Απόδειξη Θεωρήματος Αντιστρ. Συν.

Θα δείξουμε τα ακόλουθα:

(1) $\exists\, \delta$ τ.ω. η F είναι 1-1 για $B(x_0,\delta) = V$

(2) $F(B(x_0,\delta)) = W$ είναι ανοικτό.

Από (1) & (2) ορίζεται η αντίστροφη $F^{-1}: W \to V$

Τότε

(3) Η F^{-1} είναι C^1.

(1): Έστω $\phi_y(x) = x + \underbrace{[DF(x_0)]^{-1}}\,(y - F(x))$ $\quad y$: σταθερά.

$(DF)(x_0)$ αντιστρέψιμος πίνακας $\therefore$ ορίζεται.

Παρατήρηση: • $\phi_y(x) = x \Leftrightarrow y = F(x)$.

Δηλαδή $\exists x$ τ.ω. $y = F(x) \Leftrightarrow$ η ϕ έχει σταθερό σημείο.

• $J_F(x) = \det(DF)(x) \equiv$ πολυώνυμο των μερικών της F

αφού η f είναι $C^1 \Rightarrow J_F(x)$ συνεχής σε γειτονιά του x_0

Αφού $\underset{y \in \mathbb{R}}{J_F(x_0) \neq 0} \Rightarrow \exists\, \delta_1$ τ.ω. $J_F(x) \neq 0$ στη $B(x_0,\delta_1)$

$$D\phi_y(x) = I - [DF(x_0)]^{-1} \cdot [DF](x) = [DF(x_0)]^{-1} \cdot \left(DF(x_0) - DF(x) \right)$$

$$\therefore \left| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq \underbrace{\sum_{i,j} \sup_{k,\ell} \left| \frac{\partial F_k}{\partial x_\ell}(x_0) \right|}_{M} \cdot \underbrace{\left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \right|}_{< \varepsilon = \frac{1}{2n^2 M}}$$

για $\|x - x_0\| < \delta_2$ αφού F C^1

$$\leq \frac{1}{2n^2} \text{ για } x \in B(x_0,\delta_2)$$

$\phi \equiv \phi_y$

Έστω $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Τότε για $x_1, x_2 \in B(x_0,\delta)$

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\phi_i(x_1) - \phi_i(x_2)|^2 \right)^{1/2} \underset{\text{ΘΜΤ}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\nabla \phi_i(\xi_i)\|^2 \, \|x_1 - x_2\|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$$

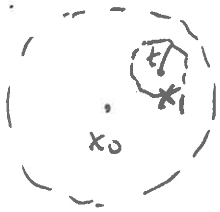
Άρα για κάθε y, η εξίσωση $\phi_y(x)=x$ στο $B(x_0,\delta)$ έχει το πολύ μία λύση, αφού αν $\phi_y(x_1)=x_2$ & $\phi_y(x_2)=x_2$ τότε $\|\phi_y(x_1)-\phi_y(x_2)\| = \|x_1-x_2\| \le \frac{1}{2}\|x_1-x_2\| \Rightarrow x_1=x_2$!

$\therefore$ Η F είναι 1-1 στο $B(x_0,\delta)$.

(2) Έστω $W=F(B(x_0,\delta))$

Για $y_1\in W \Rightarrow \exists x_1\in B(x_0,\delta)$ τ.ω. $F(x_1)=y_1$

$B(x_0,\delta)$ ανοικτό άρα $\exists t>0$ τ.ω. $\overline{B(x_1,t)}\subset B(x_0,\delta)$



Έστω $l(x)=\|F(x)-y_1\|$

$F(x_1)=y_1$ και F 1-1 στο $B(x_0,\delta)$

$\Rightarrow l(x)\neq 0$ στο $\partial B(x_1,t)=\{|x-x_1|=t\}$

Έστω $m=\inf\{l(x) \mid x\in\partial B(x_1,t)\}$

-ορίζεται από Θ. Ακραίων τιμών αφού η σφαίρα είναι συμπαγής. και $l(x)$ συνεχής.

Για y τ.ω. $\|y-y_1\|<m/3$ και $x\in\partial B(x_1,t)$

$$\|F(x)-y\|\ge \|F(x)-y_1\|-\|y-y_1\|\ge \frac{2m}{3}$$

Έστω $G(x)=\|F(x)-y\|^2$ για $x\in\overline{B(x_1,t)}$ με $\|y-y_1\|<\frac{m}{3}$.

$$G(x_1)=\|y_1-y\|^2<\frac{m^2}{9}$$

$$G(x)\ge\frac{4m^2}{9} \quad \text{για} \quad x\in\partial B_1(x_1,t)$$

$\therefore$ Η συνεχής συνάρτηση G παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο z στο εσωτερικό της μπάλας, όπου $\nabla G(z)=0$ $z\in B(x_1,t)$.

$$\Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial x_j}(z) = 2\cdot\sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(z)\,(F_i(z)-y_i)=0 \quad \forall j \Leftrightarrow DF(z)\,(F(z)-y)=0$$

$z\in B(x_0,\delta)\Rightarrow DF(z)$ αντιστρέψιμη $\Rightarrow F(z)=y$

Δηλαδή αν $y_1 \in W$, $\forall y \in B(y_1, \frac{m}{3})$ $\exists z \in B(x_0,\delta)$ τ.ω. $F(z) = y$.

$\Rightarrow B(y_1, \frac{m}{3}) \subset F(B(x_0,\delta))$

$\Rightarrow W$ ανοικτό.

$\therefore F: B(x_0,\delta) \to W$ 1-1 & αντιστρέψιμη από ανοικτό σε ανοικτό.

άρα ορίζεται F^{-1}.

(3) Θ.δ.ο. $(DF^{-1})(y) = [DF]^{-1}(F^{-1}(y))$ $\forall y \in W$.

(Αυτός πρέπει να είναι ο τύπος από τον κανόνα της αλυσίδας

αφού $F \circ F^{-1}(y) = y \Rightarrow [DF](F^{-1}(y)) . [DF^{-1}](y) = I$)

$A := [DF]^{-1}(F^{-1}(y))$ ορίζεται αφού $F^{-1}(y) \in B(x_0,\delta)$ και $J_F \neq 0$ στο $B(x_0,\delta)$.

$\forall y, y+k \in W$; $\exists!$ $x, x+h \in B(x_0,\delta)$ τ.ω.

$F(x) = y$ & $F(x+h) = y+k$

$$\therefore F^{-1}(y+k) - F^{-1}(y) - A\cdot k = x + \underbrace{h}_{} - x - A(F(x+h) - F(x))$$

$$= -\underset{\uparrow}{A}\left(F(x+h) - F(x) - \underbrace{[DF](x)}_{A^{-1}}\cdot h\right)$$

$\therefore \|F^{-1}(y+k) - F^{-1}(y) - Ak\| \le \|h\| . \delta(h)$ $^{(*)}$ με $\delta(h) \to 0$ όταν $h \to 0$. αφού F διαφ. στο x.

Όμως $\|\phi_y(x+h) - \phi(x)\| = \|h - [DF(x_0)]^{-1}. k\| \le \frac{1}{2}\|x+h-x\| = \frac{1}{2}\|h\|$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\|h\| \le \|[DF(x_0)]^{-1} k\| \le c . \|k\| \Rightarrow \|h\| \le C'\|k\|$.

$\therefore (*) \le C'\|k\| \, \delta(h)$ με $\delta(h) \to 0$ όταν $k \to 0$.

$\therefore F^{-1}$ διαφ. στο y με $(DF^{-1})(y) = A$. $\therefore F^{-1}$ συνεχής

και από τύπο του A, έχουμε ότι $(DF^{-1})(y)$ συνεχής. αφού (DF) συνεχής.

$\square$

Πεπλεγμένες Συναρτήσεις:

Υπάρχουν πολλές συναρτήσεις που δίνονται σε μορφή εξίσωσης.

$f(x,y)=0$

π.χ. $x^2+y^2=5$

ή $e^{x+y}+e^{-x-y}=7$

όπου δεν είναι εύκολο να βρούμε τη $y=\phi(x)$
δηλαδή να λύσουμε y ως προς x

Πότε ξέρουμε ότι υπάρχει μια $y=\phi(x)$ τέτοια ώστε

$f(x,\phi(x))=0$; (ή $x=g(y)$).

Στο παράδειγμα $x^2+y^2=5 \Rightarrow y=\pm\sqrt{5-x^2}$
πότε μπορούμε να μιλήσουμε για μοναδικότητα;

Παρατήρηση: $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ D ανοικτό
υποθέτουμε πως υπάρχει $(x_0,y_0)\in D$ τ.ω. $f(x_0,y_0)=0$

Για να λύσουμε την $f(x,y)=0$ ως προς y
θεωρούμε το μετασχηματισμό:

$$F: D\to\mathbb{R}^2$$
$$(x,y)\longmapsto(x,f(x,y))=(u,v)$$

Αν λύσουμε για (x,y) ως προς u,v
δηλαδή, $(x,y)=F^{-1}(u,v)=(g_1(u,v),g_2(u,v))$

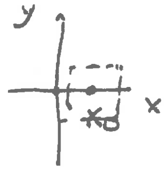
τότε $(u,v)=F\circ F^{-1}(u,v)=F(g_1(u,v),g_2(u,v))=\cancel{g_1(u,v)}$
$=(g_1(u,v),f(g_1(u,v),g_2(u,v)))$

$\Rightarrow g_1(u,v)=u\ (=x)$ & $f(g_1(u,v),g_2(u,v))=v \Rightarrow f(u,g_2(u,v))=v$

και θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Αντιστροφής:

$$F(x_0,y_0) = (x_0, f(x_0,y_0)) = (x_0,0)$$

και $$J_F(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \end{vmatrix} = f_y(x_0,y_0)$$



Αν $f_y(x_0,y_0) \neq 0$ τότε ορίζεται η

$F^{-1}(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v))$ σε μια γειτονιά του $(x_0,0)$.

Παρατηρούμε ότι: $(u,v) = F\circ F^{-1}(u,v) = (\overset{=u}{g_1(u,v)}, f(g_1(u,v), g_2(u,v)))$

$$\Rightarrow v = f(u, g_2(u,v))$$

Αφού F^{-1} ορίζεται σε γειτονιά του $(x_0,0)$

$\Rightarrow$ ορίζεται για τα $(u,0)$ για $|u-x_0|<\delta$

Σε αυτά: $0 = f(u, g_2(u,0)) \Rightarrow 0 = f(x, g_2(x,0))$

για $|x-x_0|<\delta$

Δηλαδή όταν $f_y(x_0,y_0) \neq 0$, η $g_2(x,0)$

δίνει τη λύση $y = \phi(x) := g_2(x,0)$

έτσι ώστε $f(x,\phi(x)) = 0$.

Το $\phi(x)$ είναι μοναδικό στο x για $|x-x_0|<\delta$

αφού αν $f(x,\phi(x)) = f(x,y') = 0$

$$\Rightarrow f(x,\phi(x)) - f(x,y') = (\phi(x)-y')\cdot f_y(x,\xi) = 0 \quad \text{ΘΜΤ}$$

Όμως $f_y(x,\xi) \neq 0$ αφού $f_y(x_0,y_0) \neq 0$ για (x,ξ) κοντά στο (x_0,y_0)

όταν f C^1 $\Rightarrow \phi(x) = y'$.

Αν f C^1 $\Rightarrow$ F C^1

άρα από Θ. Αντιστρ. F^{-1} C^1 και $\phi(x) = g_2(x,0)$ C^1

Υπολογισμός $\phi'(x)$ από Καν. Αλυσίδας:

Αφού $f(x,\phi(x)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(f(x,\phi(x))\right) = 0$

$$\Rightarrow f_x(x,\phi(x)) + f_y(x,\phi(x))\cdot\phi'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \phi'(x) = -\frac{f_x(x,\phi(x))}{f_y(x,\phi(x))}$$

$\hookrightarrow \neq 0$ για $(x,\phi(x))$ κοντά στο (x_0,y_0).

<u>Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης</u> στο $\mathbb{R}^2$

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f: D \to \mathbb{R}$ C^1.

Αν στο $(x_0,y_0) \in D$ $f(x_0,y_0) = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

τότε υπάρχει μια περιοχή U του x_0 και μια περιοχή V του y_0 έτσι ώστε να υπάρχει μια μοναδική C^1 συνάρτηση

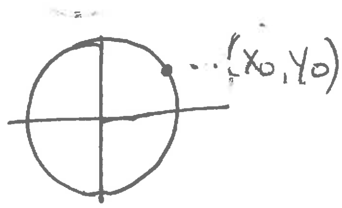
$$\phi: U \to V$$

η οποία να ικανοποιεί $f(x,\phi(x)) = 0$ $\forall x \in U$.

Επιπλέον, αν $x \in U$ και $y \in V$ ικανοποιούν $f(x,y) = 0$ τότε $y = \phi(x)$.

Από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε: $\phi'(x) = -\dfrac{f_x(x,\phi(x))}{f_y(x,\phi(x))}$

$\forall x \in U$.



Παράδειγμα:

① $f(x,y) = x^2 + y^2 - 5.$

$f_y(x,y) = 2y \neq 0 \iff y \neq 0$

$\forall (x_0, y_0)$ με $y_0 > 0$ $\exists \phi(x)$ τ.ω. $f(x,\phi(x)) = 0$ σε γειτονιά του x_0.

Η $\phi(x) = \sqrt{5 - x^2}$

$\forall (x_0, y_0)$ με $y_0 < 0$ $\phi(x) = -\sqrt{5 - x^2}$

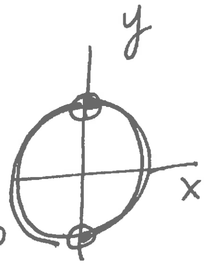
$$-\frac{f_x(x,\phi(x))}{f_y(x,\phi(x))} = -\frac{2x}{2\phi(x)} = -\frac{x}{\phi(x)} \begin{cases} -\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}} & y_0 > 0 \\[2ex] \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}} & y_0 < 0. \end{cases}$$

② Μπορούμε να λύσουμε ως προς $x = \psi(y)$

αν $f_x \neq 0 \iff 2x \neq 0$

$x = \sqrt{5 - y^2}$ για $x_0 > 0$

$x = -\sqrt{5 - y^2}$ για $x_0 < 0$.



Γενική Μορφή:

① Για $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

π.χ. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-5xyz+2=0$ ορίζει επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3$.

$f(1,1,1)=0$

και $f_z(1,1,1) = 2-5=-3 \neq 0$

άρα $\exists!\ g: B((1,1),\varepsilon) \to B(1,\eta)$

τ.ω. $f(x,y,g(x,y))=0 \quad \forall x \in B((1,1),\varepsilon)$

και $g_x(x,y) = -\dfrac{f_x(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))} = -\dfrac{2x-5y\cdot g(x,y)}{2z-5xy}$ στο $(1,1)$: -1

$g_y(x,y) = -\dfrac{f_y(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))} = -\dfrac{2y-5x\,g(x,y)}{2z-5xy}$ στο $(1,1)$: -1

② Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση

και $S = U_c = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = c\}$

μια ισοϋψή επιφάνεια.

Αν $(x_0,y_0,z_0) \in S$ και $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq \vec{0}$ τότε η S στην περιοχή του (x_0,y_0,z_0), είναι το γράφημα μιας συνάρτησης. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου.

Έστω $F(x,y,z) = f(x,y,z) - c$

$F(x_0,y_0,z_0)=0$ και $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq \vec{0}$

Αν $F_x(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, τότε
από Θεωρ. Πεπλεγμένης υπάρχει μοναδική

$$g: B((y_0,z_0),\varepsilon) \to B(x_0,\eta)$$

τ.ω. $F(g(y,z),y,z) = 0 \Leftrightarrow f(g(y,z),y,z) = c$

Δηλαδή η S είναι το γράφημα της $x = g(y,z)$
σε μια γειτονιά του (x_0,y_0,z_0)
αφού για $(x,y,z) \in S$, $x = g(y,z)$.

Εφαπτόμενο επίπεδο:

$$x - x_0 = \nabla g(y_0,z_0)(y-y_0, z-z_0)$$

$$f(g(y,z),y,z) = c \Rightarrow f_x \cdot g_y + f_y = 0 \Rightarrow g_y = -\frac{f_y}{f_x}$$

$$\Rightarrow f_x \cdot g_z + f_z = 0 \Rightarrow g_z = -\frac{f_z}{f_x}.$$

$$\therefore x - x_0 = -\frac{f_y(x_0,y_0,z_0)}{\underbrace{f_x(x_0,y_0,z_0)}_{\neq 0}}(y-y_0) - \frac{f_z(x_0,y_0,z_0)}{f_x(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla f(x_0,y_0,z_0)}_{\perp S} \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

$\Rightarrow \nabla f \perp$ στο εφαπτ. επίπεδο.

Παρόμοια αν $f_y \neq 0$ ή $f_z \neq 0$.
Η εξίσωση του επιπέδου (εφαπτόμενου) παραμένει ίδια).

Θεώρημα Πεπλεγμένων : Γενική Μορφή:

Σύστημα:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{cases}$$

m εξισώσεις
με m αγνώστους
$y_1,\dots,y_m$.

Θέλουμε να βρούμε m συναρτήσεις

$y_1=G_1(x_1,\dots,x_n),\ \dots\ y_m=G_m(x_1,\dots,x_n)$

τ.ω.

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,G_1(x_1,\dots,x_n),\dots,G_m(x_1,\dots,x_n))=0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,G_1(x_1,\dots,x_n),\dots,G_m(x_1,\dots,x_n))=0 \end{cases}$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $U\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ ανοικτό και
$F: U\to\mathbb{R}^m$ μια C^1 συνάρτηση
με συνιστώσες $F_1,\dots,F_m$. Αν το σημείο $(x_0,y_0)\in U$ $(x_0\in\mathbb{R}^n, y_0\in\mathbb{R}^m)$
η F ικανοποιεί $F(x_0,y_0)=0$ και

$$\Delta(x_0,y_0)=\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$$

τότε υπάρχει γειτονιά $V\ni x_0$ και γειτονιά $W\ni y_0$ και
μετασχηματισμός $G: V\subset\mathbb{R}^n\to W\subset\mathbb{R}^m$ έτσι ώστε $F(x,G(x))=0$
$\forall x\in V$. Η $G(x)$ είναι μοναδική λύση, δηλαδή αν $F(x,y)=0$
για κάποιο $y\in W$, τότε $y=G(x)$.

- Οι μερικές παράγωγοι των φ_i μπορούν να υπολογιστούν μέσω αυτών των F_i, με σύστημα.

- Απόδειξη όπως όταν $m=1$
  ορίζοντας $\tilde{F}(x,y)=(x, F(x,y))$ και αντιστρέφοντας στο (x_0,y_0).

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω

$$2xu+yv^2=1$$
$$xv^3+3y^2u^6=2$$

Δείξτε ότι μπορούμε να εκφράσουμε τα u,v σαν συναρτήσεις των x,y (δηλαδή $\exists\, u(x,y)$ & $v(x,y)$) γύρω από το σημείο $x=1$ $y=-1$, $u=1$ & $v=-1$.

$$F_1(x,y,u,v)=2xu+yv^2-1$$
$$F_2(x,y,u,v)=xv^3+3y^2u^6-2$$

$F=(F_1,F_2): \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι C^1 (πολυων.)

και $F(1,-1,1,-1)=(0,0)$

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 2yv \\ 18y^2u^5 & 3xv^2\end{vmatrix}$$

$$\Delta(1,-1,1,-1)=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 18 & 3\end{vmatrix}=6-36\neq 0$$

Άρα υπάρχουν μοναδικές $u(x,y)$ $v(x,y)$ από ~~ΘΠΣ~~ στη γειτονιά του $(x_0,y_0)=(1,-1)$ που να ικανοποιούν το σύστημα.

Υπολογισμός: u_x, u_y, v_x, v_y

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_1(x,y,u(x,y),v(x,y))\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

παρόμοια $$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$\Big\}$ u_x & u_y

$\frac{\partial}{\partial y}:(F_i=0):$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$\Big\}$ u_y & v_y

$$\therefore \underbrace{\begin{pmatrix}(F_1)_u & (F_1)_v\\ (F_2)_u & (F_2)_v\end{pmatrix}}_{[DF_{u,v}]}\begin{pmatrix}u_x\\ v_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(F_1)_x\\ -(F_2)_x\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}u_x\\ v_x\end{pmatrix}=[DF_{u,v}]^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-(F_1)_x\\ -(F_2)_x\end{pmatrix}$$

Παρόμοια: $$\begin{pmatrix}u_y\\ v_y\end{pmatrix}=[DF_{u,v}]^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-(F_1)_y\\ -(F_2)_y\end{pmatrix}$$

$$[DF_{u,v}](1,-1,1,-1)=\begin{bmatrix}2 & +2\\ 18 & 3\end{bmatrix}\qquad [DF_{u,v}]^{-1}=-\frac{1}{30}\cdot\begin{bmatrix}3 & -2\\ -18 & 2\end{bmatrix}$$

$(F_1)_x=2u \qquad (F_2)_x=v^3 \qquad (F_1)_y=v^2 \qquad (F_2)_y=6yu^6$

$$\begin{pmatrix}u_x\\ v_x\end{pmatrix}\Bigg|_{(1,-1)}=-\frac{1}{30}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -18 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ +1\end{bmatrix}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}8\\ -38\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4/15\\ -19/15\end{bmatrix}\qquad \begin{pmatrix}u_y\\ v_y\end{pmatrix}=-\frac{1}{30}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -18 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ +6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\ -1\end{bmatrix}$$