Διαφορίσιμες Διανυσματικές Συναρτήσεις:

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f = (f_1, \dots, f_m)$.

Για κάθε μια από τις f_j μπορούμε να ορίσουμε τη μερική παράγωγος (όταν υπάρχουν)

- Δημιουργούμε τον πίνακα των μερικών παραγώγων της f:

$$Df(x) = \begin{bmatrix} Df_1(x) \\ \vdots \\ Df_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \partial f_2/\partial x_1 & \dots & \partial f_2/\partial x_n \\ \vdots & & \\ \partial f_m/\partial x_1 & \dots & \partial f_m/\partial x_n \end{bmatrix}$$

$Df(x)$: η παράγωγος της f στο x.
= Ιακωβιανός πίνακας της f στο x
= Ιακωβιανή.

π.χ. ① $f(x,y,z) = (x+y+z^2, \eta\mu(xyz))$

$$Df = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2z \\ yz\sigma\upsilon\nu(xyz) & xz\cdot\sigma\upsilon\nu(xyz) & xy\cdot\sigma\upsilon\nu(xyz) \end{bmatrix}$$

② $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$

$$D\gamma(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2 \end{bmatrix}$$

Μια γραμμική προσέγγιση της $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ θα είναι μια αφφινική συνάρτηση. $L(x) = Mx + b$ ($b=0$ γραμμική στην άλγεβρα).

Θέλουμε $L(x_0) = f(x_0)$, άρα θέλουμε

$$L(x) = M(x - x_0) + b$$

όπου M ένας $m \times n$ πίνακας

αφού $L(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και οι μόνη γραμμικές συναρτήσεις αντιστοιχούν σε πολλαπλασιασμό με πίνακα. $m \times n$

Τι θα είναι ο M; $M = Df$

Διαφορίσιμη αν $f(x) - L(x) \to \vec{0}$ πιο γρήγορα από $\|x - x_0\|$ όταν $x \to x_0$.

<u>Ορισμός:</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: A \to \mathbb{R}^m$

$f = (f_1, \dots, f_m)$ μια διανυσματική συνάρτηση.

1. Η f είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in A$ αν υπάρχει ο πίνακας των μερικών παραγώγων $Df(x_0) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 (x_0) \dots & \partial f_1/\partial x_n (x_0) \\ \partial f_m/\partial x_1 (x_0) \dots & \partial f_m/\partial x_n (x_0) \end{bmatrix}$

και επιπλέον

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{f(x) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \vec{0}$$

2. Η f είναι διαφορίσιμη στο A αν είναι διαφορίσιμη $\forall x_0 \in A$.

<u>Προσοχή:</u> $f(x) - L(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) - \nabla f_1(x_0) \cdot (x - x_0) - f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x) - \nabla f_m(x_0) \cdot (x - x_0) - f_m(x_0) \end{bmatrix}$

όπου ερμηνεύουμε $Df(x_0) \cdot (x - x_0)$ σαν πολλαπλασιασμό πινάκων $(m \times n) \cdot (n \times 1) \to m \times 1$

$$Df(x_0) \cdot (x - x_0) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & \\ \partial f_m/\partial x_1 & \dots & \partial f_m/\partial x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{0,1} \\ \vdots \\ x_n - x_{0,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} (x_i - x_{0,i}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} (x_i - x_{0,i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \cdot (x - x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m \cdot (x - x_0) \end{bmatrix}$$

Πρόταση 5: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\vec{f}, \vec{g} : A \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμες.
Τότε 1. $D(\lambda\vec{f} + \mu\vec{g}) = \lambda D\vec{f} + \mu D\vec{g}$. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2. Αν $h : A \to \mathbb{R}$ βαθμωτή τότε

$$D(h \cdot \vec{f}) = h D\vec{f} + \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}_{m\times 1} \cdot [\boxed{Dh}]_{1\times n}$$

Απόδειξη. ① ✓

② $D(h \cdot \vec{f}) = D(hf_1, \dots, hf_m) = \begin{bmatrix} \nabla(hf_1) \\ \vdots \\ \nabla(hf_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\nabla f_1 + f_1 \nabla h \\ \vdots \\ h\nabla f_m + f_m \nabla h \end{bmatrix}$

$$= h \cdot \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \nabla h \\ \vdots \\ f_m \nabla h \end{bmatrix} = h \cdot Df + \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}_{m\times 1} \cdot [\boxed{Dh}]_{1\times n}$$

· $\vec{f} \times \vec{g}$ δεν έχει νόημα γενικά.

Παρατήρηση: $D(\vec{f} \cdot \vec{g}) \equiv \nabla(\vec{f} \cdot \vec{g}) = \nabla\left(\sum_{i=1}^{m} (f_i \cdot g_i)\right) = \sum_{i=1}^{m} (\nabla f_i) g_i + f_i \nabla g_i$

εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση 6: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}^m$ διανυσματική συνάρτηση με $f = (f_1, \dots, f_m)$.

1. Αν οι $f_1, \dots, f_m$ είναι C^1 σε μια περιοχή του $x_0 \in A$, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο x_0.

2. Αν η f είναι C^1 στο A τότε η f είναι διαφορίσιμη στο A.

3. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο A τότε είναι και συνεχής στο A.

4. Αν η f είναι διαφορίσιμη τότε η γραμμική τις προσέγγιση είναι μοναδική.

Άσκηση: $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $f(x) = Mx + b$ αφφινική.
Δηλαδή M $m\times n$ πίνακας και $b \in \mathbb{R}^m$ με σταθερές συνιστώσες.
Τότε f διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^n$ με $Df(x) = M$ $\forall x$.

Σύνθεση.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$$
$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$$

<u>Παρ.</u> $f(x) = M_1 x \qquad M_1 \ m\times n \qquad Df = M_1$

$g(y) = M_2 y \qquad M_2: k\times m \qquad Dg = M_2$

$$g\circ f(x) = g(M_1 x) = \underset{k\times m}{M_2} \cdot \underset{m\times n}{M_1} \cdot X \quad : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

$$D(g\circ f) = M_2 M_1 = Dg \cdot Df \qquad \text{(ανεξάρτητες του } x \text{ εδώ)}$$

Κανόνας της Αλυσίδας:

<u>Πρόταση 7</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $B \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτό.

και $\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} B_{\subset \mathbb{R}^m} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$

διαφορίσιμη τ.ω. $\Pi.T(f) \subset B$. Τότε και η σύνθεση $h = g\circ f$ είναι διαφορίσιμη και ισχύει ότι

$$Dh(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x).$$

↑ πολλαπλασιασμός πινάκων.

<u>Παρατηρήσεις:</u> Έστω $y = (y_1, \dots, y_m) = f(x)$. $f = (f_1, \dots, f_m)$ $g = (g_1, \dots, g_k)$

$h = (h_1, \dots, h_k) = (g_1(f(x)), \dots, g_k(f(x)))$

$$Dh(x) = \begin{bmatrix} \partial h_1/\partial x_1 & \cdots & \partial h_1/\partial x_n \\ \vdots & & \\ \partial h_k/\partial x_1 & \cdots & \partial h_k/\partial x_n \end{bmatrix}_{\Big|x} \underset{\text{πρ. 7.}}{=} \begin{bmatrix} \partial g_1/\partial y_1 & \cdots & \partial g_1/\partial y_m \\ \vdots & & \\ \partial g_k/\partial y_1 & \cdots & \partial g_k/\partial y_m \end{bmatrix}_{\Big|y=f(x)} \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & \\ \partial f_m/\partial x_1 & \cdots & \partial f_m/\partial x_n \end{bmatrix}_{\Big|x}$$

$$\therefore \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(h_i(f(x))\right) = \frac{\partial g_i}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_j}$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_l}\cdot\frac{\partial y_l}{\partial x_j} \qquad \begin{array}{l} i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_l}(y)\cdot\frac{\partial y_l}{\partial x_j}(x)$$

γράφεται έτσι.

<u>Παραδείγματα</u> - Υπολογιστικά

① $f(x,y) = (\overset{u}{x^2+y^2}, \overset{v}{xy})$

$g(u,v) = e^{u+v^2}$

Αν $h(x,y) = g\circ f(x,y)$ υπολογίστε $\frac{\partial h}{\partial x}$ με 2 τρόπους.

$$h(x,y) = g(f(x,y)) = e^{x^2+y^2+(xy)^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = e^{x^2+y^2+(xy)^2}\cdot(2x + 2x\cdot y^2).$$

<u>Αλυσίδας</u>: $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

$$= e^{u+v^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + e^{u+v^2}\cdot 2v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= e^{x^2+y^2+(xy)^2}\cdot 2x + e^{x^2+y^2+(xy)^2}\cdot 2xy\cdot y.$$

Ίσα!

② $g(u,v) = (u+v,\ u,\ v^2) \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad g = (g_1, g_2, g_3)$

$f(x,y) = (x^2+1,\ y^2). \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad f = (f_1, f_2)$

Ορίζεται η $\quad g \circ f(x,y) = H(x,y). = (H_1, H_2, H_3).$

$$DH(x,y) = Dg(f(x,y)) \cdot Df(x,y) =$$

$$= \begin{bmatrix} \partial g_1/\partial u & \partial g_1/\partial v \\ \partial g_2/\partial u & \partial g_2/\partial v \\ \partial g_3/\partial u & \partial g_3/\partial v \end{bmatrix}\Bigg|_{(u,v)=f(x,y)} \cdot \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x & \partial f_1/\partial y \\ \partial f_2/\partial x & \partial f_2/\partial y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix}\Bigg|_{(u,v)=f(x,y)} \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 0 \\ 0 & 4y \cdot y^2 \end{bmatrix}$$

$2v \to 2y^2$

$v = y^2$

$$\frac{\partial H_3}{\partial y} \equiv \frac{\partial g_3}{\partial y} = \frac{\partial g_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0 + 2v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 4y^3$$

③ Πολική Συντεταγμένη - μια συνήθης αλλαγή μεταβλητών στο $\mathbb{R}^2$.

$$P(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta) = (x(r,\theta),\ y(r,\theta))$$

$f(x,y)$:
$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(f \circ P)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot r\cos\theta.$$

④ Αν η f εξαρτάται μόνο από x, έχουμε ολική παράγωγο $\frac{d}{dx}$

π.χ. $h(x) = f(x, u(x)) \ \to \ \dfrac{dh}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \underbrace{\cancel{\dfrac{dx}{dx}}}_{1} + \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$h(x,y) = f(x, u(x,y)) \quad \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial x}{\partial y}}}_{0} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}$

Απόδειξη: Κανόνα Αλυσίδας

Λήμμα 8 Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό και $f: A \to \mathbb{R}^m$ ~~για~~ διαφορίσιμη στο x_0. Τότε

υπάρχει σταθερά M τ.ω. $\|f(x)-f(x_0)\| \leq M\|x-x_0\|$

$\forall x$ κοντά στο x_0. (Αυτό συνεπάγεται και την Πρόταση 6.3 - Δηλαδή f συνεχής στο x_0)

Απ. ~~Συνεχεια~~ $\|f(x)-f(x_0)\| = \|f(x) - L(x) + Df(x_0)(x-x_0)\|$

$$\leq \|f(x)-L(x)\| + \|Df(x_0)(x-x_0)\|$$

$$\leq \underbrace{\frac{\|f(x)-L(x)\|}{\|x-x_0\|}}_{<\varepsilon \text{ για } \|x-x_0\|<\delta_1 \text{ αφού } \to 0} \cdot \|x-x_0\| + \underbrace{c(n)\cdot \sup_{i,j}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right|}_{\leq m \text{ σταθ.}} \|x-x_0\|$$

$$\leq \underbrace{(\varepsilon+m)}_{M} \|x-x_0\| \quad \text{για} \quad \|x-x_0\|<\delta_1$$

Με $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{M}\}$ παίρνουμε και συνέχεια.

QED.

Απόδειξη Κ. Αλυσίδας:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$$

Θέλουμε ν.δ.ο.

$$\frac{g\circ f(x) - \overbrace{g\circ f(x_0) - Dg(f(x_0))\cdot Df(x_0)(x-x_0)}^{L(x)}}{\|x-x_0\|} \to 0.$$

Απόδειξη όπως στο $\mathbb{R}$ αλλά με νόρμες.

$$g\circ f(x) - L(x) = g(f(x)) - g(f(x_0)) - \overbrace{Dg(f(x_0))}^{k\times m}\cdot \overbrace{(f(x)-f(x_0))}^{m\times 1} \quad ①$$

$$+ Dg(f(x_0))\left[(f(x)-f(x_0)) - \underbrace{\underset{m\times n}{Df(x_0)}\,\underset{n\times 1}{(x-x_0)}}_{m\times 1}\right] \quad ②$$

①: g διαφορίσιμη στο $f(x_0)$

Άρα $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta_0>0$ τ.ω. αν $\|f(x)-f(x_0)\|_m<\delta_0$

τότε $\|①\|_k < \varepsilon \|f(x)-f(x_0)\|_m$

f διαφορίσιμη στο x_0

Άρα $\exists \delta_1>0$ και $M>0$ τ.ω. αν $\|x-x_0\|_n<\delta_1$

τότε $\|f(x)-f(x_0)\|_m < M\|x-x_0\|_k$ (Λήμμα 8).

$< \delta_0 \Leftrightarrow \|x-x_0\|<\delta_0/M.$

$\therefore \|①\|_k < \varepsilon\cdot M\|x-x_0\|_k$ για $\|x-x_0\|<\delta_2=\min\{\delta_1, \frac{\delta_0}{M}\}$

②: g διαφορίσιμη στο $y_0=f(x_0)$.

Άρα $\|②\|_k \leq \underbrace{c(m)\cdot \sup_{i,j}\left|\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x_0))\right|}_{M'} \| \underbrace{f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)}_{③}\|$

f διαφορίσιμη στο x_0 άρα $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_3$ τ.ω.

$\|③\|_m < \varepsilon\cdot\|x-x_0\|_k$ για $\|x-x_0\|<\delta_3$.

$\therefore$ Έστω $\delta=\min\{\delta_2,\delta_3\}$. τότε για $\|x-x_0\|<\delta$

$\|g(f(x))-L(x)\|_k \leq \|①\|_k+\|②\|_k < \varepsilon M\|x-x_0\|_k + M'\cdot\varepsilon\|x-x_0\|_n$

$\Rightarrow \frac{\|g(f(x))-L(x)\|_k}{\|x-x_0\|_n} < \varepsilon(M+M')$ σταθερές.

$\therefore$ $g\circ f$ διαφορίσιμη και $Dg(f(x_0))\cdot Df(x_0)$ ο πίνακας των μερικών παραγώγων. από Πρόταση 4.

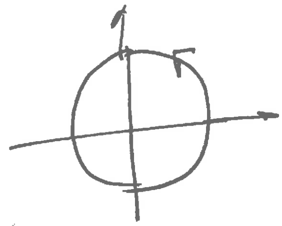
$\square$

Ειδικές Περιπτώσεις:

Καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$:

Μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ για $t \in I \subset \mathbb{R}$ I ανοικτό, ονομάζεται καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$.
$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

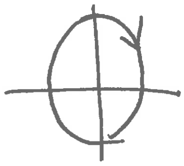
Παρ. ① $\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$



$x^2(t) + y^2(t) = 1 \Rightarrow \vec{\gamma}(t)$ ανήκει σε κύκλο ακτίνας 1 $\forall t$.

Για $t \in [0, 2\pi)$ η $\vec{\gamma}$ ονομάζεται και παραμετρικοποίηση του κύκλου.

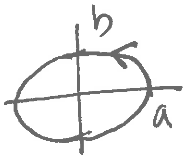
② $\vec{\gamma}(t) = (\sin t, \cos t)$



άλλη παραμετρικοποίηση.

$\vec{\gamma}(t)$: η πορεία ενός σωματιδίου τη στιγμή t στο $\mathbb{R}^n$.

③ $\vec{\gamma}(t) = (a\cos t, b\sin t)$ $\quad \frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} = 1 \to$ Έλλειψη



~~Κανόνας της Αλυσίδας (Ειδική Περίπτωση)~~

~~Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\varphi : [a,b] \to A$ $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$~~

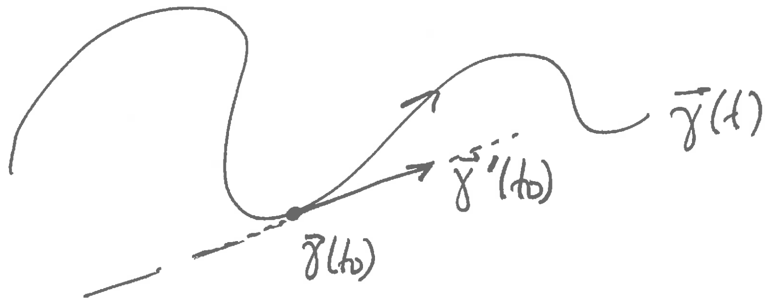
Αν η $\vec{\gamma}(t)$ είναι διαφορίσιμη τότε $D\vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{bmatrix} \equiv \vec{\gamma}'(t)$

ταχύτητα

και η $\vec{\ell}(t) = \vec{\gamma}(t_0) + D\vec{\gamma}(t_0)\cdot(t-t_0) = \vec{\gamma}(t_0) + \vec{\gamma}'(t_0)\cdot(t-t_0)$

είναι η γραμμική της προσέγγιση.

Η $\vec{\ell}(t)$ είναι ευθεία στο $\mathbb{R}^n$! που περνά από το $\vec{\gamma}(t_0)$ και έχει διάνυσμα κατεύθυνσης το $\vec{\gamma}'(t_0)$.

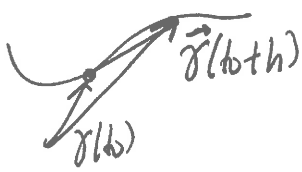


($D\vec{\gamma}$: πίνακας
$\vec{\gamma}'(t)$: διάνυσμα
Df: πίνακας
∇f: διάνυσμα)

$\vec{\gamma}'(t_0)$: το εφαπτόμενο διάνυσμα στην $\vec{\gamma}(t)$ στο σημείο $\gamma(t_0)$

: ορίζεται ως το διάνυσμα ταχύτητας της $\gamma(t)$ στο χρόνο $t=t_0$.

: είναι η κατεύθυνση της στιγμιαίας μεταβολής της $\vec{\gamma}$ στο $t=t_0$.



Αφού: $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\vec{\gamma}(t) - \vec{\ell}(t)}{|t-t_0|} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\vec{\gamma}(t) - \vec{\ell}(t)}{t-t_0} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{t\to t_0}\left[\frac{\vec{\gamma}(t)-\vec{\gamma}(t_0)}{t-t_0} - \vec{\gamma}'(t_0)\cdot\frac{\cancel{t-t_0}}{\cancel{t-t_0}}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\vec{\gamma}(t)-\vec{\gamma}(t_0)}{t-t_0}}$$

$\vec{\gamma}(t)$ → $\vec{\gamma}'(t)$ διάνυσμα ταχύτητας της $\vec{\gamma}$.

→ $\vec{\gamma}''(t)$ διάνυσμα επιτάχυνσης της $\vec{\gamma}$.

<u>Κανόνας Αλυσίδας (Ειδική Περίπτωση)</u>

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό $f: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο A

$\gamma: [a,b] \subset \mathbb{R} \to A$ $\quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ διαφορίσιμη καμπύλη.

Τότε η $f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη και

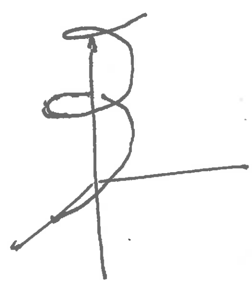
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \frac{df}{dt}(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)$$

$$\left(\gamma_i'(t) = \frac{dx_i}{dt}(t)\right)$$

$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)$: d γιατί η $f \circ \gamma$ εξαρτάται μόνο από το t
- η ολική παράγωγος.

Παρ. ① $\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ κοχλίας (helicoid)



$f(x,y,z) = x^2 \cdot z + 2y^2$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 2xz \cdot \frac{dx}{dt} + 4y \cdot \frac{dy}{dt} + x^2 \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$= 2(\cos t)\, t\, (-\sin x) + 4 \sin t \cdot \cos t + \cos^2 t \cdot 1.$$

<u>Ορισμός:</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό και $f: A \to \mathbb{R}$.
Αν $\hat{e}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ και $x_0 \in A$ τότε η <u>κατευθυνόμενη παράγωγος</u> $\nabla_{\hat{e}} f(x_0)$ της f στην κατεύθυνση $\hat{e}$ και στο σημείο x_0 δίνεται από

$$\nabla_{\hat{e}} f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\hat{e}) - f(x_0)}{h}$$

<u>Παρατήρηση:</u> $\nabla_{\hat{e}_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$: μερική στην κατεύθυνση $\hat{e}_i$.

<u>Παρατήρηση:</u> $\gamma(t) = \vec{x}_0 + t\hat{e}$ είναι ευθεία που περνά από το x_0. στο $t=0 \to \gamma'(0) = \hat{e}$, $\gamma(0) = x_0$

$$\nabla_{\hat{e}} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0)$$

$$\text{Κ. Αλυσίδας.} \quad = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \nabla f(x_0) \cdot \hat{e}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\hat{e}} f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot \hat{e}}$$

<u>Παρατήρηση:</u> $\|\nabla_{\hat{e}} f(x_0)\| = |\nabla f(x_0) \cdot \hat{e}| \overset{C-S}{\leq} \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|\hat{e}\| = \|\nabla f(x_0)\|$

"=" ανν $\nabla f(x_0)$ & $\hat{e}$ συγγραμμικά.

$\nabla_{\hat{e}} f(x_0) = 0$ ανν $\nabla f(x_0) \perp \hat{e}$

δηλαδή η μεταβολή της f είναι μηδενική στην κατεύθυνση που είναι κάθετη στην κλίση της f!

$\nabla_{\hat{e}} f(x_0) \to$ μέγιστη $= \|\nabla f(x_0)\|$ αν $\hat{e}$ & $\nabla f(x_0)$ συγγραμμικά με ίδια φορά.

$\searrow$ ελάχιστη $= -\|\nabla f(x_0)\|$ αν $\hat{e}$ & $\nabla f(x_0)$ συγγραμμικά με αντίθετη φορά.

<u>Παρ.</u> Έστω $T(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{2}$ η θερμοκρασία στο επίπεδο.

Ένα έντομο αρχικά στο (x_0, y_0), θέλει να κινηθεί σε καμπύλη $\vec{\gamma}(t)$, $t \geq 0$ με $\|\vec{\gamma}'(t)\| = 1$ $\forall t \geq 0$.
τ.ω. η μεταβολή της θερμοκρασίας να είναι η μέγιστη πάνω στη $\vec{\gamma}(t)$. Να βρεθεί η $\vec{\gamma}(t)$.

$\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$. τ.ω. $\gamma'(t) \,/\!/\, \nabla T(\gamma(t))$

με ίδια φορά και $\|\gamma'(t)\| = 1$.

Δηλαδή $\gamma'(t) = \frac{\nabla T(\gamma(t))}{\|\nabla T(\gamma(t))\|} =$

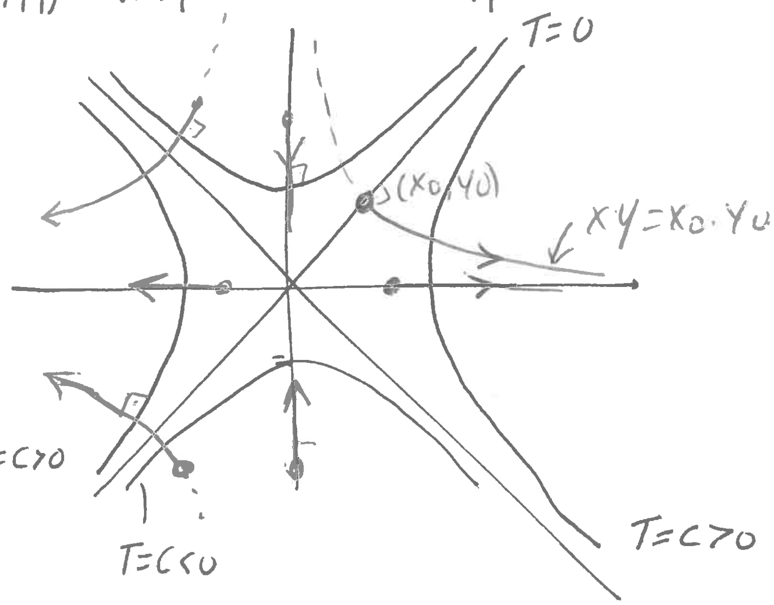
$\nabla T = (-2x, 2y)$ $\quad \|\nabla T\| = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\therefore \underset{(x'(t),\, y'(t))}{\underset{\|}{\gamma'(t)}} = \left(\frac{-2x(t)}{2\sqrt{x^2+y^2}(t)}, \frac{2y(t)}{2\sqrt{x^2+y^2}(t)} \right) = \left(\frac{-x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}, \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} \right)$$

Παρατήρηση: $(x(t) \cdot y(t))' = x' \cdot y + x y' = \frac{-xy}{\sqrt{\ }} + \frac{xy}{\sqrt{\ }} = 0$

$$\Rightarrow x(t) \cdot y(t) = c = x(0)\, y(0) \Rightarrow x(t) \cdot y(t) = x_0 y_0$$

$T(x,y)$: ισοϋψή σύνολα: υπερβολή.

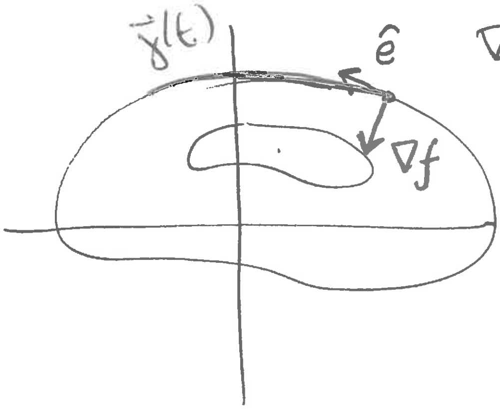


$x_0 y_0 = xy$: κάθετη στα ισοϋψή σύνολα της T.

Κλίση και Ισοϋψής Επιφάνειες:

Για $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$U_c = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) = c\}$$: ισοϋψής επιφάνεια (ισοϋψές σύνολο της f).



$\nabla_{\hat{e}} f = 0$ f δεν αλλάζει $\Rightarrow \nabla f \perp \hat{e}$

$\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$

$\uparrow$

ελεύθερο διάνυσμα στο x_0.

Πρόταση: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $f: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη.
Αν το x_0 ανήκει στην ισοϋψή επιφάνεια U_c, τότε η κλίση $\nabla f(x_0)$ είναι **κάθετη** στην επιφάνεια U_c στο x_0.

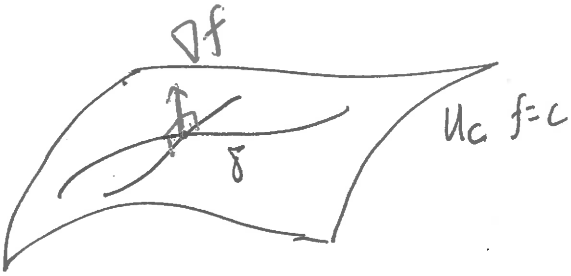
Κάθετη σημαίνει $\forall$ καμπύλη $\vec{\gamma}(t): [-\varepsilon, \varepsilon] \to U_c \subset \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη, με $\vec{\gamma}(0) = x_0$, ισχύει ότι $\nabla f(x_0) \cdot \gamma'(0) = 0$.

Απόδειξη: Έστω $\vec{\gamma}(t)$ όπως πιο πάνω.
Τότε $f \circ \gamma(t) = c \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ αφού $\gamma(t) \in U_c$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(f \circ \gamma(t)\right) = \frac{d}{dt}(c) = 0 \Rightarrow \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0 \Rightarrow \nabla f(x_0) \cdot \gamma'(0) = 0.$$

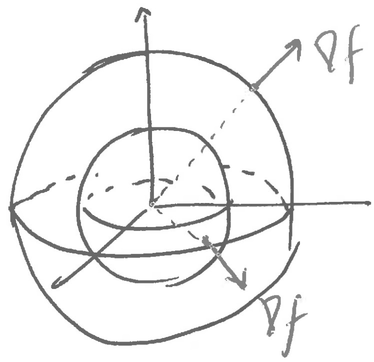
QED.



Παραδείγματα: ① $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$$U_c=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=c\}$$ σφαίρα ακτίνας $\sqrt{c}$ στο $\vec{O}$

$$\nabla f=(2x,2y,2z)=2(x,y,z)$$



ακτινιαία μετακίνηση μακρυά από το $\vec{O}$ για μέγιστη αύξηση στις τιμές της f.

② Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: A\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη.
Τότε το διάνυσμα $(\nabla f(x),-1)=(f_{x_1}(x),\dots,f_{x_n}(x),-1)$ είναι κάθετο στο γράφημα της f στο σημείο $(x,f(x))\in\mathbb{R}^{n+1}$

$$\Gamma(f)=\{(x,y)\mid x\in A\subset\mathbb{R}^n,\ y=f(x)\}$$

Έστω $g(x,y)=f(x)-y$ για $(x,y)\in A\times\mathbb{R}$

Τότε $\Gamma(f)=U_0(g)=\{(x,y)\in A\times\mathbb{R}\mid f(x)-y=0\}$

$\therefore\ \nabla g\perp\Gamma(f)$ από Πρόταση 9

$$\nabla g=(g_{x_1},\dots,g_{x_n},g_y)=(f_{x_1},\dots,f_{x_n},-1)$$

$\square$