Θεώρημα Μέσης Τιμής: Θ.10.

Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f:A\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη.
Έστω $x,y\in A$ τ.ω. το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει
$\gamma(t)=x(1-t)+yt = x+t(y-x)$ για $t\in[0,1]$ να περιέχεται στο A. Τότε υπάρχει σημείο x_* στο ευθύγραμμο τμήμα τ.ω.

$$f(y)-f(x)=\langle \nabla f(x_*), y-x\rangle$$

<u>Απόδειξη</u> Έστω $h(t)=f(\gamma(t))$ $\quad f$ & γ διαφορίσιμη $\Rightarrow h$ διαφ.

Από ΘΜΤ Απειρ. Ι: στο $[0,1]$ $\quad \exists t_0\in(0,1)$ τ.ω.

$$h(1)-h(0)=h'(t_0).$$

$$h'(t_0)=\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t_0)=\nabla f(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)$$

Έστω $x_*=\gamma(t_0)=x+t_0(y-x)$

Αφού $h(1)=f(\gamma(1))=f(y)$

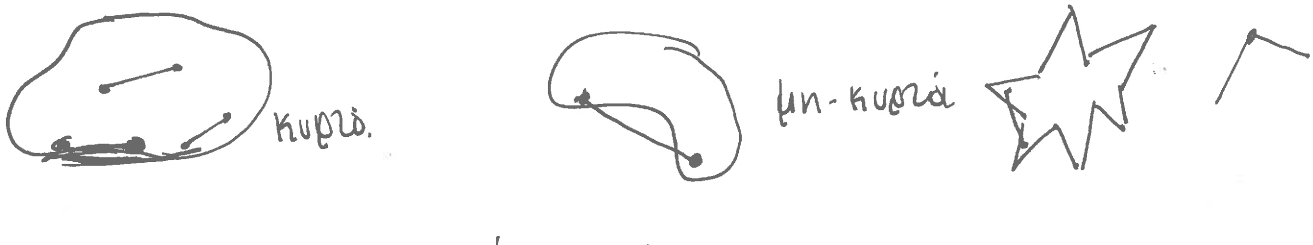
$h(0)=f(\gamma(0))=f(x)$

& $\gamma'(t_0)=y-x$

$$\therefore\ f(y)-f(x)=\nabla f(x_*)\cdot(y-x).$$

QED.

<u>Ορισμός</u>: $A\subset\mathbb{R}^n$ <u>κυρτό</u> αν $\forall x,y\in A$ $\quad \gamma(t)=x(1-t)+yt\in A\quad \forall t\in[0,1]$



Άρα το ΘΜΤ ισχύει σε κυρτά $\forall x,y\in A$.
*Δεν μπορεί να γίνει για διανυσματική $\vec{f}$: δεν έχουμε το ίδιο t_0.

<u>Πόρισμα 11</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ κυρτό και $f:A\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη.
Αν $\nabla f(x)=0$ $\forall x\in A$ τότε $f(x)=c$ σταθερά.

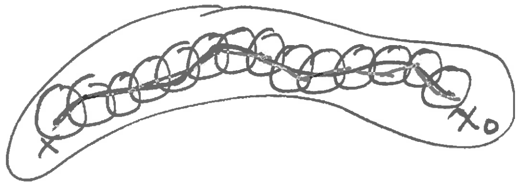
<u>Απόδειξη</u>. $\forall x,x_0\in A$ $\quad f(x)-f(x_0)=\langle\nabla f(x_*), x-x_0\rangle$ από ΘΜΤ αφού κυρτό

$=0 \Rightarrow f(x)=f(x_0)=c \quad \forall x\in A$ $\quad\square$

Ισχύει και για μη-κυρτά αλλά συνεκτικά κατά τόξα.

Πρόταση 12 Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και συνεκτικό κατά τόξα και $f: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Αν $\nabla f(x) = 0$ $\forall x \in A$ τότε $f(x) = c$ σταθερά.

"Απόδειξη"



$\exists\, \vec{\gamma}(t)$ από x στο x_0

Καλύπτουμε $\gamma(t)$ με ανοικτές μπάλες πεπερασμένες σε αριθμό

Δημιουργούμε νέο μονοπάτι από ευθείες.

ΘΜΤ σε κάθε ευθεία $\to f(x) = f(x_0)$

Παραδείγματα: ① Έστω $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ A ανοικτό, συνεκτικό κατά τόξα, τ.ω. $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$ (εξισώσεις Cauchy-Riemann - μιγαδική)

και $u^2(x,y) + v^2(x,y) = c \neq 0$ στο A.

Δείξτε ότι u, v σταθερές.

Αρκεί ν.δ.ο. $\nabla u = \nabla v = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2) = \frac{\partial}{\partial x}(c) \Rightarrow 2u \cdot u_x + 2v \cdot v_x = 0 \Rightarrow u \cdot u_x + v \cdot v_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u^2+v^2) = \frac{\partial}{\partial y}(0) \Rightarrow 2u\, u_y + 2v \cdot v_y = 0 \overset{C-R}{\Rightarrow} -u v_x + v \cdot u_x = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} u & v \\ v & -u \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} = 0$$ γραμμικό σύστημα σε κάθε (x,y).

$$\det M = -u^2 - v^2 = -c \neq 0.$$

$\Rightarrow u_x = v_x = 0$ μοναδική λύση.

$v_x = -u_y = 0 \Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u = c_1$

και $v_y = u_x = 0 \Rightarrow \nabla v = 0 \Rightarrow v = c_2$

Από Πρ. 12.

Πρόταση 13 Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A ανοικτό τ.ω. $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ συνεχής! $\forall (x,y) \in A$.

Τότε. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^b f(x,y)\,dy\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy$. (ολοκλ. μέσα στο A).

Απόδειξη: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^b f(x,y)\,dy\right)\Big|_{x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\int_a^b f(x,y)dy - \int_a^b f(x_0,y)dy\right]\frac{1}{x-x_0}$

$= \lim_{x\to x_0} \int_a^b \left(\frac{f(x,y)-f(x_0,y)}{x-x_0}\right) dy = \lim_{x\to x_0} \int_a^b f_x(x_*,y)\,dy$ x_* ανάμεσα στ x & x_0 ΘΜΤ.

$f(x,y)$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\times[a,b] \subset A$

$\therefore = \int_a^b \lim_{x\to x_0} f_x(x_*,y)\,dy = \int_a^b f_x(x_0,y)\,dy.$

$\square$

Πρόταση 14 $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(x,y)\,dy\right) = f(x,x) + \int_0^x f_x(x,y)\,dy$

για f C^1 στο $A \subset \mathbb{R}^2$. Άσκηση.

Θεώρημα Taylor:

Για $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $k+1$ φορές διαφορίσιμη, ο τύπος του Taylor δίνει.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k$$
$$+\frac{f^{(k+1)}(x_*)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$$

όπου x_* ανάμεσα στο x & x_0 & εξαρτάται από το x. - από ΘΘΑΛ και ολοκλήρωση κατά μέλη.

$$R_k(x,x_0)\ \frac{f^{(k+1)}(x_*)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$$: το υπόλοιπο τάξης k.

$$T_k(x,x_0)=\sum_{i=1}^{k}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$: το πολυώνυμο Taylor τάξης k. της f στο x_0.

Αν $f^{(k+1)}$ φραγμένη σε περιοχή του x_0

τότε $\lim_{x\to x_0}\left[R_k(x,x_0)\cdot\frac{1}{(x-x_0)^k}\right]=0$

και $T_k(x,x_0)$ είναι η καλύτερη πολυωνυμική προσέγγιση βαθμού k στην f κοντά στο x_0.

Χρησιμότητα: Αν το x_0 είναι τοπικό ακρότατο με $f'(x_0)=0$

τότε $$f(x)-f(x_0)=\frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2+\underbrace{R_2(x,x_0)}_{\sim(x-x_0)^3}$$

$$\approx\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$ για x αρκετά κοντά στο x_0

Αν $f''(x_0)>0 \Rightarrow f(x)>f(x_0)$ $\forall x$ αρκετά κοντά $\Rightarrow x_0$ τοπικό ελάχιστο

Αν $f''(x_0)<0 \Rightarrow f(x)<f(x_0)$ — " — $\Rightarrow x_0$ τοπικό μέγιστο

Συναρτήσεις $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$h = (h_1, \dots, h_n)$

<u>Θεώρημα 1.</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: A \to \mathbb{R}$.

- Τύπος του Taylor τάξης 1: Αν f διαφορίσιμη στο $x_0 \in A$.

τότε
$$f(x_0+h) = \overbrace{f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i}^{T_1(x_0+h,\, x_0)} + R_1(x_0+h, x_0)$$

όπου
$$\lim_{h \to 0} \frac{|R_1(h, x_0)|}{\|h\|} = 0$$

- Τύπος του Taylor τάξης 2: Αν f C^3 στο $x_0 \in A$

τότε
$$f(x_0+h) = \overbrace{f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \cdot h_i \cdot h_j}^{T_2(x_0+h,\, x_0)}$$
$$+ R_2(x_0+h, x_0)$$

όπου
$$\lim_{h \to 0} \frac{|R_2(x_0+h, x_0)|}{\|h\|^2}$$

<u>Απόδειξη:</u> Τάξης 1: Από διαφορισιμότητα

γραμμική προσέγγιση

$$R_1(h, x_0) = f(x_0+h) - T_1(x_0+h, x_0) = f(x_0+h) - L(x_0+h)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - T_1(x_0+h, x_0)}{\|h\|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{από διαφορισιμότητα}}}{=} 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{|R_1(h, x_0)|}{\|h\|} = 0.$$

Τάξης 2. Έστω $\vec{\gamma}(t) = x_0 + t h$ & $g(t) = f \circ \gamma(t)$.

$\therefore$ $f(x_0 + h) = g(1)$ $\quad$ $f(x_0) = g(1)$.

Μετατρέπουμε το πρόβλημα σε ανάπτυγμα Taylor για συνάρτηση μιας μεταβλητής.... κλασικό κόλπο.

$g(t)$ C^3 αφού f & γ C^3.

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(\tau)\,d\tau \qquad \text{ΘΘΑΛ} \quad g,\ C^1.$$

$$d\tau = -d(1-\tau)$$

$$= g(0) - \int_0^1 g'(\tau)\cdot d(1-\tau) =$$

∫ κατά μέλη

$$= g(0) - \left[(1-\tau)\cdot g'(\tau)\Big|_0^1 - \int_0^1 (1-\tau)\cdot g''(\tau)\,d\tau \right]$$

$$= g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1-\tau)\, g''(\tau)\cdot d\tau.$$

$$(1-\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2}\,d(1-\tau)^2$$

∫ κατά μέλη

$$= g(0) + g'(0) + \left[-\frac{1}{2}(1-\tau)^2 g''(\tau)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}(1-\tau)^2\cdot g'''(\tau)\,d\tau \right]$$

$$= g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}\cdot g''(0) + \int_0^1 \frac{1}{2}(1-\tau)^2\cdot g'''(\tau)\,d\tau.$$

$$g(0) = f(\gamma(0)) = f(x_0) \qquad \vec{\gamma}'(t) = \vec{h}, \quad \vec{\gamma}''(t) = \vec{0}$$

$$g'(0) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) = \nabla f(\gamma(0))\cdot \gamma'(0) = \nabla f(x_0)\cdot \vec{h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\cdot h_i$$

$$g''(0) = \frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma)(0) = \frac{d}{dt}\left(\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\cdot \gamma_i'(t)\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\gamma(t))\cdot\gamma_j'(t)\cdot\gamma_i'(t)\Big|_{t=0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\cdot \underbrace{\cancel{\gamma_i''(t)}}_{0\ \forall t}\Big|_{t=0}$$

$$\therefore\ g''(0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\cdot h_i h_j \qquad (\gamma_i(t) = x_{0,i} + t h_i)$$

Παρόμοια: $$g'''(t) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j \cdot \partial x_k}(x_0 + t h)\cdot h_i h_j h_k$$

$$\therefore\ R_2 = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-\tau)^2 \sum_{i,j,k} \underbrace{\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \cdot \partial x_k}(x_0 + \tau h)}_{\text{συνεχής}} h_i h_j h_k \, d\tau$$

$$\therefore\ |R_2| \leq (n) \sup_{\substack{i,j,k \\ \tau \in [0,1]}} |f_{x_i x_j x_k}(x_0 + \tau h)| \cdot \|h\|^3 \cdot \int_0^1 \frac{1}{2}(1-\tau)^2 d\tau$$

$$\leq M \|h\|^3$$

$$\therefore\ \lim_{h \to 0} \frac{|R_2(x_0 + h, x_0)|}{\|h\|^2} = 0.$$

Παρατήρηση: $$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = [h_1, \ldots, h_n] \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}}_{Hf} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$$Hf = D(\nabla f) = \begin{bmatrix} D\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ D\frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$: ο <u>εσσιανός πίνακας</u> της f

$$\therefore\ g''(0) = \langle (\nabla f \circ \gamma)'(0), h \rangle = \langle D(\nabla f)(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0), h \rangle = \langle Hf \cdot h, h \rangle$$

<u>μια τετραγωνική μορφή</u>

Παράδειγμα:

① Δώστε το ανάπτυγμα Taylor τάξης 2 της $f(x,y) = \cos(x+2y)$ στο $(0,0)$.

$f_x = -\sin(x+2y) \qquad f_x(0,0) = 0$

$f_y = -\sin(x+2y)\cdot 2 \qquad f_y(0,0) = 0$

$f_{xx} = -\cos(x+2y) \qquad f_{xx}(0,0) = -1$

$f_{xy} = -\cos(x+2y)\cdot 2 \qquad f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = -2$

$f_{yy} = -\cos(x+2y)\cdot 4 \qquad f_{yy}(0,0) = -4$

$$\therefore f(h_1,h_2) = f(0,0) + \nabla f(0,0)\cdot(h_1,h_2) + \frac{1}{2}\left\langle Hf(0,0)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right\rangle + R_2((h_1,h_2),(0,0))$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot\left[-h_1^2 + 2(-2)\,h_1h_2 + (-4)\cdot h_2^2\right] + R_2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(-h_1^2 - 4h_1h_2 - 4h_2^2\right) + R_2.$$

όπου $\frac{R_2}{h_1^2+h_2^2} \to 0$ αφού f C^3 στο $(0,0)$.

Τύπος Taylor τάξης k για $f \in C^{k+1}$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, h_i h_j$$

$$+ \frac{1}{3!} \cdot \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x_0)\, h_i h_j h_k$$

$$+ \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x_0)\, h_{i_1} \cdots h_{i_k} + R_k(x_0+h, x_0)$$

όπου $\dfrac{R_k(x_0+h, x_0)}{\|h\|^k} \to 0$ όταν $h \to 0$.

Ορισμός: Αν $R_k(x_0+h, x_0) \to 0$ όταν $k \to \infty$ $\forall\, h$ μικρά, τότε λέμε ότι η σειρά Taylor.

$$T(x_0+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x)\, h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

συγκλίνει στο $f(x_0+h)$ και πως η f είναι αναλυτική.

Προσοχή. f C^∞ $\not\Rightarrow$ f αναλυτική

Παράδειγμα για $n=1$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{για } x \geq 0 \\ 0 & \text{για } x < 0 \end{cases}$$

$f^{(k)}(0) = 0$ $\forall k$ (L'Hospital). $\therefore$ Σειρά Taylor

$T(0+h) = 0$ $\forall h$ ενώ $f(\varepsilon) = e^{-1/\varepsilon} > 0$

Παρατήρηση: Οι γνωστές συναρτήσεις $\sin x$, $\cos x$, e^x έχουν φραγμένες παραγώγους κοντά σε ένα σημείο x_0 για κάθε φραγμένο άρα είναι αναλυτικές σε κάθε γειτονιά του x_0 ⇒ αναλυτικές στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2

Αναπτύξτε την $f(x,y)=e^{x+y}$ — γύρω από το $(0,0)$

$$\frac{\partial^{k_1+k_2} f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}} = e^{x+y} \quad \text{φραγμένη για } (x,y)\in B(\vec{0},R)$$

∴ $f(x,y)$ αναλυτική συνάρτηση στο $B(\vec{0},R)$ $\forall R$.

$$\therefore f(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{k_1+k_2=k} x^{k_1}y^{k_2}\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}f(0,0)\cdot\frac{k!}{k_1!\,k_2!}$$

πόσες μικτές παράγωγοι με k_1 x και k_2 y υπάρχουν

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{k_1+k_2=k}x^{k_1}y^{k_2}\frac{k!}{k_1!\,k_2!}$$

f_{xy} και f_{yx} $\quad f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$ $\quad f_{xyy}=f_{yxy}=f_{yyx}$

$$\text{π.χ. } T_4(x,y)=1+x+y+\frac{1}{2!}(x^2+2xy+y^2)+\frac{1}{3!}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)$$

$$+\frac{1}{4!}\Big(x^4+4x^3y+\frac{4!}{2!2!}x^2y^2+4xy^3+y^4\Big)=\sum_{k=0}^{4}\frac{(x+y)^k}{k!}$$

$$\uparrow\ \frac{k!}{k_1!\,k_2!}$$

- Μπορούμε ν.δ.ο. $f=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}$

Πρόταση 2 Αν f είναι C^∞ και υπάρχει M τ.ω.

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x)\right|\le M^k \quad \forall k,\ i_1,\dots,i_k \text{ και } x\in B(x_0,R),$$

τότε η f είναι αναλυτική συνάρτηση στη $B(x_0,R)$.

Παράδειγμα 3:

Αν $f(x)$ πολυωνυμική βαθμού m ως προς $x_1, \dots, x_n$

$$\left[f(x) = \sum a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \quad \text{με} \quad i_1 + \dots + i_n \leq m \right]$$

τότε $T_k(x, x_0) = f(x) \quad \forall \; k \geq m.$

Τοπικά Ακρότατα:

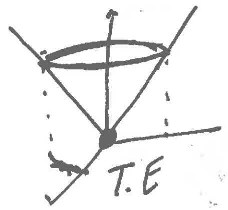
Ορισμός: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το σημείο $x_0 \in U$ ονομάζεται

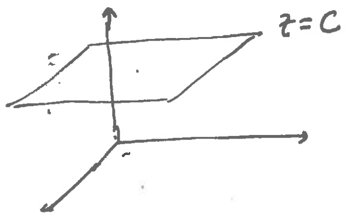
1. τοπικό μέγιστο για την f, αν υπάρχει $r_0 > 0$ τ.ω. $B(x_0, r_0) \subset U$ και $f(x_0) > f(y)$ $\forall y \in B(x_0, r_0)$.

2. τοπικό ελάχιστο αν υπάρχει $r_0 > 0$ τ.ω. $B(x_0, r_0) \subset U$ και $f(x_0) < f(y)$ $\forall y \in B(x_0, r_0)$.

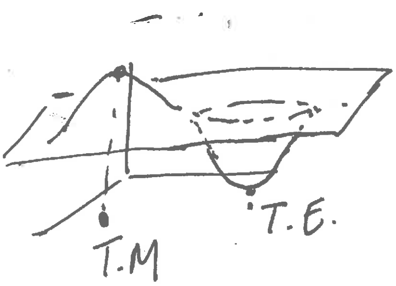
Αν ένα σημείο είναι τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο της f, τότε ονομάζεται τοπικό ακρότατο.

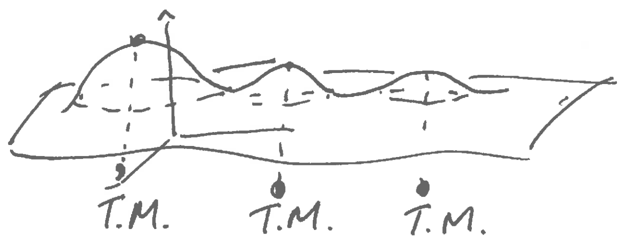
Παραδείγματα.

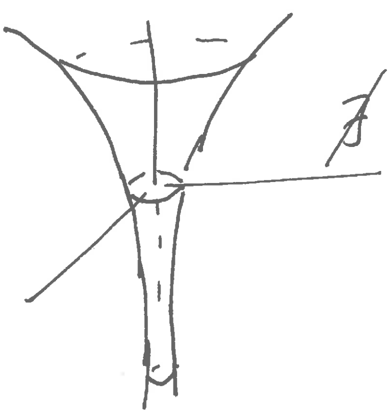




Τ.Μ & Τ.Ε σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$







$\nexists$ Τ.Μ, Τ.Ε.

Εντοπισμός τοπικών ακροτάτων.

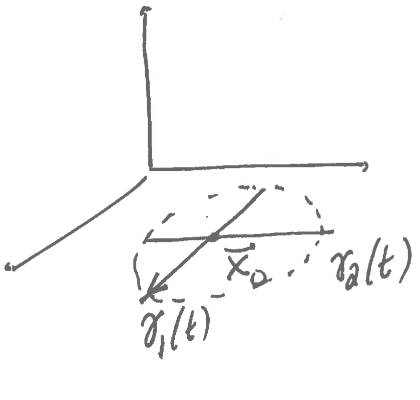
για $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ στα Τ.Α. αν $f'(x_0)$ ορίζεται,
τότε $f'(x_0)=0$.
Αντίστοιχα για $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$:

<u>Πρόταση 3</u> Έστω $f: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ C^1 και x_0 τοπικό ακρότατο της f. Τότε $\nabla f(x_0)=0$

Τα σημεία όπου η κλίση ∇f μηδενίζεται ονομάζονται <u>κρίσιμα</u> ή <u>κριτικά</u> σημεία της f.

<u>Απόδειξη:</u> Περιορισμός της f σε κάθε κατεύθυνση
→ μετατροπή σε συνάρτηση 1 μεταβλητής & Λημμ. I.

Έστω x_0 Τ.Μ της f. Δηλαδή $\exists r_0>0$ τ.ω. $f(x_0)>f(y)$
$\forall y\in B(x_0,r_0)$.



Έστω $\vec{\gamma}_i(t)=\vec{x}_0+t\,\hat{e}_i$
όπου $\hat{e}_i=(0,\dots,\underset{\uparrow\atop i}{1},\dots,0)$
$t\in(-r_0,r_0)$
Θέτουμε $g_i(t)=f\circ\gamma_i(t)$.

$g_i(t)$: παραγωγίσιμη αφού σύνθεση παραγωγίσιμων.
και $t=0$ Τ.Μ. αφού $g_i(0)=f(x_0)$
και $g_i(t)=f(\gamma_i(t))$ με $\gamma_i(t)=y\in B(x_0,r_0)$.
άρα $g_i(t)<g(0)$.

Από Λημμ. I. $g_i'(0)=0$

Καν. Αλυσίδας $g_i'(0)=\frac{d}{dt}(f\circ\gamma_i)(0)=\nabla f(\gamma_i(0))\cdot\gamma_i'(0)=\nabla f(x_0)\cdot\hat{e}_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$