$\therefore \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=0 \quad \forall i$

$\therefore \nabla f(x_0)=\vec{0}.$

$\square$

Παραδείγματα:

① $f(x,y)=-x^2-y^2$

$f_x=-2x \quad f_y=-2y \qquad \nabla f=0 \Leftrightarrow x=y=0.$

Κρίσιμο σημείο το $(0,0)$

~~Από γραφική φαίνεται~~ $f(0,0)=0 > f(x,y)=-x^2-y^2 \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$

$\therefore$ η f έχει Τ.Μ. στο $(0,0)$.

(& ολικό μέγιστο)

② $f(x,y)=x^2+y^2 \qquad \nabla f=0 \Leftrightarrow x=y=0$

$f(0,0)=0 < f(x,y)=x^2+y^2 \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$

$\therefore$ Τ.Ε. στο $(0,0)$ (& ολικό ελάχιστο)

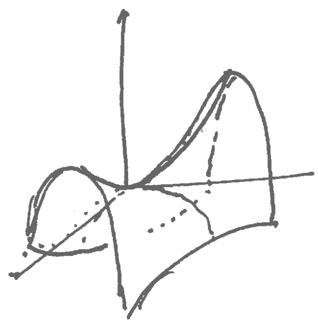
③ $f(x,y)=x^2-y^2 \qquad \nabla f=0 \Leftrightarrow x=y=0$

$f(x,0)=x^2 > f(0,0)$ για $x\neq 0$

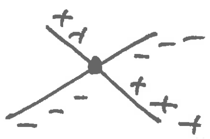
$f(0,y)=-y^2 < f(0,0)$ για $y\neq 0$.

ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο τοπικό.

-είναι σαγματικό σημείο. (σάγμα = σαμάρι = σέλλα)



• Έχει δύο κατευθύνσεις (μονοπάτια) που περνούν από το $(0,0)$ και στο ένα παίρνει μόνο θετικές τιμές ενώ στο άλλο μόνο αρνητικές.



Κριτήριο 2ης παραγώγου για $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Αν $f'(x_0)=0$ $\nearrow f''(x_0)>0 \quad x_0$ Τ.Ε.

$\searrow f''(x_0)<0 \quad x_0$ Τ.Μ. $\Big\}$ Από ανάπτυγμα Taylor.

$f_{x_i x_j}(x_0)$ σε πολλές κατευθύνσεις το ίδιο και $\therefore D_v f$

πρέπει να βεβαιωθούμε ότι μελετάμε όλες.

<u>Το κριτήριο της Εσσιανής: για τοπικά ακρότατα:</u>

Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^3 με $Df(x_0)=0$

Taylor: $$f(x_0+h)-f(x_0) = \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)\cdot h, h\rangle + R_2(x_0+h, x_0)$$

με $\dfrac{R_2(x_0+h; x_0)}{\|h\|^2} \to 0$ όταν $h \to 0$

Ενώ $$\left|\langle Hf(x_0)h, h\rangle\right| = \left|\sum_{i,j} f_{x_i x_j}(x_0) h_i h_j\right| \le \sum_{i,j} |f_{x_i x_j}(x_0)||h_i||h_j|$$

$$\le n^2 \sup_{i,j} |f_{x_i x_j}(x_0)| \, \|h\|_2^2 \le K_2 \|h\|_2^2$$

$$\cancel{\ge \frac{1}{K!}\sum_{i,j} |f_{x_i x_j}(x_0)||h_i||h_j| \ge \frac{K^2}{cK!} \sup_{i,j}}$$

$$\therefore -K_2\|h\|_2^2 \le \langle Hf(x_0)h, h\rangle \le K_2\|h\|_2^2.$$

∴ Αν $\langle Hf(x_0)h, h\rangle$ δε μηδενίζεται για $h \neq 0$, τότε κυριαρχεί αφού είναι όρος 2ου βαθμού ως προς h.

<u>Άρα:</u> Αν $\langle Hf(x_0)h, h\rangle > 0$ $\forall h \neq 0$ ∴ $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$

σε μια γειτονιά

∴ x_0 Τ.Ε

Αν - " - < 0 $\forall h \neq 0$ ∴ $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$

∴ x_0 Τ.Μ.

<u>Τετραγωνική Μορφή:</u>

<u>Ορισμός:</u> Έστω $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ ένας συμμετρικός πίνακας $(a_{ij} = a_{ji})$ και $Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η <u>τετραγωνική μορφή</u>

$$Q_A(h) = \langle Ah, h\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

που αντιστοιχεί στον A.

Ο πίνακας A λέγεται <u>θετικά ορισμένος</u> αν υπάρχει $M > 0$ τ.ω. $Q_A(h) \geq M\|h\|^2$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$

και <u>αρνητικά ορισμένος</u> αν υπάρχει $M > 0$ τ.ω. $Q_A(h) \leq -M\|h\|^2$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

$(Q_A(0) = 0 \quad \forall A)$.

$Q_A(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$ είναι ομογενές πολυώνυμο τάξης 2 στο $\mathbb{R}^n$ (hw 4)

αφού $Q_A(\lambda h) = \sum_{i,j} a_{ij} \lambda h_i \lambda h_j = \lambda^2 Q_A(h)$.

(γι' αυτό ονομάζεται "τετραγωνική" μορφή).

Έστω $S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}$ σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$.

S^{n-1} είναι συμπαγές σύνολο.

$Q_A(x)$ πολυωνυμική $\therefore$ συνεχής στο $\mathbb{R}^n$.

Από Θεωρ. Ακραίων τιμών $\exists x_0, x_0' \in S^{n-1}$

τ.ω. $Q_A(x_0) = \sup_{x \in S^{n-1}} \{ Q_A(x) \} = M$

$Q_A(x_0') = \inf_{x \in S^{n-1}} \{ Q_A(x) \} = m$

$Q_A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|^2} Q_A(x)$

& $m \le Q_A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \le M$

$\therefore \; m\|x\|^2 \le Q_A(x) \le M\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$! (hw 2).

Άρα αν $M = \sup_{x \in S^{n-1}} Q_A(x) < 0 \Rightarrow Q_A(h)$ αρνητικά ορισμένη

και αν $m = \inf_{x \in S^{n-1}} Q_A(x) > 0 \Rightarrow Q_A(h)$ θετικά ορισμένος.

<u>Λήμμα 4</u> Κριτήριο Sylvester: Έστω $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ ένας συμμετρικός $n\times n$ πίνακας.

1. Ο A είναι θετικά ορισμένος ανν

$$\Delta_K := \det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1K} \\ \vdots & & \\ a_{K1} & \cdots & a_{KK}\end{bmatrix} > 0 \qquad \forall K=1,\dots,n$$

2. Ο A είναι αρνητικά ορισμένος ανν

$$\Delta_1<0,\quad \Delta_2>0,\quad \Delta_3<0 \;\dots$$

Δ_K: ελάσσονες ορίζουσες

$\Delta_1 = a_{11}$ & $\Delta_n = \det(A)$.

<u>Ειδική περίπτωση:</u> $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d\end{pmatrix}$

A θετικά ορισμένος ανν $a>0$ & $\det A = ad-b^2>0$

A αρνητικά ορισμένος ανν $a<0$ & $\det A = ad-b^2<0$.

<u>Απόδειξη για $n=2$:</u> $a,d\neq 0$ για θετικά/αρνητικά ορισμένος.

$$\varphi_A(x,y) = ax^2+2bxy+dy^2 =$$

$$= a\left(x^2+\frac{2b}{a}xy\right)+dy^2 =$$

$$= a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2 - a\cdot\frac{b^2}{a^2}y^2 + dy^2 =$$

$$= a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{1}{a}(ad-b^2)y^2 \quad >0 \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$$

ανν $a>0$ & $ad-b^2>0$

<0 ανν $a<0$ & $ad-b^2>0$.

Θεώρημα 5 (Τοπικών Ακροτάτων)

Αν $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι C^3 και το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της τότε:

1. Αν η Εσσιανή $Hf(x_0)$ είναι θετικά ορισμένη τότε το x_0 είναι τοπικό ελάχιστο της f.

2. Αν η Εσσιανή $Hf(x_0)$ είναι αρνητικά ορισμένη τότε το x_0 είναι τοπικό μέγιστο της f.

Απόδειξη: Ανάπτυγμα Taylor τάξης 2:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \cancelto{0}{\nabla f(x_0) \cdot h} + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0) h, h \rangle + R_2(x_0, h)$$

με $\dfrac{R_2(x_0,h)}{\|h\|^2} \to 0$ όταν $h \to 0$ αφού C^3.

Δηλαδή για $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ τ.ω.

$$\left| \frac{R_2(x_0,h)}{\|h\|^2} \right| < \varepsilon \quad \text{για} \quad \|h\| < \delta.$$

$$\Rightarrow -\varepsilon \|h\|^2 < R_2(x_0,h) < \varepsilon \cdot \|h\|^2$$

1. $Hf(x_0)$ θετ. ορ. $\Rightarrow \exists M > 0$ τ.ω. $\langle Hf(x_0) h, h \rangle > M \|h\|^2$

Έστω $\varepsilon = \frac{M}{4}$. $\to \exists \delta(\varepsilon)$ τ.ω. για $\|h\| < \delta$

$$\therefore f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2} \langle Hf(x_0) h, h \rangle + R_2(x_0,h)$$

$$> \frac{1}{2} M \|h\|^2 - \varepsilon \|h\|^2 = \frac{M}{4} \cdot \|h\|^2 > 0$$

$$\forall h \neq 0 \quad \|h\| < \delta$$

$\therefore x_0$ τοπικό ελάχιστο.

Το Τ.Μ. παρόμοια

QED.

Παραδείγματα:

① $f(x,y)=x^2+y^2$

$f_x=2x=0 \Rightarrow x=0$ $\quad f_y=2y=0 \Rightarrow y=0$

$(0,0)$: Κρίσιμο σημείο.

$$Hf=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1=2>0$

$\Delta_2=4>0$

$\therefore Hf$ θετικά ορισμένη στο $(0,0)$

$\therefore (0,0)$ Τ.Ε.

② $f(x,y)=x^2-y^2$ $\quad (0,0)$ κρίσιμο σημείο.

$$Hf=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1=2>0$

$\Delta_2=-4<0$.

(− + για αρν. ορ.)

$\therefore Hf$ δεν είναι ούτε θετικά ορισμένη ούτε αρνητικά ορισμένη.

- Ξέρουμε ότι το x_0 είναι σαγματικό σημείο.

③ $f(x,y)=xy$ $\quad f_x=y=0 \Rightarrow y=0$ $\quad f_y=x=0 \Rightarrow x=0$

$(0,0)$ Κ.Σ.

$$Hf=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1=0$

$\Delta_2=-1$. ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη.

· Ξέρουμε ότι είναι σαγματικό σημείο

$$\left.\begin{array}{ll} f(x,x)=x^2>0 & \forall x\neq 0 \\ f(x,-x)=-x^2<0 & \forall x\neq 0 \end{array}\right\}$$ η f παίρνει και ⊕ & ⊖ ~~αρνητικές~~ τιμές κοντά στο $(0,0)$

$\therefore (0,0)$ σαγματικό σημείο.

③′ $f(x,y)=-x^2-y^2$ $\quad (0,0)$ Κ.Σ.

$$Hf(0,0)=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1=-2<0$ $\quad \Delta_2=4>0$

είναι αρνητικά ορισμένη $\Rightarrow$ Τ.Ε. στο $(0,0)$.

Συμμετρικοί πίνακες διαγωνοποιούνται:

$$A = O \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} O^T$$

όπου $O \in O(n)$ $\quad (O^T = O^{-1} \ - \det O = \pm 1)$

και λ_i οι ιδιοτιμές του A.

O: αλλαγή βάσης

Μπορούμε ν.δ.ο.

$$\left(\min_i \{\lambda_i\}\right) \|\vec{x}\|^2 \leq \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle \leq \left(\max_i \{\lambda_i\}\right) \|\vec{x}\|^2$$

(γράφοντας το $\vec{x}$ ως προς τη νέα βάση).

A: θετικά ορισμένος αν $\lambda_i > 0$ $\forall i$

A: αρνητικά ορισμένος αν $\lambda_i < 0$ $\forall i$.

Ουσιαστικά έχουμε : $\Delta_k = \lambda_1 \cdots \lambda_k$

A: θετ. ορ. αν $\Delta_k > 0$ $\forall k$

A: αρν. ορ. αν $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, $\Delta_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$

$(\lambda_i < 0 \ \forall i)$ $\quad \ldots\ldots$

<u>Πρόταση 6.</u> Αν x_0 Κ.Σ. της $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $Hf(x_0)$ δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη αλλά $\Delta_k \neq 0$ $\forall k$, τότε το x_0 είναι <u>σαγματικό σημείο.</u>

- Αν $\Delta_k = 0$ για κάποιο k σε ένα κρίσιμο σημείο τότε η μέθοδος της Εσσιανής δε δίνει τη φύση των Κ.Σ.

∴ έχουμε ένα <u>εκφυλισμένο σημείο</u> ⇒ ειδική μελέτη των τιμών της f ανά περίπτωση.

<u>Παράδειγμα.</u>

④ $f(x,y) = x^3y + y^3x$

$$f_x = 3x^2y + y^3 = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f_y = x^3 + 3y^2x = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ μοναδικό Κ.Σ.

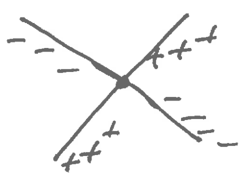
$$Hf = \begin{bmatrix} 6xy & 3x^2+3y^2 \\ 3x^2+3y^2 & 6yx \end{bmatrix} \qquad Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ εκφυλισμένο.

$f(x,y) = xy(x^2+y^2)$

$f(x,x) = 2x^4 > 0$ για $x \neq 0$

$f(x,-y) = -2x^4 < 0$ για $x \neq 0$



ούτε τοπικό ελάχιστο
ούτε τοπικό μέγιστο.

⑤ $f(x,y) = x + x^2 + xy + y^3$

$f_x = 1 + 2x + y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}(1+y)$

$f_y = x + 3y^2 = 0$

$\Big\}\ 3y^2 - \frac{1}{2}(1+y) = 0 \Rightarrow 6y^2 - y - 1 = 0$

$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm 5}{12} \begin{array}{l} \nearrow 1/2 \\ \searrow -\frac{1}{3} \end{array}$

$y = \frac{1}{2} \quad x = -\frac{3}{4}$

$y = -\frac{1}{3} \quad x = -\frac{1}{3}$

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y \end{bmatrix}$$

$$Hf\left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = -4-1 < 0 \end{array}\right\} \text{σαγματικό}$$

$$Hf\left(-\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 6-1 = 5 > 0 \end{array}\right\} \text{Τ.Ε.}$$

skip.

⑥ $f(x,y) = 2(x^2+y^2)\, e^{-x^2-y^2}$

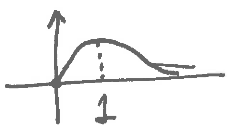
$f_x = 4x e^{-x^2-y^2} + 2(x^2+y^2)\cdot(-2x)\, e^{-x^2-y^2} = 4x e^{-x^2-y^2}(1-x^2-y^2)$

$f_y = 4y e^{-x^2-y^2}(1-x^2-y^2).$

Κ.Σ. $: f_x = f_y = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$: κύκλος ακτίνας 1

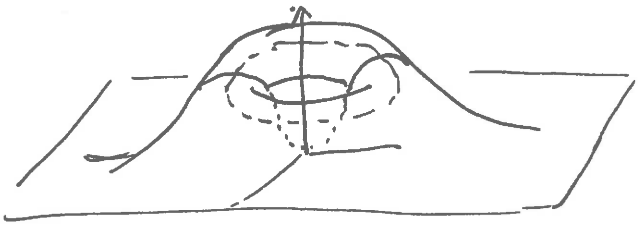
ή $(0,0)$.

Για $r = x^2+y^2 \quad f = 2r e^{-r} \quad f' = 2e^{-r} - 2re^{-r} = 2e^{-r}(1-r)$



Τ.Μ. στο $r=1$.

Τ.Ε. στο $r=0$



Κρατήρας.

⑦ Η γραφική παράσταση της $g(x,y)=\frac{2}{x^2-y^2}$ είναι μια επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3$, S.
Βρείτε τα σημεία της S που είναι τα πιο κοντινά στο $(0,0,0)$.

$$S=\left\{\left(x,y,\frac{2}{x^2-y^2}\right) \,\middle|\, x\neq y,\ x\neq -y\right\}.$$

$d(\vec{p},\vec{0})=\sqrt{x^2+y^2+\left(\frac{2}{x^2-y^2}\right)^2}$ ελάχιστη ανν $f(x,y)=d^2$ ελάχιστη.

$$f(x,y)=x^2+y^2+4\left(\frac{1}{x^2-y^2}\right)^2$$

$$f_x=2x-2\frac{4\cdot 2x}{(x^2-y^2)^3}=2x\,\frac{(x^2-y^2)^3-8}{(x^2-y^2)^3}$$

$$f_y=2y+2\frac{4\cdot 2y}{(x^2-y^2)^3}=2y\cdot\frac{(x^2-y^2)^3+8}{(x^2-y^2)^3}$$

$f_x=0 \Rightarrow x=0$ ή $x^2-y^2=2$

$f_y=0 \Rightarrow y=0$ ή $x^2-y^2=-2$

$(0,0)$ $\quad x=0$ & $x^2-y^2=-2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$

$x^2-y^2=2$ & $y=0 \Rightarrow x=\pm 2.$

$x^2-y^2=2$ & $x^2-y^2=-2$ $\rightarrow\leftarrow$

$(0,0)$ $\quad (0,\pm\sqrt{2})$, $\quad (\pm\sqrt{2},0)$

Δ.Ο.

$$f_{xx} = 2 - \frac{16}{(x^2-y^2)^3} + \frac{16x \cdot 3 \cdot 2x}{(x^2-y^2)^4}$$

$$f_{xy} = + \frac{16x(-2y) \cdot 3}{(x^2-y^2)^4} = - \frac{16 \cdot 6\, y\, x}{(x^2-y^2)^4}$$

$$f_{yy} = 2 + \frac{16}{(x^2-y^2)^3} + \frac{16y(+3)(+2y)}{(x^2-y^2)^4}$$

	f_{xx}	f_{xy}	f_{yy}	Δ_1	Δ_2
$(0,\sqrt{2})$	$2+\frac{16}{8}=4$	0	$2-\frac{16}{8}+\frac{16 \cdot 6 \cdot 2}{16}=12$	4	48
$(0,-\sqrt{2})$	4	0	12	4	48
$(\sqrt{2},0)$	$2-\frac{16}{8}+\frac{16 \cdot 6 \cdot 2}{16}=12$	0	$2+\frac{16}{8}=4$	12	48
$(-\sqrt{2},0)$	12	0	4	12	48.

όλα Τ.Ε.

$f \geq 0$ και $f \to \infty$ όταν $x,y \to \infty$
ή $(x,y) \to (0,0)$
ή $(x,y) \to (x, \pm x)$

άρα και ολικά ελάχιστα.

αφού $f(0,\pm\sqrt{2}) = f(\pm\sqrt{2},0)$

Απόλυτα Ακρότατα:

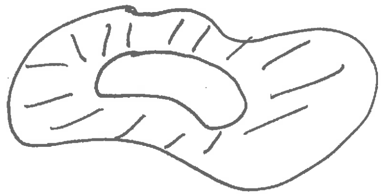
Ορισμός: Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το σημείο $x_0 \in A$ ονομάζεται:

1. απόλυτο μέγιστο της f αν $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in A$
2. απόλυτο ελάχιστο της f αν $f(x) \ge f(x_0)$ $\forall x \in A$.

Αν x_0 είναι Α.Μ. ή Α.Ε. τότε ονομάζεται απόλυτο ακρότατο της f

(απόλυτο ή ολικό).

Υπενθύμιση: Αν A κλειστό και φραγμένο και f συνεχής τότε $\exists x_0$ & x_0' στο A τ.ω. x_0 Α.Μ. & x_0' Α.Ε (Θ. Ακραίων σημείων).



Αν x_0, x_0' εσωτερικό σημείο της f τότε $\nabla f(x_0) = \nabla f(x_0') = 0$. αφού τα x_0 & x_0' τοπικά ακρότατα. Διαφορετικά $x_0, x_0' \in \partial A$.

Εύρεση Α.Α.

1. Εύρεση κρίσιμων σημείων. της f στο $A \setminus \partial A$.
2. Περιορισμός f στο ∂A και εύρεση κρίσιμων σημείων της εκεί
   - Αν ∂A δεν είναι λείο πρέπει να δούμε και το σύνορο του.
3. Υπολογισμός f σε όλα αυτά τα κρίσιμα σημεία και σύγκριση.

Παραδείγματα:

① Βρείτε τα Α.Α. της $f=2x^2+2y^2-x+y+1$ στο $D=\{x^2+y^2\le 1\}$

-ορίζονται αφού συνεχής σε κλειστό & φραγμένο

$f_x=4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

$f_y=4y+1=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{4}$

∂D: $\{(\cos t, \sin t) \mid t\in[0,2\pi]\}$

$g(t)=f(\cos t,\sin t)=2\cos^2 t+2\sin^2 t-\cos t+\sin t+1$

$=-\cos t+\sin t+3$

$g'(t)=\sin t+\cos t=0 \Leftrightarrow \tan t=-1 \Leftrightarrow t=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$

$g(\frac{3\pi}{4})=f(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})=+\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}+3=\sqrt2+3$ ← Α.Μ.

$g(\frac{7\pi}{4})=f(+\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2})=-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}+3=-\sqrt2+3$ Τ.Α

$\partial(\partial D)$: $g(0)=g(2\pi)=f(1,0)=2-1+1+1=3$

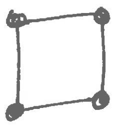
$f(\frac14,-\frac14)=2\cdot2\cdot(\frac14)^2-\frac14-\frac14+1=1-\frac14=\frac34$ ← Α.Ε

• Δε χρειάζεται η Hf!!!

② Υπολογίστε τα Α.Α. της $f(x,y)=2xy+x$ στο τετράγωνο

$R=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\}$

-υπάρχουν αφού f συνεχής σε κλειστό και φραγμένο.



$\left.\begin{array}{l} f_x=2y+1=0 \Rightarrow y=-1/2 \\ f_y=2x=0 \Rightarrow x=0. \end{array}\right\}(0,-\frac12)$

∂R:

$x=-1$: $f(-1,y)=-2y-1=g_1(y)$ $\quad g_1'(y)=-2\neq0$

$x=1$: $f(1,y)=2y+1=g_2(y)$ $\quad g_2'(y)=2\neq0$

$y=-1$: $f(x,-1)=-x=g_3(x)$ $\quad g_3'(x)=-1\neq0$

$y=1$ $\quad f(x,1)=3x=g_4(x)$ $\quad g_4'(x)=3\neq0$

+ 4 γωνίες. $\partial(\partial R)$.

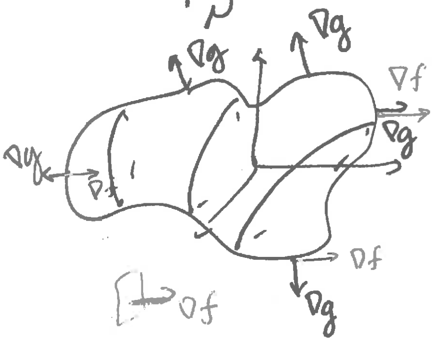
$f(0,-\frac12)=0\quad f(-1,-1)=1\quad f(-1,1)=-3$ ← Α.Ε $\quad f(1,-1)=-1\quad f(1,1)=3$: Α.Μ.

Πολλαπλασιαστές Lagrange:

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ θέλουμε να βρούμε τα Α.Α. της όταν την περιορίσουμε σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, S, που να περιγράφεται ως ισοϋψές σύνολο μιας συνάρτησης $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

$$S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid g(x)=c\}$$

$f|_S$: ο περιορισμός της f στο S



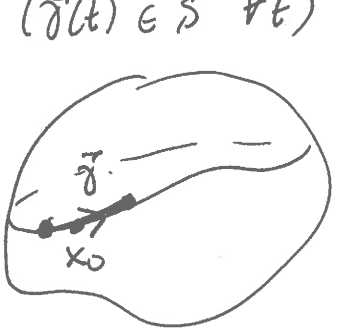
Έχουμε $f(x,y,z)$ και $S\subset\mathbb{R}^3$ μια επιφάνεια να βρούμε τα Α.Α. της f στην S

($f=$ σταθερά σε επίπεδα $\longrightarrow \nabla f$
f μέγιστη όταν $\nabla g \parallel \nabla f$).

Θεώρημα: (Πολλαπλασιαστών Lagrange)
Έστω $f: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ και $g: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ δύο C^1 συναρτήσεις σε A ανοικτό.
Έστω $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid g(x)=c\}$
Αν $f|_S$ έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0\in S$.
$(g(x_0)=c)$ και $\nabla g(x_0)\neq 0$, τότε υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τ.ω.

$$\nabla f(x_0)=\lambda\cdot\nabla g(x_0).$$

Απόδειξη: Έστω $\vec{\gamma}(t)$ για $t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$ C^1 καμπύλη στην S $(\vec{\gamma}(t)\in S\ \forall t)$ με $\vec{\gamma}(0)=x_0$



Τότε $h(t)=f(\gamma(t))$ έχει Τ.Α. στο $t=0$ όπου $h(0)=f(x_0)$

$\therefore$ Απ.Ι $h'(0)=0 \Rightarrow \nabla f(\gamma(0))\cdot\gamma'(0)=0$ (C^1).

$\Rightarrow \nabla f(x_0)\cdot\gamma'(0)=0$ $\forall$ καμπύλη γ που περνούν από το x_0 και βρίσκονται στην S

$\therefore$ $\nabla f(x_0) \perp$ στην επιφάνεια S.

Αφού S ισοϋψές σύνολο της g και $\nabla g(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow \nabla g(x_0)$ είναι επίσης κάθετη στην S.

$\Rightarrow \nabla g(x_0)$ & $\nabla f(x_0)$ συγγραμμικά $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ με $\nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0)$

QED

(Ισχύει γιατί τα g' παράγουν επίπεδο διάστασης $n-1$, με μόνο 1 κάθετη διεύθυνση).

Παραδείγματα:

① Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$f(x,y,z) = x-y$ στη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$.

$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$\nabla f = \lambda \nabla g \Leftrightarrow (1,-1,0) = \lambda(2x, 2y, 2z)$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2\lambda x = 1 \\ 2\lambda y = -1 \end{array}\right\} \lambda, x, y \neq 0 \quad \therefore x = \frac{1}{2\lambda} \quad y = -\frac{1}{2\lambda}$

$2\lambda z = 0 \Rightarrow z = 0$ αφού $\lambda \neq 0$

$x^2+y^2+z^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2}\cdot 2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \sqrt{2}$ Α.Μ.

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\sqrt{2}$ Α.Ε.

άρα και τοπικά ακρότατα αφού μοναδικά.