Πολλαπλοί Περιορισμοί:

Θεώρημα Πολλ/στών Lagrange 2:

Έστω $f, g_1, g_2 : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1, A ανοικτό και

$S = \{x \mid g_1(x) = c_1\} \cap \{x \mid g_2(x) = c_2\}$.

Αν η $f|_S$ έχει Τ. Ακρότατο στο $x_0 \in S$ και $\nabla g_1(x_0), \nabla g_2(x_0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0)$.

Παρόμοια, αν $S = \{x \mid g_1(x) = c_1\} \cap \ldots \cap \{x \mid g_k(x) = c_k\}$ για k περιορισμούς $g_1, \ldots, g_k$ με $\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_k(x_0)$ γραμμικά ανεξ. και g_i C^1 $\forall i$, τότε $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x_0).$$

Παρ. ② Να βρεθούν τα Τ.Α. της $f(x,y,z) = x+y+z$ πάνω στην έλλειψη που βρίσκεται στην τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=2$ με το επίπεδο $x+z=1$.

$f(x,y,z) = x+y+z$

$g_1(x,y,z) = x^2+y^2 = 2$

$g_2(x,y,z) = x+z = 1.$

$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \iff$

$\iff (1,1,1) = \lambda_1(2x, 2y, 0) + \lambda_2(1,0,1).$

$\therefore$ ① $1 = 2\lambda_1 x + \lambda_2$

② $1 = 2\lambda_1 y \Rightarrow y, \lambda_1 \neq 0$

③ $1 = \lambda_2$

④ $x^2 + y^2 = 2$

⑤ $x + z = 1.$

$1,3 \Rightarrow 2\lambda_1 x = 0$ ↗ $\lambda_1 = 0 \rightarrow\leftarrow$ με ② ↘ $x = 0.$

Για $x = 0$: ④ $\Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

⑤ $\Rightarrow z = 1.$

Κ.Σ: $(0, \sqrt{2}, 1)$, $(0, -\sqrt{2}, 1).$

$f(0, 2, 1) = 1 + \sqrt{2}$ Α.Μ.

$f(0, -2, 1) = 1 - \sqrt{2}$ Α.Ε.

- Αφού η f είναι συνεχής σε συμπαγές σύνολο.

③ Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $F(x,y,z) = xyz$.
στο επίπεδο $x + 2y + 3z - 1 = 0 = g(x,y,z).$

$\nabla F = \lambda \nabla g \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (yz, xz, xy) = \lambda (1, 2, 3).$

① $yz = \lambda$

② $xz = 2\lambda$

③ $xy = 3\lambda$

④ $x + 2y + 3z = 1$

** Αποφεύγουμε διαίρεση για να μη χάσουμε λύσεις!!!

$1,2 \Rightarrow yz = 2xz \Rightarrow z(2x-y)=0 \quad \begin{cases} z=0 \\ x=2y. \end{cases}$

$z=0$: $\quad ① \Rightarrow \lambda = 0$

$③ \Rightarrow xy = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$④ \Rightarrow x+2y = 1$

Αν $x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$

Αν $y=0 \Rightarrow x=1$

Λύσεις: $\vec{x_1} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$

$\vec{x_2} = (1, 0, 0)$

$x=2y$: $\quad ① \Rightarrow yz = \lambda$ (το ίδιο και η ②)

$③ \Rightarrow 2y^2 = 3\lambda$

$\Big\} \; 2y^2 = 3yz \Rightarrow y(2y-3z)=0$

$\nearrow y=0 \Rightarrow x=0 \overset{④}{\Rightarrow} z=\frac{1}{3}$

$\searrow y=\frac{3}{2}z \Rightarrow x=3z \overset{④}{\Rightarrow} 3z+3z+3z=1 \Rightarrow z=\frac{1}{9}.$

$\Rightarrow y=\frac{1}{6}, \quad x=\frac{1}{3}$

Λύσεις: $\vec{x_3} = \left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$

$\vec{x_4} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}\right).$

$F(\vec{x_1}) = F(\vec{x_2}) = F(\vec{x_3}) = 0$

$F(\vec{x_4}) = \frac{1}{3^3 \cdot 2}$

Δεν είναι απόλυτα... ακρότατα αφού για παράδειγμα $F \to +\infty$ όταν $x,y \to -\infty$ και $z \to +\infty$ (μπορεί να γίνει στο επίπεδο).

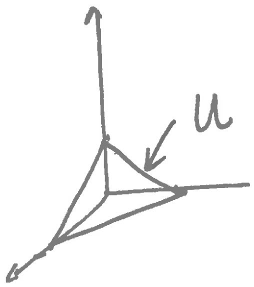
και $F \to -\infty$ όταν $x,y \to +\infty$ και $z \to -\infty$.

Τοπικά Ακρότατα;

Για $x,y,z \geq 0$ από εξίσωση επιπέδου $x+2y+3z=1$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq 2y \leq 1$ και $0 \leq 3z \leq 1$ στο πρώτο οκταμόριο του $\mathbb{R}^3$.

Το χωρίο $U = \{(x,y,z) \mid x+2y+3z=1,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq 2y \leq 1,\ 0 \leq 3z \leq 1\}$ είναι ένας συμπαγής περιορισμός για την f.

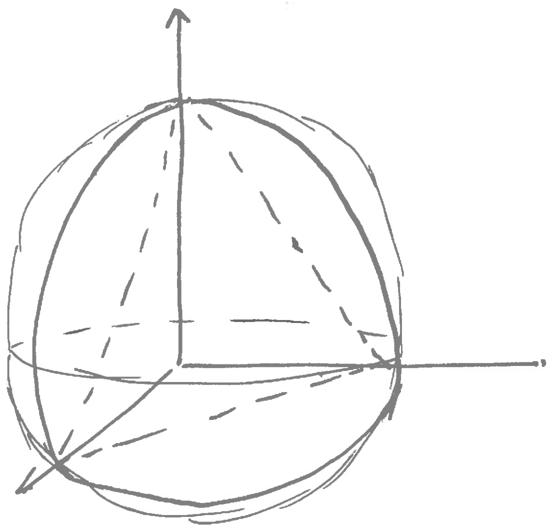


Στα σύνορα $x=0$ ή $y=0$ ή $z=0$
$\Rightarrow F \equiv 0$ στο ∂U

Άρα στο $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}\right)$ η F έχει Τ.Μ.

④ Έστω $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1$ με $x+y+z \geq 1\}$.

Βρείτε τα απόλυτα ακρότατα της $f(x,y,z) = xy$ στο D.



Είμαστε στη σφαίρα $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2=1$

- με επιπλέον περιορισμό $g_2(x,y,z) = x+y+z \geq 1$.

- Δηλαδή έχουμε επιφάνεια πάνω στη σφαίρα, με $\partial D = \{g_1 = 1\} \cap \{g_2 = 1\}$ μια καμπύλη.

Πρώτα βρίσκουμε τα Κ.Σ. της f στο "εσωτερικό" του D.

- πάνω στη σφαίρα.

$\nabla f = \lambda \nabla g_1 \Leftrightarrow (y,x,0) = \lambda(2x, 2y, 2z)$

① $y = 2\lambda x$

② $x = 2\lambda y$

③ $2\lambda z = 0$ → $\lambda = 0$ ή $z = 0$

④ $x^2+y^2+z^2 = 1$

$\lambda = 0$: $1,2 \Rightarrow x=y=0 \overset{4}{\Rightarrow} z = \pm 1$: $(0,0,1) \in D$
$(0,0,-1) \notin D$ $(x+y+z \geq 1)$

$z = 0$: $1,2 \Rightarrow y = 4\lambda^2 \cdot y \Rightarrow y(1-4\lambda^2) = 0$

→ $y = 0 \overset{2}{\Rightarrow} x = 0$ $\rightarrow\leftarrow$

→ $\lambda = \pm\frac{1}{2} \overset{1,2}{\Rightarrow} x = \pm y \overset{4}{\Rightarrow} 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \in D$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \notin D$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \notin D$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \notin D$.

$\therefore$ Μόνο $\vec{x_1} = (0,0,1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \vec{x_2}$

∂D: 2 περιορισμοί $g_1 = x^2+y^2+z^2=1$ & $g_2 = x+y+z=1$.

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \iff (y, x, 0) = \lambda_1(2x, 2y, 2z) + \lambda_2(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} ① & y = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ ② & x = 2\lambda_1 y + \lambda_2 \end{array}\right\} y - x = 2\lambda_1(x-y) \Rightarrow (x-y)(2\lambda_1+1)=0 \begin{array}{l} \nearrow x=y \\ \searrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

③ $0 = 2\lambda_1 z + \lambda_2$

④ $x^2+y^2+z^2=1$

⑤ $x+y+z=1$

$$x=y: \left.\begin{array}{l} 4:\ 2x^2+z^2=1 \\ 5:\ 2x+z=1 \end{array}\right\} 2x^2+(1-2x)^2=1 \Rightarrow 6x^2-4x=0 \Rightarrow x=0, \tfrac{2}{3}$$

$\nearrow x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=1 \qquad (0,0,1)=\vec{x_3}$

$\searrow x=\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3} \Rightarrow z=-\frac{1}{3} \qquad \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)=\vec{x_4}$.

$$\lambda_1=-\tfrac{1}{2}: \left.\begin{array}{ll} ① \Rightarrow y=-x+\lambda_2 & (\text{το ίδιο η } 2) \\ ③ \Rightarrow z=\lambda_2 & \end{array}\right\} x+y=z.$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=z \\ ⑤\ x+y+z=1 \end{array}\right\} 2z=1 \Rightarrow z=\tfrac{1}{2} \quad \& \quad x+y=\tfrac{1}{2}$$

$$4 \Rightarrow x^2+\left(\tfrac{1}{2}-x\right)^2+\tfrac{1}{4}=1 \Rightarrow 2x^2-x+\tfrac{1}{2}=1 \Rightarrow 2x^2-x-\tfrac{1}{2}=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$$\vec{x_5}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}\right) \qquad \vec{x_6}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$f(\vec{x_1})=0 \qquad f(\vec{x_2})=\frac{1}{2}$

$f(\vec{x_3})=0 \qquad f(\vec{x_4})=\frac{4}{9}$

$f(\vec{x_5})=f(\vec{x_6})=\frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{16}=\frac{1-5}{16}=-\frac{1}{4}$

D συμπαγές
∴ Α.Ε. στα $\vec{x_5}, \vec{x_6}$
Α.Μ. στο $\vec{x_2}$.

5 ~~Πα~~ Παράδειγμα: Έστω $A=(a_{ij})$ ένας συμμετρικός πίνακας $n\times n$, και $f(\vec{x})=\langle A\vec{x},\vec{x}\rangle=\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$

Να βρεθούν τα ακρότατα της f στη μοναδιαία σφαίρα $S=\{\vec{x} \mid \|\vec{x}\|=1\}$.

$$g(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad f=\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$$

$$\nabla f=\lambda\nabla g \iff \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j+\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j+\dots \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_i,\ \dots,\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j+\sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i\Big)=$$

$$=\lambda\cdot(2x_1,2x_2,\dots,2x_n)$$

$$\iff \cancel{2}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j,\ \dots,\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\Big)=\cancel{2}\lambda\vec{x}$$

$\iff A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ Κρίσιμα σημεία στις ιδιοτιμές!!

Α.Μ. εκεί όπου λ μέγιστο και Α.Ε. εκεί όπου λ ελάχιστο αφού $f(\vec{x})=\langle A\vec{x},\vec{x}\rangle=\langle\lambda\vec{x},\vec{x}\rangle=\lambda\|\vec{x}\|^2=\lambda$.

<u>Θεώρημα</u>: Μέσω πολλ. Lagrange: Αν A $n\times n$ συμμετρικός πίνακας τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ τ.ω. $A\vec{v}_i=\lambda_i\vec{v}_i$.

Θεώρημα Αντιστροφής (Αντιστρόφου Συναρτήσεως / Inverse F'n Thm).

$n=1$: $\quad f: I \to J \qquad I, J \subset \mathbb{R}$

Αν $f'(x_0) > 0$ και f είναι C^1, τότε $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$

$\therefore$ Η f είναι αύξουσα σε ένα διάστημα γύρω από το x_0

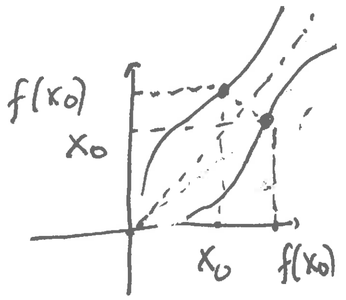
$\therefore$ Η f είναι αντιστρέψιμη σε ένα διάστημα γύρω από το x_0.

Δηλαδή υπάρχει $\bar{I} \ni x_0$ και $\bar{J} \ni f(x_0)$ διαστήματα έτσι ώστε η f να έχει μια C^1 αντίστροφη

$$f^{-1}: \bar{J} \to \bar{I}$$

$$\left(f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall x \in \bar{I} \text{ και } y \in \bar{J} \right)$$

$$\frac{d}{dy}\Big(f(f^{-1}(y))\Big) = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{\underbrace{f'(f^{-1}(y))}_{\neq 0 \text{ αφού } f'>0 \text{ στο } \bar{J}.}}$$

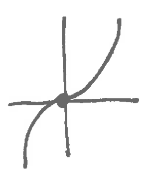


$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

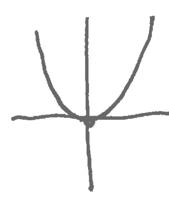
ή $$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Παρόμοια, αν $f'(x_0) < 0$ και f C^1, τότε η f είναι αντιστρέψιμη γύρω από το x_0.

Αν $f'(x_0) = 0$? Δεν ξέρουμε σίγουρα - κάποτε ναι και κάποτε όχι



$f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $f'(x_0) = 0$ — αντιστρέψιμη γύρω από το x_0.



$f(x) = x^2$, $x_0 = 0$, $f'(x_0) = 0$ — όχι αντιστρέψιμη σε γειτονιά του x_0.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ πότε θα είναι αντιστρέψιμη σε γειτονιά του x_0;

• Παράδειγμα **

$$f(x,y) = (ax+by,\ cx+dy) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ γραμμικός μετασχηματισμός.

$$= (u(x,y),\ v(x,y))$$

f αντιστρέψιμη ανν $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ μπορούμε να βρούμε τα (x,y) ως προς (u,v)

$\Leftrightarrow$ ορίζεται ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} του A

τ.ω. $(x,y) = A^{-1}(u,v)$

$\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

<u>Παρόμοια</u> $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $F(x) = Ax$ A: $n \times n$ πίνακας

F αντιστρέψιμη ανν $\det A \neq 0$.

Υπενθύμιση: $DF(x) = A$ $\forall x$.

• Για γενική συνάρτηση $F(x) \approx F(x_0) + DF(x_0)(x - x_0)$.

αντιστρέψιμη αν $\det(DF(x_0)) \neq 0$.

• $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται <u>μετασχηματισμός</u>

παίρνει n-διάστατα διαν. σε n-διάστατα διανύσματα.

<u>Θεώρημα Αντίστροφου Συνάρτησης:</u>

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και

$F: U \to \mathbb{R}^n$ μια C^1 συνάρτηση.

Έστω $x_0 \in U$ τ.ω. $\det(DF(x_0)) \neq 0$.

Τότε η F είναι τοπικά αντιστρέψιμη γύρω από το x_0, δηλαδή υπάρχει μια περιοχή V του x_0 και μια περιοχή W του $F(x_0)$ (περιοχή ≡ ανοικτό υποσύνολο) έτσι ώστε $F: V \to W$ να έχει συνεχή αντίστροφη

$$F^{-1}: W \to V.$$

Επιπλέον η F^{-1} είναι C^1 στο W και $\forall y \in W$

$$D(F^{-1})(y) = \left[DF\left(F^{-1}(y)\right)\right]^{-1}$$

όπου το δεξί μέλος είναι ο αντίστροφος πίνακας της Ιακωβιανής $[DF]$ στο σημείο $F^{-1}(y)$.

* <u>Προσοχή.</u> Το Θεώρημα μας δείχνει μόνο την αντιστρεψιμότητα σε μια μικρή γειτονιά του x_0, όχι σε όλο το π.ο. της F.
. Τοπική αντιστρεψιμότητα, όχι ολική.

<u>Παράδειγμα:</u> ① $F(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ $\quad F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\therefore J_F(x,y) = \det(DF)(x,y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^x(\cos^2 y + \sin^2 x) = e^x \neq 0.$$

$\therefore$ F τοπικά αντιστρέψιμη $\forall (x,y)$.

Όμως $F(x,y) = F(x, y + 2\pi k)$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ η F δεν είναι 1-1 στο $\mathbb{R}^2$

$\therefore$ δεν είναι ολικά αντιστρέψιμη.

② Έστω $F(x,y) = \left(\dfrac{x^4+y^4}{y} \, , \, \sin y + \cos x \right)$ για $y \neq 0$.

$$= \big(u(x,y), \, v(x,y)\big)$$

Δείξτε ότι η F είναι αντιστρέψιμη σε μια περιοχή του $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και υπολογίστε $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial v}$ στο $F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi^3}{8}, 1\right)$

$$[DF] = \begin{bmatrix} 4x^3/y & -x^4/y^2 + 3y^2 \\ -\sin x & \cos y \end{bmatrix}$$

$$[DF]\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 4 \cdot \pi^2/4 & -\pi^2/4 + 3 \cdot \pi^2/4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_x & u_y \end{array} \\ \begin{bmatrix} \pi^2 & \pi^2/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} v_x & v_y \end{array} \end{array}$$

$J_F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \pi^2/2 \neq 0 \quad \therefore$ F αντιστρέψιμη σε γειτονιά του $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\left([DF]\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right)^{-1} = \frac{2}{\pi^2} \begin{bmatrix} 0 & -\pi^2/2 \\ 1 & \pi^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{J_F} \begin{bmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{bmatrix}$$

$[DF^{-1}](u,v) = [DF]^{-1}\left(F^{-1}(u,v)\right) = \begin{bmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{bmatrix}$ από Θ. Αντιστρόφου.

$$\therefore \quad \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\pi^3}{8}, 1\right) = \frac{1}{J_F} v_y = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\pi^3}{8}, 1\right) = \frac{1}{J_F}(-u_y) = -1$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{\pi^3}{8}, 1\right) = \frac{1}{J_F}(-v_x) = \frac{2}{\pi^3}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}\left(\frac{\pi^3}{8}, 1\right) = \frac{1}{J_F} u_x = 2$$

③ $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} , \dfrac{xy}{x^2+y^2} \right)$ για $(x,y) \neq (0,0)$

$$J_F(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\overbrace{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2x}^{=4xy^2}}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{\overbrace{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}^{=-4yx^2}}{(x^2+y^2)^2} \\[2ex] \dfrac{\overbrace{y(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}^{=y(y^2-x^2)}}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{\overbrace{x(x^2+y^2)-xy\cdot 2y}^{=x(x^2-y^2)}}{(x^2+y^2)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4x\cdot y^2 \cdot x(x^2-y^2) + 4yx^2\cdot y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4} = 0 \qquad \forall (x,y) \in Df.$$

Παρατήρηση. Αν $u = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $v = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, τότε

$$u^2 + 4v^2 = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot \left[x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 \right] = 1. \quad \forall (x,y) \in Df.$$

Η f "συρρικνώνει" το 2-διάστατο χώρο σε καμπύλη.

Δεν είναι 1-1 !