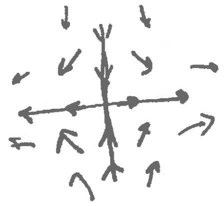


$$\nabla \times F_4 = \left(0, \frac{\partial F_1}{\partial x_3}, -\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$$

Δεν περιστρέφει έλικα στην κατεύθυνση $\hat{i}$.

Θα μπορούσε να περιστρέφει στην $\hat{j}$ & $\hat{k}$. αν οι μερικές $\neq 0$.

⑤ $F_5 = (x, -y, 0)$



$\nabla \times F_5 = (0, 0, 0)$

Γεωμετρική Ερμηνεία Απόκλισης:

$\nabla \cdot F_1 = \nabla \cdot F_2 = 0$ από ①, ②. & $\nabla \cdot F_5 = 0$

$\nabla \cdot F_3 = 2$ $\quad F_3 = (x, y, 0)$

$\nabla \cdot \tilde{F}_3 = 3$ $\quad \tilde{F}_3 = (x, y, z)$

$\nabla \cdot F(\vec{x})$: δίνει τη συνολική ροή του $\vec{F}$ από μικρό κύβο γύρω από το σημείο $\vec{x}$

Αν το υγρό είναι ασυμπίεστο (δεν αλλάζει η πυκνότητά του) τότε όσο μπαίνει βγαίνει $\Rightarrow \nabla \cdot F = 0$.

$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$: μετρά τις αλλαγές στην πυκνότητα του ρευστού.

Διαφορικό:

Για $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη, το διαφορικό της f ορίζεται ως:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

df: δίνει το κατά προσέγγιση σφάλμα (μεταβολή στην f) σε ένα σημείο x_0, όταν τα $x_1, \ldots, x_n$ μεταβληθούν κατά $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \Delta x_i \qquad \Delta f = f(x) - f(x_0)$$
$$\Delta x_i = x_i - x_{0,i}$$

Παράδειγμα: Κατασκευάζουμε ορθογώνιο κουτί διαστάσεων $x=2$ $y=3$ $z=4$. Να υπολογισθεί το κατά προσέγγιση σφάλμα στον όγκο του κουτιού αν το σφάλμα στη μέτρηση του x είναι .01, του y: 0.02 και του z: 0.01

$$V = xyz$$

$$\Delta V = yz \cdot \Delta x + xz \cdot \Delta y + xy \cdot \Delta z$$

$$\Delta V \simeq 3 \cdot 4 \cdot (.01) + 2 \cdot 4 \cdot (0.02) + 2 \cdot 3 \cdot (.01).$$

- Μπορούμε να δούμε το $df(x)$ σαν τελεστή πάνω σε διανύσματα $v \in \mathbb{R}^n$: τ.ω. $df(v) = \nabla f \cdot v$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι $d(fg) = f\,dg + g\,df$.

Μήκος Τόξου:

Έστω $\vec{\gamma}(t): I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ μια C^1 καμπύλη.

$\vec{\gamma}'(t)$: διάνυσμα ταχύτητας της $\vec{\gamma}$ - εφαπτόμενο διάνυσμα στη γ.

$\|\vec{\gamma}'(t)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\gamma_i'(t))^2\right)^{1/2}$: το μέτρο της ταχύτητας

Ορισμός: Για $\vec{\gamma}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ C^1

$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{\gamma}'(t)\| \, dt$ είναι το μήκος τόξου της καμπύλης στο διάστημα t_0 μέχρι t_1.

Παρ. ① $\vec{\gamma}(t) = (r\cos t, r\sin t)$ r σταθερά $t \in [0, 2\pi]$

$\vec{\gamma}' = (-r\sin t, r\cos t)$ $\|\gamma'(t)\| = r$

$\therefore L(\gamma) = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r$: το μήκος του κύκλου.

② Αν $t \in [0, 4\pi]$ για ίδια $\vec{\gamma}$:

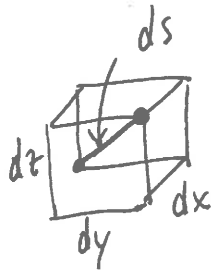
$L(\gamma) = \int_0^{4\pi} r\,dt = 4\pi r$: διανύσαμε 2 φορές τον κύκλο = η συνολική απόσταση που ταξιδέψαμε.

Παρατήρηση: Για $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

η στιγμιαία μετατόπιση σημείου που ακολουθεί τη γ δίνεται από: $d\vec{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{j}$

$= \left(x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}\right) dt$

και έχει μήκος $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$



$$\therefore L(\gamma) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \Delta s = \lim_{\Delta t\to 0} \sum \Delta s$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

Παρ. ③ Το μήκος τόξου της καμπύλης $y=f(x)$ για $x\in[a,b]$:

$\gamma(x) = (x, f(x))$. $\quad x\in[a,b]$

$\gamma'(x) = (1, f'(x)) \qquad \|\gamma'\| = \sqrt{1+(f'(x))^2}$

$$\therefore L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}$$

Αναπαραμέτριση καμπύλης:

Έστω $\gamma(t)$ μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$ για $t\in[t_0,t_1]$

Έστω $t=\beta(s)$ μια C^1, αύξουσα συνάρτηση τ.ω. $t_0=\beta(s_0)$, $t_1=\beta(s_1)$.

κ' $s_0<s_1$ αφού β αύξουσα

Τότε η $c(s)=\gamma(\beta(s))$ για $s\in[s_0,s_1]$ έχει την ίδια εικόνα στο $\mathbb{R}^n$.

Η $c(s)$ ονομάζεται αναπαραμέτριση της γ.

Λήμμα: $L(c)=L(\gamma)$. : το μήκος δεν εξαρτάται από την ταχύτητα του ταξιδιού.... φαίνεται να μην μας μπερδεύει. Μια παραμετρικοποίηση δίνει τον τρόπο που ταξιδεύεις στην καμπύλη, όχι το μήκος της.

Απόδειξη: $L(c)=\int_{s_0}^{s_1}\|c'(s)\|\,ds = \int_{s_0}^{s_1}\|\gamma'(\beta(s))\cdot\beta'(s)\|\,ds = \int_{s_0}^{s_1}\|\gamma'(\beta(s))\|\,\beta'(s)\,ds$

$\beta'>0$ βασικά

Αλλαγή μεταβλητών $t=\beta(s)\to dt=\beta'(s)\,ds$

$$= \int_{\beta(s_0)}^{\beta(s_1)}\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\|\gamma'(t)\|\,dt = L(\gamma).$$

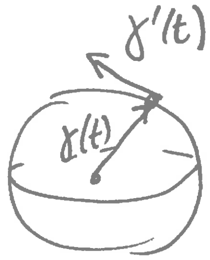
Ιδιότητα:

Αν $\|\gamma(t)\| = c \Rightarrow \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = c^2$

$\frac{d}{dt} \Rightarrow 2\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$

$\Rightarrow \gamma(t) \perp \gamma'(t)$

$\|\gamma(t)\| = c$: κίνηση σε σφαίρα ακτίνας c.



Αν $\|\gamma'(t)\| = c \Rightarrow \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = c^2$

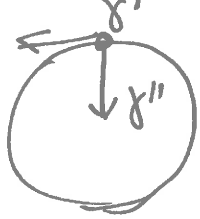
$\frac{d}{dt}$: $2\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0$

$\Rightarrow \gamma'(t) \perp \gamma''(t)$.

$\|\gamma'(t)\| = c$: ισοταχής κίνηση.

σε ευθεία με $\|\gamma'(t)\| = c$. d $\gamma''(t) = 0$

ή



κυκλική κίνηση με την επιτάχυνση να αλλάζει την κατεύθυνση της ταχύτητας αλλά όχι το μέτρο της.