ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

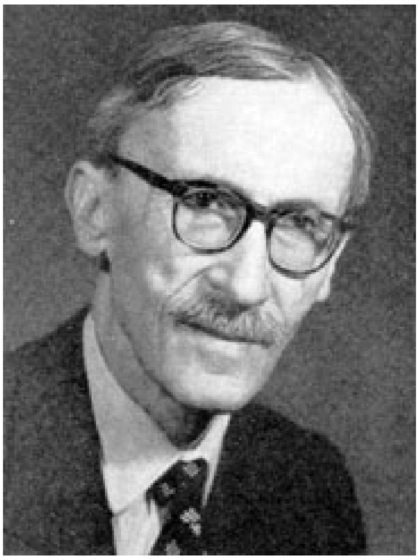
Ευσταθείς και Απεριόριστα Διαιρετές Κατανομές

Σέργιος Αγαπίου

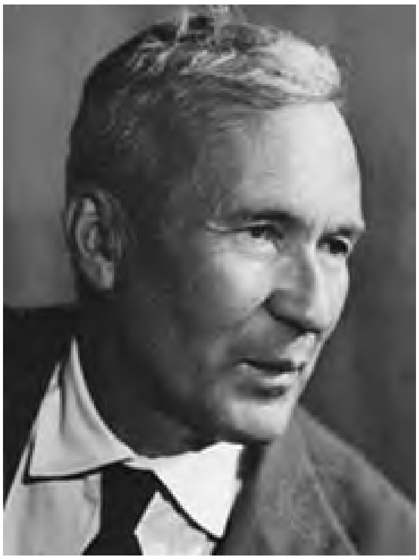
Επιβλέπων:
Σ.Α. Αργυρός, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Μέλη Επιτροπής:
Ι. Σπηλιώτης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Β. Κανελλόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

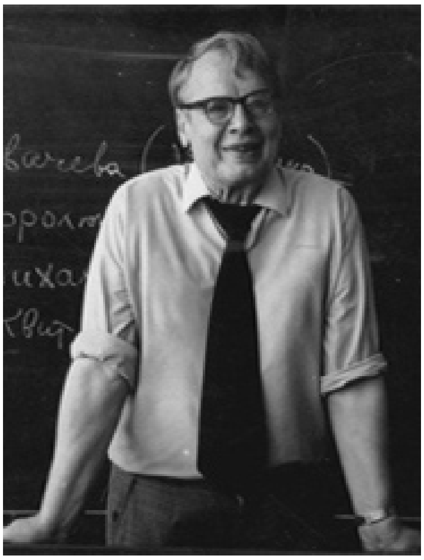
Αθήνα, Ιούνιος 2009



Paul P. Lévy (1886-1971)



A.N. Kolmogorov (1903-1987)



B.V. Gnedenko (1912-1995)

A. Khinchin (1894-1959)

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία αποτελεί την ολοκλήρωση των προπτυχιακών μου σπουδών στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Θέλω να πιστεύω ότι στις σελίδες της εργασίας αυτής, παρατίθεται μια καλή πρώτη μελέτη των ευσταθών και των απεριόριστα διαιρετών κατανομών. Οι ευσταθείς κατανομές αποτελούν γενίκευση των κανονικών κατανομών, ενώ οι απεριόριστα διαιρετές κατανομές αποτελούν γενίκευση των ευσταθών κατανομών. Με τη μελέτη τους ασχολήθηκαν κατά τη διάρκεια του περασμένου αιώνα μερικά από τα ιερά τέρατα των Μαθηματικών όπως ο Paul Pierre Lévy, ο Andrey N. Kolmogorov, ο Boris V. Gnedenko και ο Aleksandr Y. Khinchin.

Στο πρώτο κεφάλαιο, συζητούνται τα διάφορα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε στην υπόλοιπη εργασία. Ξεκινώντας από τις συναρτήσεις κατανομής, προχωράμε στη μελέτη της ασθενούς σύγκλισης, των "tight" οικογενειών μέτρων πιθανότητας και της πυκνότητας μέτρου πιθανότητας. Στη συνέχεια υπάρχει μια αρκετά εκτενής μελέτη των χαρακτηριστικών συναρτήσεων, η οποία περιλαμβάνει δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα, το «Θεώρημα Αντιστροφής» και το «Θεώρημα Συνέχειας» των χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Ακολούθως προχωράμε στον ορισμό και τη μελέτη την συνέλιξης συναρτήσεων κατανομής και το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τον ορισμό μιας σχέσης ισοδυναμίας στο σύνολο των συναρτήσεων κατανομής, που χωρίζει το εν λόγω σύνολο σε κλάσεις ισοδυναμίας, τους λεγόμενους τύπους.

Έχοντας τα κατάλληλα εργαλεία από το πρώτο κεφάλαιο, συνεχίζουμε στο δεύτερο κεφάλαιο με τη μελέτη της Κανονικής Κατανομής. Πρώτα μελετάμε την Τυπική Κανονική Κατανομή και τις ιδιότητες της. Το κεφάλαιο κορυφώνεται με την διατύπωση και απόδειξη του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος των Jarl Waldemar Lindeberg και Paul Pierre Lévy, ενός από τα πλέον θεμελιώδη θεωρήματα των Μαθηματικών. Το Κ.Ο.Θ. λέει ότι το κατάλληλα κανονικοποιημένο άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη διασπορά, τείνει ασθενώς στην Τυπική Κανονική Κατανομή καθώς ο αριθμός των τυχαίων μεταβλητών ανεβαίνει. Ακολουθεί μια μελέτη των Κανονικών Κατανομών γενικότερα, η οποία αποσκοπεί στην ανάδειξη των ιδιοτήτων τους, πάνω στις οποίες θα στηριχτεί ο ορισμός των ευσταθών κατανομών στο τρίτο κεφάλαιο.

Στο τρίτο κεφάλαιο, προχωράμε με τη μελέτη των ευσταθών κατανομών. Καταρχάς, δίνουμε τον ορισμό των ευσταθών κατανομών σε διάφορες ισοδύναμες μορφές και στη συνέχεια κάποια παραδείγματα ευσταθών κατανομών. Ακολούθως, μελετάμε την αναπαράσταση των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των συμμετρικών ευσταθών κατανομών. Το σημαντικότερο σημείο του τρίτου κεφαλαίου είναι η διατύπωση και απόδειξη του οριακού θεωρήματος του P.P. Lévy για τις ευσταθείς κατανομές, το οποίο λέει ότι μια κατανομή είναι ευσταθής αν και μόνο αν προκύπτει ως ασθενές όριο κατάλληλα κανονικοποιημένου αθροίσματος ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθώς ο αριθμός των τυχαίων μεταβλητών ανεβαίνει. Στη συνέχεια ορίζουμε τις "max-stable" κατανομές οι οποίες έχουν παρόμοιες ιδιότητες με τις ευσταθείς κατανομές και το κεφάλαιο κλείνει με μια εφαρμογή στη συναρτησιακή ανάλυση.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας, μελετάμε τις απεριόριστα διαιρετές κατανομές. Το κεφάλαιο ξεκινά με τη διατύπωση και απόδειξη του Θεωρήματος Σύγκλισης Poisson για τριγωνικές ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών. Ακολουθεί ο ορισμός των απεριόριστα διαιρετών κατανομών και η παράθεση μερικών παραδειγμάτων. Η έννοια των απεριόριστα διαιρετών κατανομών εισήχθηκε το 1929 από τον Ιταλό μαθηματικό Bruno de Finetti. Ο στόχος ήταν να περιληφθούν στην ίδια οικογένεια οι ευσταθείς κατανομές και η κατανομή Poisson και τα αντίστοιχα οριακά τους θεωρήματα. Στη συνέχεια δίνουμε κάποιες ιδιότητες των απεριόριστα διαιρετών κατανομών και δύο χαρακτηρισμούς τους. Ο πρώτος λέει ότι μια κατανομή είναι απεριόριστα διαιρετή αν και μόνο αν προκύπτει ως ασθενές όριο των αθροισμάτων των γραμμών μιας τριγωνικής ακολουθίας, που είναι τέτοια ώστε οι τυχαίες μεταβλητές κάθε γραμμής της, να είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Ο συγκεκριμένος χαρακτηρισμός περιλαμβάνει τόσο το οριακό θεώρημα του P.P Lévy για τις ευσταθείς κατανομές, όσο και το θεώρημα σύγκλισης Poisson. Ο δεύτερος χαρακτηρισμός λέει ότι μια κατανομή είναι απεριόριστα διαιρετή αν και μόνο αν προκύπτει ως ασθενές όριο ακολουθίας σύνθετων Poisson κατανομών.
Η εργασία ολοκληρώνεται με την μελέτη της αναπαράστασης των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των απεριόριστα διαιρετών κατανομών και συγκεκριμένα με την απόδειξη της φόρμουλας των P.P. Lévy και A.Y. Khinchin.

Ευχαριστίες

Καταρχάς θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Καθηγητή Σπύρο Α. Αργυρό, επιβλέποντα αυτής της εργασίας, για την καθοδήγηση, τη βοήθεια και το χρόνο που μου αφιέρωσε, τόσο κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής, όσο και για την εξασφάλιση των επόμενων βημάτων στις σπουδές μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή Βασίλη Κανελλόπουλο και τον Δρα Δημήτρη Απατσίδη, για την πολύτιμη τους βοήθεια σε αρκετά σημεία της εργασίας.

Θα ήθελα να τονίσω ότι η εκπόνηση της συγκεκριμένης εργασίας κατέστη δυνατή, χάρη στη διδασκαλία από τους προαναφερθέντες του μαθήματος «Θέματα Ανάλυσης: Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πιθανοτήτων», κατά τη διάρκεια του 9ου εξαμήνου των σπουδών μου.

Θα ήταν παράλειψη μου, αν δεν ευχαριστούσα τον υποψήφιο διδάκτορα Τύρο Κωνσταντίνο, για τη βοήθεια και τις συμβουλές του, τόσο σχετικά με το μαθηματικό κομμάτι της εργασίας αυτής, όσο και σε σχέση με το τεχνικό κομμάτι και συγκεκριμένα με τη γλώσσα επιστημονικής γραφής TEX.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους προαναφερθέντες, για το χρόνο που μου διέθεσαν κατά την αναλυτική παρουσίαση της εργασίας αυτής.

Επιπλέον, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή Ιωάννη Σπηλιώτη, μέλος της τριμελούς επιτροπής της παρούσας εργασίας, ο οποίος κατά τη διδασκαλία του μαθήματος «Θεωρία Πιθανοτήτων» στη διάρκεια του 6ου εξαμήνου, έθεσε τις βάσεις για την ενασχόληση μου με το συγκεκριμένο κομμάτι των Μαθηματικών.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς την οικογένειά μου, για την αμέριστη συμπαράσταση και στήριξη που μου προσέφεραν καθ'ολη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Σέργιος Αγαπίου,
Αθήνα, Ιούνιος 2009.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. Μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ καλείται **συνάρτηση κατανομής μέτρου πιθανότητας**, αν είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής και

$$(i) \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$(ii) \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.2. Αν μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, τότε το μ ορίζει συνάρτηση κατανομής F_μ ως εξής:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_\mu(x) \overset{\text{ορ}}{=} \mu(-\infty, x]$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η F_μ είναι προφανώς αύξουσα.
Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $x_n \searrow x$. Τότε επειδή

$$(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]$$

όπου $((-\infty, x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία Borel συνόλων, από γνωστή ιδιότητα των μέτρων, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(-\infty, x_n]$$

$$= \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]) = \mu(-\infty, x] = F_\mu(x)$$

Δηλαδή, F_μ είναι δεξιά συνεχής.

Η F είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το 1, άρα το όριο της για $x \to +\infty$ υπάρχει. Έστω $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $z_n \nearrow +\infty$.
Τότε επειδή

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, z_n] = \mathbb{R}$$

όπου $((-\infty, z_n])_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία Borel συνόλων, από γνωστή ιδιότητα των μέτρων, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu(z_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(-\infty, z_n]$$

$$= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, z_n]) = \mu(\mathbb{R}) = 1$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty} F_\mu(x) = 1$$

Παρόμοια, αποδεικνύεται και ότι

$$\lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3. *Αν F συνάρτηση κατανομής μέτρου πιθανότητας, τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, μ, τέτοιο ώστε*

$$F_\mu = F$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα δείξουμε ότι $\exists\mu$, μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mu(-\infty, x]$$

Έστω $0 < \omega < 1$.
Επειδή η F είναι αύξουσα, η αντίστροφη εικόνα $F^{-1}[\omega, 1]$, είναι διάστημα και μάλιστα, επειδή η F είναι δεξιά συνεχής, είναι διάστημα κλειστό στο αριστερό άκρο. Δηλαδή υπάρχει $a(\omega) \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$F^{-1}[\omega, 1] = [a(\omega), +\infty)$$

Για κάθε $0 < \omega < 1$, θέτουμε

$$Y(\omega) = \inf[\omega \le F \le 1] = \inf[F^{-1}[\omega, 1]] = \inf\,[a(\omega), +\infty) \qquad (1)$$

Από (1) έχουμε ότι

$$[\omega \le F \le 1] = [Y(\omega), +\infty),\ \forall\omega \in (0, 1). \qquad (2)$$

Επειδή $F(x) \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$F(x) \ge \omega \iff x \ge Y(\omega) \qquad (3)$$

και

$$F(x) < \omega \iff x < Y(\omega) \qquad (4)$$

Η Y είναι τυχαία μεταβλητή στο χώρο $((0, 1), \mathcal{B}(0, 1), \lambda)$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue περιορισμένο στο (0,1), γιατί από την (3) ισχύει

$$[Y \le x] = (0, F(x)] \in \mathcal{B}(0, 1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Η κατανομή της Y, λY^{-1}, έχει συνάρτηση κατανομής την F, αφού

$$\lambda[Y \le x] = \lambda(Y^{-1}(-\infty, x]) = \lambda(0, F(x)] = F(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Το μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ που έχει συνάρτηση κατανομής την F είναι μοναδικό, γιατί αν υπήρχαν δύο τέτοια μέτρα, θα ταυτίζονταν στα διαστήματα της μορφής $(-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}$ και άρα και στα διαστήματα της μορφής $(a, b],\ a < b \in \mathbb{R}$ τα οποία σχηματίζουν ημιδαχτύλιο.
Τότε όμως, από το Θεώρημα του Καραθεοδωρή, έχουμε μοναδική επέκταση στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ και άρα τα δύο μέτρα ταυτίζονται. □

Από την προηγούμενη παρατήρηση και το τελευταίο θεώρημα, συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις κατανομής μέτρου πιθανότητας και τα μέτρα πιθανότητας στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, βρίσκονται σε 1-1 και επί αντιστοιχία.

Πρόταση 1.4. *Έστω μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και F η συνάρτηση κατανομής του.*
Έστω $x \in \mathbb{R}$. Το x είναι σημείο συνέχειας της F, αν και μόνο αν, $\mu(\{x\}) = 0$.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$F(x-) = \mu(-\infty, x). \tag{1}$$

Πράγματι, έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x_n \nearrow x$.
Τότε $((-\infty, x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία Borel συνόλων και άρα από γνωστή ιδιότητα των μέτρων

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(-\infty, x_n] = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, x_n]) = \mu(-\infty, x)$$

Λόγω της (1), $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mu(\{x\}) = \mu((-\infty, x]\setminus(-\infty, x)) = \mu(-\infty, x]-\mu(-\infty, x) = F(x)-F(x-)$$

δηλαδή

$$\mu(\{x\}) = F(x) - F(x-) \tag{2}$$

Από τη (2) έχουμε ότι η F είναι αριστερά συνεχής στο x, άρα και συνεχής στο x, αν και μόνο αν $\mu(\{x\}) = 0$. □

2. ΑΣΘΕΝΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Ορισμός 1.5. Έστω $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συναρτήσεων κατανομής μέτρων πιθανότητας και F συνάρτηση κατανομής μέτρου πιθανότητας.
Λέμε ότι η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **συγκλίνει ασθενώς** στην F και συμβολίζουμε $F_n \Rightarrow F$, αν

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \ \forall x \text{ σημείο συνέχειας της } F.$$

Πρόταση 1.6. *Έστω $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία συναρτήσεων κατανομής.*
Τότε το όριο είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Έστω $F_n \Rightarrow F$ και $F_n \Rightarrow G$, όπου F, G συναρτήσεις κατανομής.
Οι F, G είναι αύξουσες άρα αν A_F, A_G τα σύνολα των σημείων ασυνέχειας τους, τότε A_F, A_G είναι αριθμήσιμα.
Έστω $A = A_F \cup A_G$. Το A είναι αριθμήσιμο και άρα το $\mathbb{R} \setminus A$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus A$, ισχύει

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = G(x) \tag{1}$$

από την υπόθεση ότι $F_n \Rightarrow F$ και $F_n \Rightarrow G$.

Έστω $x \in A$. Επειδή $\mathbb{R} \setminus A$ πυκνό στο $\mathbb{R}$, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $x_k \searrow x$. Τότε, λόγω του ότι F, G είναι δεξιά συνεχείς στο x και $F(x_k) = G(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$F(x) = \lim_{k\to\infty} F(x_k) = \lim_{k\to\infty} G(x_k) = G(x) \tag{2}$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι $F(x) = G(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. □

Ορισμος 1.7. Έστω μ_n, μ μέτρα πιθανότητας στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Λέμε ότι η $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς στο μ και συμβολίζουμε $\mu_n \Rightarrow \mu$, όταν

$$F_{\mu_n} \Rightarrow F_\mu$$

Προταση 1.8. *Έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.*
Έστω ότι κάθε υπακολουθία της (μ_n) περιέχει περαιτέρω υπακολουθία που συγκλίνει ασθενώς στο μ.
Τότε

$$\mu_n \Rightarrow \mu$$

Αποδειξη. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\mu_n \not\Rightarrow \mu$.
Ισοδύναμα αν F_n, F οι συναρτήσεις κατανομής των μ_n, μ,
$\exists x_0$ σημείο συνέχειας της F τέτοιο ώστε

$$F_n(x_0) \not\to F(x_0)$$

Άρα $\exists \epsilon > 0$, τέτοιο ώστε $\exists M \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο, με

$$\mid F_m(x_0) - F(x_0) \mid > \epsilon, \ \forall m \in M. \tag{1}$$

Η $(\mu_m)_{m\in M}$ είναι υπακολουθία της (μ_n) και άρα από την υπόθεση έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία στο μ.
Συνεπώς, η $(F_m(x_0))_{m\in M}$, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $F(x_0)$, που είναι άτοπο από (1). □

Θεωρημα 1.9 (Θεώρημα Skorohod). *Έστω μ_n, μ μέτρα πιθανότητας στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ και έστω ότι $\mu_n \Rightarrow \mu$.*
Τότε υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές Y_n, Y στο χώρο μέτρου πιθανότητας $((0,1), \mathcal{B}(0,1), \lambda)$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στο $(0,1)$, τέτοιες ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ η Y_n έχει κατανομή μ_n, η Y έχει κατανομή μ και

$$\lim_{n\to\infty} Y_n(t) = Y(t), \ \forall t \in (0,1).$$

Αποδειξη. Έστω F_n η συνάρτηση κατανομής του μ_n, $\forall n \in \mathbb{N}$ και F του μ.
Για $t \in (0,1)$, θέτουμε όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 1.3

$$Y_n(t) = \inf[t \leq F_n \leq 1]$$

και

$$Y(t) = \inf[t \leq F \leq 1]$$

Όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος 1.3, έχουμε ότι
$\forall x \in \mathbb{R},\ t \in (0,1)$, ισχύει

$$t \leq F(x) \iff x \geq Y(t) \tag{1a}$$

$$t > F(x) \iff x < Y(t) \tag{1b}$$

και

$$t \leq F_n(x) \iff x \geq Y_n(t) \tag{2a}$$

$$t > F_n(x) \iff x < Y_n(t) \tag{2b}$$

Οι Y_n, Y είναι τυχαίες μεταβλητές γιατί από $(1a), (2a)$ αντιστρέφουν τα διαστήματα της μορφής $(-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}$ σε διαστήματα της μορφής $(0, F_n(x)]$ και $(0, F(x)]$, αντίστοιχα, δηλαδή σε σύνολα Borel.

Επιπρόσθετα, όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 1.3, η κατανομή της Y, λY^{-1}, έχει συνάρτηση κατανομής την F, άρα είναι το μέτρο μ, αφού για κάθε συνάρτηση κατανομής αντιστοιχεί μοναδικό μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.
Όμοια για κάθε n το μ_n είναι η κατανομή της Y_n.

Θα δείξουμε ότι $Y_n(t) \to Y(t)$ για $t \in (0,1) \setminus A_Y$, όπου A_Y το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της Y.
Η Y είναι εξ ορισμού αύξουσα, γιατί αν $t_1 < t_2 \in (0,1)$, τότε

$$[t_2 \leq F \leq 1] \subseteq [t_1 \leq F \leq 1]$$

επομένως

$$Y(t_1) = \inf[t_1 \leq F \leq 1] \leq \inf[t_2 \leq F \leq 1] = Y(t_2)$$

Άρα το A_Y είναι αριθμήσιμο σύνολο και άρα το $(0,1) \setminus A_Y$ είναι πυκνό στο $(0,1)$.
Έστω $t \in (0,1) \setminus A_Y$ και $\epsilon > 0$ και επιλέγουμε x τέτοιο ώστε x σημείο συνέχειας της F και

$$Y(t) - \epsilon < x < Y(t) \tag{3}$$

Την επιλογή αυτή, μπορούμε την κάνουμε, γιατί τα σημεία συνέχειας της F είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$ αφού είναι αύξουσα ως συνάρτηση κατανομής.
Έχουμε $x < Y(t)$, επομένως από την $(1b)$

$$F(x) < t \tag{4}$$

Επίσης, επειδή $\mu_n \Rightarrow \mu$ και x σημείο συνέχειας της F, έχουμε

$$F_n(x) \to F(x)$$

άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$F_n(x) < t,\ \forall n \geq n_0,$$

οπότε από $(2b)$ ισχύει

$$x < Y_n(t),\ \forall n \geq n_0. \tag{5}$$

Από (3) και (5) έχουμε ότι

$$Y(t) - \epsilon < Y_n(t),\ \forall n \geq n_0,$$

επομένως
$$Y(t) - \epsilon \leq \liminf Y_n(t)$$
και αυτό για το τυχαίο $\epsilon > 0$, συνεπώς
$$Y(t) \leq \liminf Y_n(t) \tag{A}$$
Έστω $t' > t$ και $\epsilon > 0$ και επιλέγουμε y τέτοιο ώστε, y σημείο συνέχειας της F και
$$Y(t') < y < Y(t') + \epsilon \tag{3'}$$
Έχουμε $y > Y(t')$, άρα από $(1a)$
$$t < t' \leq F(y) \tag{4'}$$
Επίσης, $F_n(y) \to F(y)$, γιατί y σημείο συνέχειας της F, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε
$$t < F_n(y),\ \forall n \geq n_0$$
επομένως από $(2a)$
$$y \geq Y_n(t),\ \forall n \geq n_0. \tag{5'}$$
Από $(3')$ και $(5')$ έχουμε ότι
$$Y_n(t) < Y(t') + \epsilon,\ \forall n \geq n_0$$
επομένως
$$\limsup Y_n(t) \leq Y(t') + \epsilon$$
και αυτό για το τυχαίο $\epsilon > 0$, άρα
$$\limsup Y_n(t) \leq Y(t'),\ \forall t' > t.$$
Επειδή Y συνεχής στο t, έπεται ότι Y είναι δεξιά συνεχής στο t, οπότε
$$\lim_{t' \to t^+} Y(t') = Y(t)$$
και άρα
$$\limsup Y_n(t) \leq Y(t) \tag{B}$$
Από τις (A) και (B) συμπεραίνουμε ότι
$$\lim_{n\to\infty} Y_n(t) = Y(t),\ \forall t \in (0,1) \setminus A_Y$$
Ορίζουμε
$$Y_n'(t) = \begin{cases} Y_n(t), & \forall t \in (0,1) \setminus A_Y \\ 0, & \forall t \in A_Y \end{cases}$$
και
$$Y'(t) = \begin{cases} Y(t), & \forall t \in (0,1) \setminus A_Y \\ 0, & \forall t \in A_Y \end{cases}$$
Τότε $\forall t \in (0,1)$, ισχύει
$$\lim_{n\to\infty} Y_n'(t) = Y'(t)$$
Επίσης, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \lambda[Y \leq x] &= \lambda[([Y \leq x] \cap (\mathbb{R} \setminus A_Y)) \cup ([Y \leq x] \cap A_Y)] \\ &= \lambda([Y \leq x] \cap (\mathbb{R} \setminus A_Y)) + \lambda([Y \leq x] \cap A_Y) \end{aligned}$$

αφού $([Y \leq x] \cap (\mathbb{R} \setminus A_Y))$ και $([Y \leq x] \cap A_Y)$ είναι ξένα.

Ισχύει

$$[Y \leq x] \cap (\mathbb{R} \setminus A_Y) = [Y' \leq x] \cap (\mathbb{R} \setminus A_Y),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

και επειδή A_Y αριθμήσιμο και το μέτρο Lebesgue είναι συνεχές,

$$\lambda([Y \leq x] \cap A_Y) = 0 = \lambda([Y' \leq x] \cap A_Y),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς,

$$\lambda[Y \leq x] = \lambda([Y' \leq x] \cap (\mathbb{R} \setminus A_Y)) + \lambda([Y' \leq x] \cap A_Y) = \lambda[Y' \leq x],\ \forall x \in \mathbb{R},$$

άρα οι συναρτήσεις κατανομής οπότε και οι κατανομές των Y', Y είναι οι ίδιες, δηλαδή η Y' έχει κατανομή μ.

Όμοια οι κατανομές των Y_n', Y_n είναι οι ίδιες, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η Y_n' έχει κατανομή μ_n. □

Θεωρημα 1.10. *Έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ακολουθία μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Τα επομενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\mu_n \Rightarrow \mu$

(ii) *Για κάθε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνεχή και φραγμένη*

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} f d\mu$$

(iii) *Για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, με $\mu(\partial A) = 0$*

$$\mu_n(A) \to \mu(A)$$

Αποδειξη. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνεχής και φραγμένη. Από το Θεώρημα Skorohod επειδή $\mu_n \Rightarrow \mu$, υπάρχουν $Y_n, Y : ((0,1), \mathcal{B}(0,1), \lambda) \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές, τέτοιες ώστε

$$\lambda Y_n^{-1} = \mu_n$$
$$\lambda Y^{-1} = \mu$$

και

$$Y_n(t) \to Y(t),\ \forall t \in (0,1).$$

Έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f\, d(\lambda Y_n^{-1}) = \int_{(0,1)} f \circ Y_n d\lambda$$

Επειδή f συνεχής

$$f(Y_n(t)) \to f(Y(t)),\ \forall t \in (0,1)$$

και επειδή f φραγμένη έχουμε ότι $\exists M > 0$, τέτοιο ώστε

$$| f \circ Y_n | \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\int_{(0,1)} f \circ Y_n\, d\lambda \to \int_{(0,1)} f \circ Y\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu$$

Δηλαδή

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} f d\mu$$

"$(i) \Rightarrow (iii)$" $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, με $\mu(\partial A) = 0$.
Αν $f = I_A$, επειδή f συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \partial A$, έπεται ότι f είναι μ-σχεδόν παντού συνεχής και φραγμένη συνάρτηση.

Από το Θεώρημα Skorohod επειδή $\mu_n \Rightarrow \mu$, υπάρχουν
$Y_n, Y : ((0,1), \mathcal{B}(0,1), \lambda) \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές, τέτοιες ώστε

$$\lambda Y_n^{-1} = \mu_n$$
$$\lambda Y^{-1} = \mu$$

και

$$Y_n(t) \to Y(t), \ \forall t \in (0,1).$$

Έστω $t \in (0,1)$. Αν $Y(t)$ σημείο συνέχειας της f, επειδή $Y_n(t) \to Y(t)$, έχουμε

$$f(Y_n(t)) \to f(Y(t))$$

Ισοδύναμα αν $t \in Y^{-1}(\Sigma_f)$, όπου Σ_f το σύνολο των σημείων συνέχειας της f, τότε

$$(f \circ Y_n)(t) \to (f \circ Y)(t)$$

Ισχύει

$$\lambda(Y^{-1}(\Sigma_f)) = \mu(\Sigma_f) = 1$$

αφού η f είναι μ-σχεδόν παντού συνεχής.
Άρα,

$$f \circ Y_n \to f \circ Y, \quad \lambda\text{-σχεδόν παντού στο } (0,1),$$

δηλαδή ισοδύναμα

$$I_A \circ Y_n \to I_A \circ Y, \quad \lambda\text{-σχεδόν παντού στο } (0,1).$$

Έχουμε

$$\mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}} I_A \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} I_A \, d(\lambda Y^{-1}) = \int_{(0,1)} I_A \circ Y_n \, d\lambda, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

και από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, αφού $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$| \ I_A \circ Y_n \ | \leq 1,$$

$$\int_{(0,1)} I_A \circ Y_n \, d\lambda \to \int_{(0,1)} I_A \circ Y \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} I_A \, d(\lambda Y^{-1}) = \int_{\mathbb{R}} I_A \, d\mu = \mu(A)$$

Δηλαδή

$$\mu_n(A) \to \mu(A)$$

"$(iii) \Rightarrow (i)$" Πρέπει να δείξουμε ότι $\mu_n \Rightarrow \mu$, δηλαδή αν F_n η συνάρτηση κατανομής του μ_n, $\forall n \in \mathbb{N}$ και F η συνάρτηση κατανομής του μ, πρέπει να δείξουμε ότι

$$F_n(x) \to F(x), \ \forall x \text{ σημείο συνέχειας της } F.$$

Πράγματι, έστω x σημείο συνέχειας της F.
Τότε

$$F_n(x) = \mu_n(-\infty, x]$$
$$F(x) = \mu(-\infty, x]$$

όπου $(-\infty, x]$ είναι σύνολα Borel με $\partial(-\infty, x] = \{x\}$.
Επειδή x σημείο συνέχειας της F, από την πρόταση 1.4 έχουμε

$$\mu(\partial(-\infty, x]) = \mu(\{x\}) = 0.$$

Συνεπώς, από την υπόθεση ισχύει

$$F_n(x) = \mu_n(-\infty, x] \to \mu(-\infty, x] = F(x),$$

δηλαδή

$$F_n(x) \to F(x)$$

"$(ii) \Rightarrow (i)$" Πρέπει να δείξουμε ότι $\mu_n \Rightarrow \mu$, δηλαδή αν F_n η συνάρτηση κατανομής του μ_n, $\forall n \in \mathbb{N}$ και F η συνάρτηση κατανομής του μ, πρέπει να δείξουμε ότι

$$F_n(x) \to F(x),\ \forall x \text{ σημείο συνέχειας της } F.$$

Έστω $x < y \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \forall z \leq x \\ 1 - \frac{z-x}{y-x}, & \forall z \in (x, y) \\ 0, & \forall z \geq y \end{cases}$$

Δηλαδή η f είναι σταθερή ίση με 1 στο $(-\infty, 1]$, ακολούθως φθίνει γραμμικά στο (x, y) μέχρι που γίνεται ίση με 0 στο σημείο y και παραμένει ίση με 0 στο $[y, +\infty)$.
Η f είναι συνεχής και φραγμένη, άρα από την υπόθεση

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} f d\mu \tag{1}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_n(x) = \mu_n(-\infty, x] &= \int_{(-\infty,x]} f\, d\mu_n \leq \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_n \\ &= \int_{(-\infty,y]} f\, d\mu_n \leq \mu_n(-\infty, y] = F_n(y) \end{aligned} \tag{2}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} F(x) = \mu(-\infty, x] &= \int_{(-\infty,x]} f\, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu \\ &= \int_{(-\infty,y]} f\, d\mu \leq \mu(-\infty, y] = F(y) \end{aligned} \tag{3}$$

Από (1),(2),(3) έχουμε

$$\limsup F_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu \leq F(y)$$

και
$$F(x) \le \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu \le \liminf F_n(y)$$

Άρα $\forall x < y \in \mathbb{R}$ έχουμε
$$\limsup F_n(x) \le F(y) \tag{A}$$
και
$$F(x) \le \liminf F_n(y) \tag{B}$$

Έστω x σημείο συνέχειας της F.
Τότε
$$\lim_{y \searrow x} F(y) = F(x)$$
άρα από την (A)
$$\limsup F_n(x) \le F(x) \tag{4}$$
Για $y < x \in \mathbb{R}$, εναλλάσοντας το x με το y στη (B), έχουμε ότι
$$F(y) \le \liminf F_n(x) \tag{B'}$$
Επίσης, επειδή x σημείο συνέχειας της F,
$$\lim_{y \nearrow x} F(y) = F(x)$$
άρα από τη (B′)
$$F(x) \le \liminf F_n(x) \tag{5}$$
Συνεπώς από (4) και (5)
$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

□

Θεωρημα 1.11. *Έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda\mid_{[0,1]})$, τέτοια ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ η X_n έχει κατανομή μ_n.*

Αποδειξη. Για κάθε $\omega \in [0,1]$, έχουμε
$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(\omega)}{2^n}, \quad \text{όπου} \quad d_n(\omega) \in \{0,1\}.$$
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $d_n = \frac{1+r_n}{2}$, όπου (r_n) είναι οι συναρτήσεις Rademacher, οι οποίες γνωρίζουμε ότι είναι ανεξάρτητες.
Άρα, η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη.
Σπάμε το σύνολο των φυσικών σε μια άπειρη διαμέριση από άπειρα σύνολα και έχουμε
$$\begin{array}{llll} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \ldots \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \ldots \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \ldots \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{array}$$

όπου $\{d_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.
Θέτουμε

$$U_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{nk}}{2^k},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Να σημειώσουμε ότι το άθροισμα αυτό συγκλίνει πάντα, γιατί $d_{nk}(\omega) \in \{0,1\}$ και για κάθε $\omega \in [0,1]$, δίνει ένα νέο $\omega' \in [0,1]$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η U_n είναι τυχαία μεταβλητή, αφού είναι κατά σημείο όριο τυχαίων μεταβλητών, συγκεκριμένα των μερικών αθροισμάτων $\sum_{k=1}^{l} \frac{d_{nk}}{2^k}$.

Επίσης, η ακολουθία $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, είναι ανεξάρτητη.
Πράγματι, ισχύει

$$\sigma(\sum_{k=1}^{l} \frac{d_{nk}}{2^k}) \subseteq \sigma(d_{n1}, ..., d_{nl}) \subseteq \sigma(\{d_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}),\ \forall l \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή, $\sum_{k=1}^{l} \frac{d_{nk}}{2^k}$ είναι μετρήσιμη ως προς την $\sigma(\{d_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}})$, $\forall l \in \mathbb{N}$, άρα και το όριο της για $l \to +\infty$ είναι μετρήσιμο, επομένως

$$\sigma(U_n) \subseteq \sigma(\{d_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}) \tag{1}$$

Η $(\sigma(\{d_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη ακολουθία σ-αλγεβρών, γιατί προκύπτει από την ανεξάρτητη $(d_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ με διαμέριση του $\mathbb{N}$ και παίρνοντας ενώσεις σε κάθε σύνολο-στοιχείο της διαμέρισης.

Συνεπώς, από την (1) έχουμε ότι $(\sigma(U_1), \sigma(U_2), ..., \sigma(U_n), ...)$ ανεξάρτητη ακολουθία σ-αλγεβρών και άρα η ακολουθία $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, είναι ανεξάρτητη.

Θέτουμε

$$S_{nk} = \sum_{i=1}^{k} \frac{d_{ni}}{2^i},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

δηλαδή $\forall n \in \mathbb{N}$ τα $S_{nk}, k \in \mathbb{N}$ είναι τα μερικά αθροίσματα που συγκλίνουν στη U_n.
Για κάθε $\omega \in [0,1]$,

$$S_{nk}(\omega) \leq S_{nk+1}(\omega),\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

και επίσης $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_{nk} \nearrow U_n$$

Έστω $0 \leq x < 1$. Τότε

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [S_{nk} \leq x] = [U_n \leq x],\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Πράγματι: Έστω $n \in \mathbb{N}$.

$$\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty}[S_{nk} \leq x] \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ S_{nk}(\omega) \leq x$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} S_{nk}(\omega) \leq x \quad \Rightarrow \quad U_n(\omega) \leq x$$

Αντίστροφα

$$\omega \in [U_n \leq x] \quad \Rightarrow \quad U_n(\omega) \leq x \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{ni}(\omega)}{2^i} \leq x$$
$$\Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ S_{nk}(\omega) \leq x \quad \Rightarrow \quad \omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty}[S_{nk} \leq x]$$

Επίσης, $\forall n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $([S_{nk} \leq x])_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, επομένως

$$\lambda[U_n \leq x] = \lambda(\bigcap_{k=1}^{\infty}[S_{nk} \leq x]) = \lim_{k\to\infty} \lambda[S_{nk} \leq x],\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Ισχυρισμός:

$$\lambda[S_{nk} \leq x] = \frac{[2^k x] + 1}{2^k},\ \forall k, n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Έστω $n, k \in \mathbb{N}$ και $c_1, ..., c_k \in \{0, 1\}$.
Τότε λόγω ανεξαρτησίας

$$\lambda[d_{ni} = c_i,\ 1 \leq i \leq k] = \prod_{i=1}^{k} \lambda[d_{ni} = c_i] = \frac{1}{2^k} \tag{5}$$

αφού

$$\lambda[d_m = 0] = \lambda[d_m = 1] = \frac{1}{2},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ισχύει

$$S_{nk}(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \frac{d_{ni}(\omega)}{2^i} = \frac{a(\omega)}{2^k},\ \forall \omega \in [0, 1],$$

όπου $a(\omega) \in \{0, 1, ..., 2^k - 1\}$, δηλαδή έχει 2^k διαφορετικές τιμές αναλόγως του ω.
Το $a(\omega)$ είναι διαφορετικό για κάθε τιμή του $S_{nk}(\omega)$.
Άρα από την (5),

$$\lambda\left[S_{nk}(\omega) = \frac{a(\omega)}{2^k}\right] = \frac{1}{2^k} \tag{6}$$

Το ενδεχόμενο $[S_{nk} \leq x]$ αποτελείται από όλα τα ω που είναι τέτοια ώστε

$$S_{nk}(\omega) = \frac{a(\omega)}{2^k} \leq x$$

Οι τιμές του $a(\omega)$ για τις οποίες $\frac{a(\omega)}{2^k} \leq x$, είναι $0, 1, ..., [2^k x]$, δηλαδή έχουν πλήθος $[2^k x] + 1$. Συνεπώς,

$$[S_{nk} \leq x] = \bigcup_{j=0}^{[2^k x]} \left[\omega \in [0,1] : S_{nk}(\omega) = \frac{j}{2^k}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \lambda[S_{nk} \leq x] = \sum_{j=0}^{[2^k x]} \lambda \left[\omega \in [0,1] : S_{nk}(\omega) = \frac{j}{2^k}\right] \overset{(6)}{=} \frac{[2^k x] + 1}{2^k}$$

Από τις (3) και (4), έχουμε

$$\lambda[U_n \leq x] = \lim_{k \to \infty} \lambda[S_{nk} \leq x] = \lim_{k \to \infty} \frac{[2^k x] + 1}{2^k}$$

Επειδή

$$\frac{2^k x}{2^k} < \frac{[2^k x] + 1}{2^k} \leq \frac{2^k x + 1}{2^k}$$

έχουμε ότι

$$\frac{[2^k x] + 1}{2^k} \xrightarrow{k} x$$

και άρα

$$\lambda[U_n \leq x] = x = \lambda[0, x], \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall 0 \leq x < 1$$

Για $x = 1$ ισχύει

$$\lambda[U_n \leq 1] = 1$$

οπότε

$$\lambda[U_n \leq x] = x = \lambda[0, x], \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [0, 1]. \tag{7}$$

Δηλαδή, προσδιορίσαμε στο χώρο $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda\mid_{[0,1]})$ μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, τέτοια ώστε η κατανομή κάθε U_n να είναι η κατανομή του μέτρο Lebesgue περιορισμένου στο $[0, 1]$. Να σημειώσουμε εδώ, ότι επειδή $\forall n \in \mathbb{N}$, η U_n έχει κατανομή το μέτρο Lebesgue που είναι συνεχές, ισχύει

$$\lambda[U_n = 0] = \lambda[U_n = 1] = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Έστω μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.
Θα βρούμε $\phi : ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda\mid_{[0,1]}) \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, η οποία έχει ως κατανομή το μ, δηλαδή

$$\mu(-\infty, x] = \lambda[\phi \leq x], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Έστω F η συνάρτηση κατανομής του μ.
Ορίζουμε, όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 1.3, για $u \in (0, 1)$

$$\phi(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \ u \leq F(x)\} = \inf F^{-1}[u, 1]$$

και όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος 1.3, ισχύει

$$u \leq F(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \phi(u) \leq x, \ \forall 0 < u < 1 \tag{9}$$

Για $u \in \{0,1\}$ ορίζουμε $\phi(u) = 0$.
Η ϕ είναι τυχαία μεταβλητή, $\phi : ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda \mid_{[0,1]}) \to \mathbb{R}$ γιατί από την (9) αντιστρέφει τα διαστήματα της μορφής $(-\infty, x]$ σε διαστήματα, πιθανώς με ένωση το $\{0,1\}$

Επίσης η ϕ έχει κατανομή, το μ:
Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $\lambda\{0\} = \lambda\{1\} = 0$, ισχύει

$$\lambda[\phi \leq x] = \lambda\{u \in [0,1] : \ \phi(u) \leq x\} = \lambda\{u \in (0,1) : \ \phi(u) \leq x\}$$
$$\overset{(9)}{=} \lambda\{u \in (0,1) : \ u \in (0, F(x)]\,\} = F(x) = \mu(-\infty, x]$$

Όμοια, αν F_n οι κατανομές των μ_n, $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $\phi_n : ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda \mid_{[0,1]}) \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες έχουν ως κατανομές τις μ_n, αντίστοιχα.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$X_n(\omega) = \phi_n(U_n(\omega)), \ \omega \in [0,1]$$

Οι X_n είναι τυχαίες μεταβλητές στον $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda \mid_{[0,1]})$ αφού είναι σύνθεση τυχαίων μεταβλητών.

Έστω $n \in \mathbb{N}$.
Τότε,

$$\lambda[X_n \leq x] = \lambda\{\omega \in [0,1] : \ \phi_n(U_n(\omega)) \leq x\}$$
$$\overset{(8)}{=} \lambda\{\omega \in [0,1] : U_n(\omega) \in (0,1) \text{ και } \phi_n(U_n(\omega)) \leq x\}$$
$$\overset{(9)}{=} \lambda\{\omega \in [0,1] : U_n(\omega) \in (0,1) \text{ και } U_n(\omega) \leq F_n(x)\}$$
$$\overset{(8)}{=} \lambda\{\omega \in [0,1] : \text{ και } U_n(\omega) \leq F_n(x)\}$$
$$\overset{(7)}{=} F_n(x) = \mu_n(-\infty, x]$$

Δηλαδή, $\forall n \in \mathbb{N}$, η X_n έχει κατανομή μ_n και επίσης η ακολουθία (X_n) είναι ανεξάρτητη, γιατί οι U_n είναι ανεξάρτητες και οι ϕ_n είναι Borel συναρτήσεις.

□

Παρατηρηση 1.12. Το τελευταίο θεώρημα, μας δίνει την ύπαρξη **ανεξάρτητης και ισόνομης ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών**, για οποιαδήποτε κατανομή θέλουμε.

3. TIGHT ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΜΕΤΡΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ορισμος 1.13. Έστω $\mathcal{M}$ οικογένεια μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.
Η $\mathcal{M}$ καλείται **tight**, αν $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει φραγμένο διάστημα $(a,b]$, τέτοιο ώστε

$$\mu(a,b] > 1 - \epsilon, \ \forall \mu \in \mathcal{M}.$$

Παρατηρηση 1.14. Σε σχέση με τον τελευταίο ορισμό, παρατηρούμε τα εξής:

(i) Το μονοσύνολο $\{\mu\}$ όπου μ είναι μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, είναι tight οικογένεια.
Πράγματι,

$$1 = \mu(\mathbb{R}) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n]) = \lim_{n\to\infty} \mu(-n, n]$$

δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \mu(-n, n] = 1$$

Συνεπώς, $\forall \epsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\mu(-n_0, n_0] > 1 - \epsilon, \ \forall n \geq n_0,$$

άρα $\{\mu\}$ είναι tight.

(ii) Αν $\mathcal{M} = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$ πεπερασμένη οικογένεια μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, τότε $\mathcal{M}$ είναι tight.
Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Τότε από το (i), για κάθε $i = 1, ..., k$ υπάρχει $n_i = n_i(\mu_i, \epsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\mu_i(-n_i, n_i] > 1 - \epsilon, \ \forall n \geq n_i.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, ..., n_k\}$ και τότε $\forall n \geq n_0$ έχουμε

$$\mu_i(-n_0, n_0] > 1 - \epsilon, \ \forall i = 1, ...k,$$

δηλαδή $\mathcal{M}$ είναι tight.

(iii) Από τον ορισμό, αν η οικογένεια $\mathcal{M}$ είναι tight, τότε και κάθε υποοικογένεια $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ είναι tight.

Θεωρημα 1.15. *Έστω $\mathcal{M}$ οικογένεια μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η $\mathcal{M}$ είναι tight.*
(ii) *Για κάθε $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στην $\mathcal{M}$, υπάρχει υπακολουθία $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ και μ_0 μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε*

$$\mu_{n_k} \Rightarrow \mu_0$$

Αποδειξη. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στη $\mathcal{M}$ και έστω $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των συναρτήσεων κατανομής που αντιστοιχούν στα μ_n.
Από το Θεώρημα Helly, υπάχει υπακολουθία $(F_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ και $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ αύξουσα και δεξιά συνεχής, με την ιδιότητα

$$F_{n_k}(x) \xrightarrow{k} F(x), \ \forall x \text{ σημείο συνέχειας της } F. \tag{1}$$

Θα δείξουμε ότι η F είναι συνάρτηση κατανομής μέτρου πιθανότητας, δηλαδή αφού γνωρίζουμε ότι είναι αύξουσα και συνεχής, θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η $\mathcal{M}$ είναι tight, υπάρχει $(a, b]$ φραγμένο διάστημα στο $\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\mu(a,b] > 1-\epsilon, \ \forall \mu \in \mathcal{M}.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε, περνώντας αν χρειαστεί σε μεγαλύτερο διάστημα, ότι τα a και b είναι σημεία συνέχειας της F, αφού η F είναι αύξουσα άρα έχει το πολύ αριθμήσιμες ασυνέχειες.
Έχουμε δηλαδή ότι,

$$\mu_{n_k}(a,b] > 1-\epsilon, \ \forall k \in \mathbb{N}, \text{ όπου } a, b \text{ σημεία συνέχειας της } F,$$

επομένως

$$F_{n_k}(b) - F_{n_k}(a) > 1-\epsilon, \ \forall k \in \mathbb{N}, \text{ όπου } a, b \text{ σημεία συνέχειας της } F,$$

άρα για $k \to \infty$, επειδή $F_{n_k}(a) \to F(a)$ και $F_{n_k}(b) \to F(b)$ έχουμε

$$F(b) - F(a) \geq 1-\epsilon \tag{2}$$

Από (2) επειδή $F(a), F(b) \in [0,1]$, έχουμε

$$F(b) \geq 1-\epsilon \tag{3}$$

και

$$F(a) \leq \epsilon \tag{4}$$

Λόγω του ότι η F είναι αύξουσα,

$$(3) \Rightarrow \quad \forall x > b, \ 1 \geq F(x) \geq 1-\epsilon$$

και

$$(4) \Rightarrow \quad \forall x < a, \ 0 \leq F(x) \leq \epsilon$$

Δηλαδή, για το τυχαίο $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\forall x < a, \ 0 \leq F(x) \leq \epsilon \quad \text{και} \quad \forall x > b, \ 1 \geq F(x) \geq 1-\epsilon$$

Άρα

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

συνεπώς η F είναι συνάρτηση κατανομής και ισχύει $F_{n_k} \Rightarrow F$.
Τότε αν μ_0 το μέτρο πιθανότητας που αντιστοιχεί στην F, έχουμε

$$\mu_{n_k} \Rightarrow \mu_0$$

"$(ii) \Rightarrow (i)$" Έστω ότι η $\mathcal{M}$ δεν είναι tight.
Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε I φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$, υπάρχει $\mu_I \in \mathcal{M}$ με

$$\mu_I(I) \leq 1-\epsilon$$

Άρα $\forall n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $\mu_n \in \mathcal{M}$ με

$$\mu(-n,n] \leq 1-\epsilon \tag{1}$$

Η ακολουθία $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ από την υπόθεση έχει υπακολουθία $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε

$$\mu_{n_k} \Rightarrow \mu_0$$

όπου μ_0 μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.
Η οικογένεια $\{\mu_0\}$ είναι tight, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε $(a, b]$ έτσι ώστε

$$\mu_0(a, b] > 1 - \epsilon \tag{2}$$

και a, b σημεία συνέχειας της συνάρτησης κατανομής του μ_0, F.
Έστω $k_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$(a, b] \subseteq (-n_{k_0}, n_{k_0}]$$

Τότε από την (1)

$$\mu_{n_k}(-n_k, n_k] \leq 1 - \epsilon, \ \forall k \geq k_0$$

επομένως

$$\mu_{n_k}(a, b] \leq \mu_{n_k}(-n_k, n_k] \leq 1 - \epsilon, \ \forall k \geq k_0.$$

Από την άλλη, επειδή F συνεχής στα a, b,

$$\mu_{n_k}(a, b] = F_{n_k}(b) - F_{n_k}(a) \xrightarrow{k} F(b) - F(a) = \mu_0(a, b]$$

επομένως

$$\mu_{n_k}(a, b] \rightarrow \mu_0(a, b] \tag{3}$$

Επειδή $\mu_{n_k}(a, b] \leq 1 - \epsilon, \ \forall k \geq k_0$, η (3) μας δίνει

$$\mu_0(a, b] \leq 1 - \epsilon$$

που είναι άτοπο από τη (2). $\square$

Παρατηρηση 1.16. Από το τελευταίο θεώρημα, έχουμε ότι:

a) Αν $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και μ_0 μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$\mu_n \Rightarrow \mu_0$$

τότε η οικογένεια $\mathcal{M} = \{\mu_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ είναι tight.

Πράγματι, αν πάρουμε μια ακολουθία από στοιχεία της $\mathcal{M}$, τότε αυτή είτε θα αποτελείται από άπειρα διαφορετικά μ_n και άρα θα συγκλίνει στο μ_0 ή θα αποτελείται από πεπερασμένα οπότε τουλάχιστον ένα από αυτά θα επαναλαμβάνεται άπειρες φορές και άρα θα υπάρχει υπακολουθία που θα συγκλίνει σε αυτό.
Δηλαδή κάθε ακολουθία στην $\mathcal{M}$ έχει υπακολουθία που να συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο μέτρο πιθανότητας μ και άρα από το τελευταίο θεώρημα, η $\mathcal{M}$ είναι tight.

b) Κάθε tight ακολουθία μέτρων πιθανότητας $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, έχει ασθενώς συγκλίνουσα, σε μέτρο πιθανότητας μ_0, υπακολουθία.

4. ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΜΕΤΡΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου.
Αν $\delta : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to [0, +\infty)$ μη αρνητική τυχαία μεταβλητή και ορίσουμε ένα μέτρο ν τέτοιο ώστε

$$\nu(A) = \int_A \delta \, d\mu, \ \forall A \in \mathcal{F} \tag{1}$$

τότε το ν είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν η δ είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ.
Επίσης αν δ' μη αρνητική τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε

$$\nu(A) = \int_A \delta' d\mu, \ \forall A \in \mathcal{F}$$

και το μ είναι σ-πεπερασμένο τότε $\delta = \delta'$, μ-σχεδόν παντού.

Ορισμος 1.17. Λέμε ότι το μέτρο ν που ορίζεται στην (1) έχει **πυκνότητα** δ ως προς το μέτρο μ.
Μια πυκνότητα είναι εξ ορισμού μη αρνητική.

Θεωρημα 1.18. *Αν f μετρήσιμη, ισχύει*

$$\int_A f \, d\nu = \int_A f.\delta \, d\mu \tag{2}$$

όπου το ένα ολοκλήρωμα υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει το άλλο.

Αποδειξη. Αν $f = I_A$ όπου $A \in \mathcal{F}$, τότε

$$\int_A f d\nu = \int_\Omega I_A \, d\nu = \nu(A) \stackrel{(1)}{=} \int_A \delta \, d\mu = \int_A I_A.\delta \, d\mu$$

δηλαδή ισχύει.

Αφού δείξαμε ότι ισχύει για f χαρακτηριστική, ισχύει και για f απλή, λόγω γραμμικότητας.

Αν $f \geq 0$, τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία από απλές (f_n), τέτοια ώστε $f_n \nearrow f$. Τότε από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, $\forall A \in \mathcal{F}$, επειδή για τις απλές ισχύει

$$\int_A f d\nu = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\nu$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_A f_n.\delta \, d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n.\delta \, d\mu = \int_A f.\delta \, d\mu$$

Αν f πραγματική, τότε $f = f^+ - f^-$, όπου f^+, f^- είναι μη αρνητικές. Έχουμε άρα,

$$\int_A f \, d\nu = \int_A f^+ d\nu - \int_A f^- d\nu = \int_A f^+.\delta \, d\mu - \int_A f^-.\delta \, d\mu = \int_A f.\delta \, d\mu, \ \forall A \in \mathcal{F}.$$

□

Θεωρημα 1.19. *Αν η πυκνότητα δ του μέτρου ν ως προς το μέτρο μ, είναι τέτοια ώστε*

$$\delta(\omega) > 0,\ \forall \omega \in \Omega,$$

τότε $\forall A \in \mathcal{F}$

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{\delta}\, d\nu$$

Αν g μετρήσιμη, ισχύει

$$\int_A g\, d\mu = \int_A g . \frac{1}{\delta}\, d\nu,\ \forall A \in \mathcal{F} \tag{3}$$

όπου το ένα ολοκλήρωμα υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει το άλλο.

Αποδειξη. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα για $f = \frac{1}{\delta}$, όπότε από (2) έχουμε

$$\int_A \frac{1}{\delta}\, d\nu = \int_A \frac{1}{\delta} . \delta d\mu = \mu(A),\ \forall A \in \mathcal{F}$$

Δηλαδή δείξαμε ότι το μ έχει πυκνότητα $\frac{1}{\delta}$ ως προς το ν και εφαρμόζοντας πάλι το προηγούμενο θεώρημα έχουμε την (3). ☐

Ορισμος 1.20. Έστω $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ τυχαία μεταβλητή. Λέμε ότι η X έχει πυκνότητα f, αν η f είναι μια μη αρνητική, Borel μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε αν ν η κατανομή της X, ισχύει

$$\mu[X \in A] = \nu(A) = \int_A f d\lambda,\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \tag{$\star$}$$

όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue.
Δηλαδή η κατανομή της X, ν, έχει πυκνότητα f ως προς το μέτρο Lebesgue, λ.

Παρατηρηση 1.21. Σχετικά με τον τελευταίο ορισμό, παρατηρούμε τα εξής:
$i)$ Για $A = \mathbb{R}$ στη $(\star)$, έχουμε ότι

$$\int_R f\, d\lambda = \nu(\mathbb{R}) = 1$$

$ii)$ Αν $f = g$, λ-σχεδόν παντού, τότε g είναι επίσης πυκνότητα της X.
$iii)$ Η $(\star)$ αρκεί να ισχύει για τα διαστήματα της μορφής $(a, b]$, $a > b \in \mathbb{R}$, για να είναι η f πυκνότητα της X.
(γιατί έχουμε δύο μέτρα που ταυτίζονται σε ημιδαχτύλιο και άρα από το Θεώρημα Καραθεοδωρή, ταυτίζονται παντού)
Δηλαδή, αρκεί

$$F(b) - F(a) = \int_{(a,b]} f d\lambda,\ \forall a < b,$$

όπου F η συνάρτηση κατανομής της X.

5. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

5.1. Ορισμός και βασικές ιδιότητες.

Ορισμος 1.22. Έστω μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) d\mu(x) + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) d\mu(x), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Η ϕ ονομάζεται **χαρακτηριστική συνάρτηση του μέτρου πιθανότητας** μ.

Να σημειώσουμε εδώ ότι η ϕ είναι καλά ορισμένη, γιατί $| e^{itx} | \leq 1, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}$, άρα

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\mu(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} | e^{itx} | d\mu(x) \leq \mu(\mathbb{R}) = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Μάλιστα ισχύει

$$| \phi(t) | \leq 1, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{$\star$}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 d\mu(x) = \mu(\mathbb{R}) = 1 \tag{$\star\star$}$$

Ορισμος 1.23. Έστω $X : (\Omega, \mathcal{F}, \nu) \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή.
Η **χαρακτηριστική συνάρτηση της** X, ορίζεται να είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής της, $\mu = \nu X^{-1}$.
Δηλαδή είναι η συνάρτηση $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, με

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\mu(x) = \int_{\Omega} e^{itX} d\nu = E[e^{itX}], \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Λημμα 1.24. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$| e^{ix} - 1 | \leq | x |$$

Αποδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$| e^{ix} - 1 | = | \cos x + i \sin x - 1 | = | \cos x - 1 + i \sin x |$$

$$= \sqrt{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x - 2\cos x + 1 + \sin^2 x}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos x} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \sin \frac{x}{2}$$

$$\leq 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x}{2} \right| = | x |$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί $\forall x \in \mathbb{R}, \ | \sin x | \leq | x |$. □

Προταση 1.25. *Αν $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση ενός μέτρου πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, μ, τότε ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ με $\mid t_1 - t_2 \mid < \delta$, ισχύει

$$\mid \phi(t_1) - \phi(t_2) \mid$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε $\exists N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mu[-N, N] > 1 - \frac{\epsilon}{4}$.
Έστω $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

$$\mid \phi(t_2) - \phi(t_1) \mid = \mid \int_{\mathbb{R}} (e^{it_2x} - e^{it_1x}) d\mu(x) \mid \leq \int_{\mathbb{R}} \mid e^{it_2x} - e^{it_1x} \mid d\mu(x)$$

Επειδή

$$\mid e^{it_2x} - e^{it_1x} \mid = \mid e^{it_1x}(e^{i(t_2-t_1)x} - 1) \mid = \mid e^{it_1x} \mid . \mid e^{i(t_2-t_1)x} - 1 \mid = \mid e^{i(t_2-t_1)x} - 1 \mid$$

και από το λήμμα 1.24 ισχύει

$$\mid e^{i(t_2-t_1)x} - 1 \mid \leq \mid (t_2 - t_1)x \mid,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mid e^{it_2x} - e^{it_1x} \mid d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mid e^{i(t_2-t_1)x} - 1 \mid\ d\mu(x) \\
&= \int_{(-\infty,-N)} \mid e^{i(t_2-t_1)x} - 1 \mid d\mu(x) \\
+ \int_{[-N,N]} \mid e^{i(t_2-t_1)x} - 1 \mid d\mu(x) &+ \int_{(N,+\infty)} \mid e^{i(t_2-t_1)x} - 1 \mid d\mu(x) \\
\leq \int_{(-\infty,-N)} 2 d\mu(x) + \int_{[-N,N]} \mid t_2 - t_1 \mid . \mid x \mid d\mu(x) &+ \int_{(N,+\infty)} 2 d\mu(x) \\
\leq 2\mu(-\infty, -N) + \int_{[-N,N]} \mid t_2 - t_1 \mid .N d\mu(x) &+ 2\mu(N, +\infty) \\
= 2\mu(-\infty, -N) + \mid t_2 - t_1 \mid .N.\mu[-N, N] &+ 2\mu(N, +\infty)
\end{aligned}$$

Δηλαδή $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mid \phi(t_2) - \phi(t_1) \mid &\leq 2[\mu(-\infty, -N) + \mu(N, +\infty)] \\
&+ N. \mid t_2 - t_1 \mid .\mu[-N, N] \qquad (1)
\end{aligned}$$

Επειδή $\mu[-N, N] > 1 - \frac{\epsilon}{4}$, έπεται ότι

$$\mu(-\infty, -N) + \mu(N, +\infty) = \mu(\mathbb{R} \setminus [-N, N]) < \frac{\epsilon}{4}$$

και επίσης ισχύει $\mu[-N, N] \leq 1$, άρα από (1)

$$\mid \phi(t_2) - \phi(t_1) \mid < \frac{\epsilon}{2} + \mid t_2 - t_1 \mid .N,\ \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Αν επιλέξουμε $\delta = \frac{\epsilon}{2N}$, από (2), έχουμε ότι $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ με $\mid t_1 - t_2 \mid < \delta$, ισχύει

$$\mid \phi(t_1) - \phi(t_2) \mid < \epsilon$$

□

Πρόταση 1.26. *Έστω $X_1, ..., X_k$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. Τότε*

$$\phi_{X_1+...+X_k}(t) = \prod_{i=1}^{k} \phi_{X_i}(t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\phi_{X_1+...+X_k}(t) = E[e^{it(X_1+...+X_k)}] = E[\prod_{i=1}^{k} e^{itX_i}]$$

Λόγω της ανεξαρτησίας των X_i,

$$E[\prod_{i=1}^{k} e^{itX_i}] = \prod_{i=1}^{k} E[e^{itX_i}] = \prod_{i=1}^{k} \phi_{X_i}(t)$$

δηλαδή

$$\phi_{X_1+...+X_k}(t) = \prod_{i=1}^{k} \phi_{X_i}(t)$$

□

5.2. Θεώρημα Αντιστροφής.

Θεώρημα 1.27 (Θεώρημα Αντιστροφής). *Έστω μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και ϕ η χαρακτηριστική του συνάρτηση.*
Αν $a < b \in \mathbb{R}$, τότε

$$\mu(a,b) + \frac{1}{2}\mu\{a,b\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt \qquad (1)$$

Επιπλέον, αν τα a, b είναι τέτοια ώστε $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$, τότε

$$\mu(a,b] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt \qquad (2)$$

Απόδειξη. Έστω $a < b \in \mathbb{R}$. Καταρχάς, θα δείξουμε ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση στις (1), (2),

$$f(t) = \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t),\ t \in \mathbb{R},$$

έχει όριο στο $t = 0$, που είναι το μοναδικό σημείο στο οποίο δεν ορίζεται, άρα επειδή ολοκληρώνουμε ως προς το μέτρο Lebesgue που είναι συνεχές, μπορούμε να την ορίσουμε στο 0 να είναι ίση με το όριο της χωρίς να αλλάξει η τιμή του ολοκληρώματος.
Έτσι θα ολοκληρώνουμε μια συνεχή συνάρτηση σε συμπαγές διάστημα $[-T, T]$ και άρα το ολοκλήρωμα θα υπάρχει.

Για να το κάνουμε αυτό, θα δείξουμε ότι η

$$g(t) = \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it},\ t \in \mathbb{R},$$

έχει όριο στο $t = 0$, και θα ορίσουμε $g(0)$, να είναι ίσο με το όριο αυτό, ούτως ώστε η g να είναι συνεχής στο $t = 0$, που είναι αρκετό γιατί γνωρίζουμε ότι η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής και άρα συνεχής στο 0. Ισχύει

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{e^{-ita} - 1}{it} - \frac{e^{-itb} - 1}{it}\right)$$

Το όριο

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-itx} - 1}{t}$$

είναι η παράγωγος της συνάρτησης e^{-ixt} στο $t = 0$, δηλαδή

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-itx} - 1}{it} = (e^{-ixt})'|_{t=0} = -ixe^{-ixt}|_{t=0} = -ix, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή,

$$\lim_{t\to 0} g(t) = b - a$$

Άρα το όριο της f για $t \to 0$, υπάρχει και είναι ίσο με

$$\lim_{t\to 0} f(t) = (b-a)\phi(0) = (b-a)$$

οπότε μπορούμε να ορίσουμε

$$f(0) = b - a$$

χωρίς να αλλάξει η τιμή του ολοκληρώματος στις (1) και (2).

Για $T \geq 0$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\phi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\mu(x)\right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} d\mu(x)\right) dt \qquad (3)$$

Επειδή και στα δυο ολοκληρώματα η ολοκλήρωση γίνεται ως προς πεπερασμένα μέτρα, το μέτρο Lebesgue περιορισμένο στο $[-T, T]$ και το μέτρο πιθανότητας μ, αν δείξουμε ότι

$$\int_{-T}^{T}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} \right| d\mu(x)\right) dt < +\infty$$

τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Fubini για να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης.
Πράγματι, $\forall t \neq 0 \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} \right| = \left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{t} \right| . \left| \frac{e^{itx}}{i} \right| = \left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{t} \right|$$

$$= \left| e^{-itb} \right| . \left| \frac{e^{-ita+itb} - 1}{t} \right| = \left| \frac{e^{it(b-a)} - 1}{t} \right| \leq \frac{|t| . |b-a|}{|t|} = b-a, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

όπου η ανισότητα ισχύει από το λήμμα 1.24. Για $t = 0$ έχουμε ορίσει

$$\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}|_{t=0} = b - a$$

και άρα ισχύει

$$\mid \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}.e^{itx} \mid \leq b - a, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mid \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} \mid d\mu(x) \leq (b-a).\mu(\mathbb{R}) = b - a < +\infty, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

επομένως

$$\int_{-T}^{T} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mid \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} \mid d\mu(x) \right) dt \leq 2T(b-a) < +\infty$$

Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Fubini οπότε,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} d\mu(x) \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} dt \right) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T}^{T} \frac{e^{-it(x-a)} - e^{-it(x-b)}}{it} dt \right) d\mu(x) \qquad (4) \end{aligned}$$

Επειδή

$$\frac{e^{-it(x-a)} - e^{-it(x-b)}}{it}$$

$$= \frac{\cos(t(x-a)) - \cos(t(x-b))}{it} + \frac{\sin(t(x-a)) - \sin(t(x-b))}{t}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

όπου

$$\frac{\cos(t(x-a)) - \cos(t(x-b))}{it}$$

είναι περιττή συνάρτηση του t και

$$\frac{\sin(t(x-a)) - \sin(t(x-b))}{t}$$

είναι άρτια συνάρτηση του t και αφού ολοκληρώνουμε ως προς το μέτρο Lebesgue που είναι συμμετρικό, έχουμε

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{-it(x-a)} - e^{-it(x-b)}}{it} dt$$

$$= \int_{-T}^{T} \frac{\cos(t(x-a)) - \cos(t(x-b))}{it} dt + \int_{-T}^{T} \frac{\sin(t(x-a)) - \sin(t(x-b))}{t} dt$$

$$= 2 \int_{0}^{T} \frac{\sin(t(x-a)) - \sin(t(x-b))}{t} dt, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Άρα

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-T}^{T}\frac{e^{-it(x-a)}-e^{-it(x-b)}}{it}dt\right)d\mu(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{0}^{T}\frac{\sin(t(x-a))-\sin(t(x-b))}{t}dt\right)d\mu(x) \qquad (5)$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u = t \mid x-a \mid$ οπότε

$$\int_0^T \frac{\sin(t(x-a))}{t}dt = \int_0^{T|x-a|}\frac{\sin(u.sgn(x-a))}{u}du$$

$$= sgn(x-a)\int_0^{T|x-a|}\frac{\sin u}{u}du,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

και όμοια

$$\int_0^T \frac{\sin(t(x-b))}{t}dt = sgn(x-b)\int_0^{T|x-b|}\frac{\sin u}{u}du,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Τότε έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{0}^{T}\frac{\sin(t(x-a))-\sin(t(x-b))}{t}dt\right)d\mu(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[sgn(x-a)\int_0^{T|x-a|}\frac{\sin t}{t}dt - sgn(x-b)\int_0^{T|x-b|}\frac{\sin t}{t}dt\right]d\mu(x) \qquad (6)$$

Δηλαδή, από (3),(4),(5),(6), έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[sgn(x-a)\int_0^{T|x-a|}\frac{\sin t}{t}dt - sgn(x-b)\int_0^{T|x-b|}\frac{\sin t}{t}dt\right]d\mu(x) \qquad (7)$$

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $a_n\to+\infty$.
Ορίζουμε

$$I_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[sgn(x-a)\int_0^{a_n|x-a|}\frac{\sin t}{t}dt - sgn(x-b)\int_0^{a_n|x-b|}\frac{\sin t}{t}dt\right],\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2} \qquad (\star)$$

Στο $t = 0$ επειδή ολοκληρώνουμε ως προς συνεχές μέτρο, μπορούμε χωρίς να αλλάξει η τιμή του ολοκληρώματος, να ορίσουμε την προς ολοκλήρωση συνάρτηση h, να είναι

$$h(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

και άρα έχουμε ολοκλήρωμα στο $[0, T]$ συνεχούς συνάρτησης.
Τότε από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, η

$$H(T) = \int_0^T h(t)dt = \int_0^T \frac{\sin t}{t} dt$$

είναι συνεχής ως προς T, οπότε επειδή από $(\star)$

$$\lim_{T\to+\infty} H(T) = \frac{\pi}{2}$$

υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mid \int_0^T \frac{\sin t}{t} dt \mid = \mid H(T) \mid < M, \ \forall T \geq 0.$$

Άρα, επειδή $\mid sgn(z) \mid \leq 1, \ \forall z \in \mathbb{R}$, υπάρχει $M' > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mid I_n(x) \mid < M', \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης,

$$\lim_{n\to\infty} I_n(x) = \begin{cases} 0, & x < a < b \\ \frac{1}{2}, & x = a \\ 1, & a < x < b \\ \frac{1}{2}, & x = b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} I_{\{a,b\}} + I_{(a,b)}$$

Άρα, από το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης του Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_n(x) d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} I_n(x) d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\{a,b\}} d\mu(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} I_{(a,b)} d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{2} \mu\{a,b\} + \mu(a,b)$$

και αυτό ισχύει για την τυχαία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, με $a_n \to +\infty$, επομένως

$$\lim_{T\to+\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[sgn(x-a) \int_0^{T|x-a|} \frac{\sin t}{t} dt - sgn(x-b) \int_0^{T|x-b|} \frac{\sin t}{t} dt \right] d\mu(x) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \mu\{a,b\} + \mu(a,b)$$

Συνεπώς, από την (7)

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)dt=\frac{1}{2}\mu\{a,b\}+\mu(a,b)$$

που είναι η (1) που θέλαμε να δείξουμε.
Αν επιπλέον τα a,b είναι τέτοια ώστε $\mu\{a\}=\mu\{b\}=0$ έχουμε

$$\mu\{a,b\}=0$$

και επίσης ότι

$$\mu(a,b)=\mu(a,b]$$

άρα από την (1) έχουμε τη (2). □

Πορισμα 1.28. *Έστω μ_1,μ_2 μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και ϕ_1,ϕ_2 οι χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις, αντίστοιχα. Τότε*

$$\mu_1=\mu_2 \quad\Longleftrightarrow\quad \phi_1=\phi_2$$

Αποδειξη. '$\Rightarrow$' Αν $\mu_1=\mu_2$ τότε

$$\phi_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}d\mu_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}d\mu_2(x)=\phi_2(t),\ \forall t\in\mathbb{R}$$

'$\Leftarrow$' Έστω ότι $\phi_1=\phi_2$.
Έστω F_1,F_2 οι συναρτήσεις κατανομής των μ_1,μ_2 αντίστοιχα.
Τότε αν A_{F_1},A_{F_2}, είναι τα σύνολα των σημείων ασυνέχειας των F_1,F_2 αντίστοιχα, ισχύει από την πρόταση 1.4 ότι

$$A_{F_1}=\{x\in\mathbb{R}:\mu_1\{x\}>0\}\quad\text{και}\quad A_{F_2}=\{x\in\mathbb{R}:\mu_2\{x\}>0\}$$

Επειδή F_1,F_2 αύξουσες, τα A_{F_1},A_{F_2} είναι αριθμήσιμα σύνολα και άρα $\mathbb{R}\setminus(A_{F_1}\cup A_{F_2})$ πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x<y\in\mathbb{R}$. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}\setminus(A_{F_1}\cup A_{F_2})$, γνησίως φθίνουσα ακολουθία τέτοια ώστε $a_n\searrow x$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}\setminus(A_{F_1}\cup A_{F_2})$, γνησίως αύξουσα ακολουθία τέτοια ώστε $b_n\nearrow y$.
Επειδή $\phi_1=\phi_2$, από τη (2) του Θεωρήματος Αντιστροφής έχουμε

$$\mu_1(a_n,b_n]=\mu_2(a_n,b_n],\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Η $((a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία Borel συνόλων, τέτοια ώστε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n]=(x,y)$$

συνεπώς

$$\mu_1(x,y)=\lim_{n\to\infty}\mu_1(a_n,b_n]\overset{(1)}{=}\lim_{n\to\infty}\mu_2(a_n,b_n]=\mu_2(x,y)$$

Δηλαδή μ_1,μ_2 είναι μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ που ταυτίζονται σε όλα τα ανοιχτά διαστήματα, τα οποία αποτελούν ένα π-σύστημα που παράγει την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ και άρα

$$\mu_1=\mu_2$$

□

Το τελευταίο πόρισμα μας λέει ότι, αν $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο των μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $C(\mathbb{R})$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, υπάρχει συνάρτηση

$$\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \stackrel{1-1}{\to} C(\mathbb{R})$$

με

$$\Phi(\mu) = \phi_\mu, \ \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Θεωρημα 1.29. *Έστω μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, F η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής και ϕ η χαρακτηριστική του συνάρτηση.*
Αν $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, τότε F είναι απολύτως συνεχής και το μ έχει πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \phi(t) dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

Αποδειξη. Έστω $a < b \in \mathbb{R}$.
Για κάθε $T > 0$, ισχύει

$$|I_{[-T,T]}. \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}. \phi(t)| = | I_{[-T,T]} \mid . \mid \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \mid . \mid \phi(t) \mid$$

$$\leq | e^{-itb} \mid . \frac{| e^{-it(a-b)} - 1 |}{| t |}. \mid \phi(t) \mid = \frac{| e^{-it(a-b)} - 1 |}{| t |}. \mid \phi(t) \mid$$

$$\leq | b - a \mid . \mid \phi(t) \mid, \ \forall t \neq 0 \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | b - a \mid . \mid \phi(t) \mid dt = | b - a \mid \int_{-\infty}^{+\infty} \mid \phi(t) \mid dt \ < \ +\infty$$

δηλαδή $\forall T > 0$, έχουμε

$$| \ I_{[-T,T]}. \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}. \phi(t) \mid \leq | b - a \mid . \mid \phi(t) \mid$$

λ-σχεδόν για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου $| b - a \mid . \mid \phi(t) \mid \in L^1(\mathbb{R})$.

Τότε από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, έχουμε ότι

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{[-T,T]} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \to +\infty} I_{[-T,T]} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt \qquad (1)$$

Από το Θεώρημα Αντιστροφής έχουμε ότι,

$$\mu(a, b) + \frac{1}{2} \mu\{a, b\} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt$$

και άρα από την (1)

$$\mu(a,b)+\frac{1}{2}\mu\{a,b\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)dt \tag{2}$$

Θα δείξουμε ότι η F είναι συνεχής παντού.

Ισχύει

$$\mu(a,b]+\frac{1}{2}\mu(\{a,b\})=F(b-)-F(a)+\frac{1}{2}[F(a)-F(a-)+F(b)-F(b-)]$$
$$=\frac{F(b)+F(b-)}{2}-\frac{F(a)+F(a-)}{2},\ \forall a<b\in\mathbb{R}.$$

Έστω $x\in\mathbb{R}$ και $h>0$. Για $a=x-h, b=x$ έχουμε από τη (2)

$$\frac{F(x)+F(x-)}{2}-\frac{F(x-h)+F((x-h)-)}{2}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-it(x-h)}-e^{-itx}}{it}\phi(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ith}-1}{it}e^{-itx}\phi(t)dt \tag{3}$$

Έστω $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $h_n\searrow 0$.
Τότε υπάρχει $M>0$, τέτοιο ώστε $|h_n|\leq M,\ \forall n\in\mathbb{N}$.
Για κάθε $t\neq 0\in\mathbb{R}$ και κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\frac{e^{ith_n}-1}{it}e^{-itx}\phi(t)\right|=\left|\frac{e^{ith_n}-1}{it}\right|.\left|e^{-itx}\right|.\left|\phi(t)\right|$$
$$\leq\frac{|th_n|}{|t|}|\phi(t)|=|h_n|.|\phi(t)|\leq M|\phi(t)|$$

δηλαδή

$$\left|\frac{e^{ith_n}-1}{it}e^{-itx}\phi(t)\right|\leq M|\phi(t)|,\ \text{λ-σχεδόν για κάθε } t\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},$$

όπου η $M.|\phi|$ είναι ολοκληρώσιμη γιατί $\phi\in L^1(\mathbb{R})$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x)+F(x-)}{2}-\frac{F(x-h_n)+F((x-h_n)-)}{2}$$
$$\overset{(3)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ith_n}-1}{it}e^{-itx}\phi(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{ith_n}-1}{it}e^{-itx}\phi(t)\right]dt=0$$

δηλαδή

$$F(x)+F(x-)=\lim_{n\to\infty}F(x-h_n)+F((x-h_n)-)$$

και αυτό για την τυχαία $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,+\infty)$ με $h_n \searrow 0$, άρα

$$F(x)+F(x-)=\lim_{h\searrow 0}F(x-h)+\lim_{h\searrow 0}F((x-h)-)=F(x-)+F(x-)$$

Συνεπώς,

$$F(x)=F(x-),\ \forall x\in\mathbb{R},$$

δηλαδή η F είναι αριστερά συνεχής και επειδή F δεξιά συνεχής ως συνάρτηση κατανομής, έπεται ότι F συνεχής.

Άρα, $\forall a<b\in\mathbb{R}$, επειδή $\mu(\{a\})=\mu(\{b\})=0$, αφού η F είναι συνεχής, από τη (2) έχουμε ότι

$$F(b)-F(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)dt \tag{4}$$

Παρατηρούμε ότι για την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, με

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\phi(t)dt,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

ισχύει

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\phi(t)dt\right)dx \tag{5}$$

όπου

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mid e^{itx}\phi(t)\mid dt\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\mid\phi(t)\mid\ dt\overset{\text{ορ}}{=}M'<+\infty,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

γιατί $\phi\in L^1(\mathbb{R})$ και άρα

$$\int_a^b\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mid e^{itx}\phi(t)\mid dt\right)dx\leq(b-a)M'<+\infty \tag{6}$$

οπότε μπορώ να εφαρμόσω το Θεώρημα Fubini και να εναλλάξω τη σειρά ολοκλήρωσης στη (5).
Τότε

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\phi(t)[\int_a^b e^{-itx}dx]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)dt\overset{(4)}{=}F(b)-F(a)$$

δηλαδή

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

και άρα η f είναι η πυκνότητα της F.
Επειδή, από (6), η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού του Ολοκληρώματος Lebesgue, έχουμε ότι η F είναι απολύτως συνεχής. □

5.3. Σχέση Χαρακτηριστικών Συναρτήσεων και Ροπών.

Λημμα 1.30. *Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, n-φορές παραγωγίσιμη σε μια περιοχή ενός $\xi \in \mathbb{R}$ και τ η συνάρτηση που ορίζεται από την*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \tau(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

τότε

$$\lim_{x\to\xi} \frac{\tau(x)}{(x-\xi)^n} = 0$$

Αποδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n.
Για $n = 1$. Αν f είναι 1-φορά παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του ξ και

$$\tau(x) = f(x) - f(\xi) - f'(\xi)(x-\xi),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

τότε,

$$\lim_{x\to\xi} \frac{\tau(x)}{(x-\xi)^n} = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi) - f'(\xi)(x-\xi)}{(x-\xi)}$$
$$= \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x-\xi} - f'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0$$

Έστω ότι ισχυέι για $n-1$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για n.
Δηλαδή, αν f είναι $(n-1)$-φορές παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του $\xi \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k}{(x-\xi)^{n-1}} = 0$$

Έστω f, n-φορές παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του $\xi \in \mathbb{R}$.
Τότε

$$\tau(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Η τ είναι παραγωγίσιμη για x κοντά στο ξ, γιατί είναι η διαφορά της f που είναι παραγωγίσιμη κοντά στο ξ με ένα πολυώνυμο n-βαθμού που είναι παραγωγίσιμο. Για x κοντά στο ξ ισχύει,

$$\tau'(x) = f'(x) - (\frac{f^{(0)}(\xi)}{0!} + \frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi) + ... + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n)'$$
$$= f'(x) - (\frac{f^{(1)}(\xi)}{0!} + \frac{f^{(2)}(\xi)}{1!}(x-\xi) + ... + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1})$$
$$\Rightarrow \tau'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$

Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση για τη συνάρτηση f' που είναι $(n-1)$-φορές παραγωγίσιμη, έχουμε

$$\lim_{x\to\xi} \frac{\tau'(x)}{(x-\xi)^{n-1}} = 0 \tag{3}$$

Από (2), έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi}\tau(x) = f(\xi) - f(\xi) = 0$$

και άρα

$$\lim_{x\to\xi}\frac{\tau(x)}{(x-\xi)^n} = \frac{0}{0}, \text{ απροσδιόριστο.}$$

Από Κανόνα De l'Hospital

$$\lim_{x\to\xi}\frac{\tau(x)}{(x-\xi)^n} = \lim_{x\to\xi}\frac{\tau'(x)}{n(x-\xi)^{n-1}} \overset{(3)}{=} 0$$

□

Θεωρημα 1.31. *Έστω $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, τυχαία μεταβλητή με χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ.*
Αν $E(\mid X \mid^n) < +\infty$ για κάποιο $n \geq 1$, τότε:

(a) *Η ϕ είναι n-φορές παραγωγίσιμη, με*

$$\phi^{(k)}(t) = i^k E[X^k e^{itX}],\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall 1 \leq k \leq n$$

(b) *Για $t = 0$,*

$$\phi^{(k)}(0) = i^k E[X^k],\ \forall 1 \leq k \leq n$$

(c) *Για κάθε $t \in \mathbb{R}$,*

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}E[X^k] + o(t^n)$$

δηλαδή,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\phi(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^{(k)}}{k!}E[X^k]}{t^n} = 0$$

Αποδειξη. Από την ανισότητα Holder, γνωρίζουμε ότι

$$E(\mid X \mid^n) < +\infty \quad \Rightarrow \quad E(\mid X \mid^k) < +\infty,\ \forall k \leq n.$$

a) Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο k.
Έστω $t_0 \in \mathbb{R}$ και $t \neq t_0 \in \mathbb{R}$.
Τότε αν ν η κατανομή της X,

$$\frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}d\nu(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_0x}d\nu(x)}{t - t_0}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx} - e^{it_0x}}{t - t_0}d\nu(x) \tag{1}$$

Ισχύει,

$$\mid \frac{e^{itx} - e^{it_0x}}{t - t_0} \mid = \mid e^{it_0x} \mid . \frac{\mid e^{i(t-t_0)x} - 1 \mid}{\mid t - t_0 \mid} \leq \frac{\mid t - t_0 \mid . \mid x \mid}{\mid t - t_0 \mid} = \mid x \mid,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Από την υπόθεση $E(\mid X \mid^n) < +\infty$, άρα $E(\mid X \mid) < +\infty$ και άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mid x \mid d\nu(x) = \int_{\Omega} \mid X \mid d\mu = E(\mid X \mid) < +\infty$$

Επίσης

$$\lim_{t \to t_0} \frac{e^{itx} - e^{it_0x}}{t - t_0} = ixe^{it_0x}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

αφού είναι η παράγωγος της e^{itx} στο t_0.

Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεωρήμα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, για $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$, με $t_n \to t_0$, όποτε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(t_n) - \phi(t_0)}{t_n - t_0} \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it_nx} - e^{it_0x}}{t_n - t_0} d\nu(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{it_nx} - e^{it_0x}}{t_n - t_0} d\nu(x) \overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{it_0x} d\nu(x) = iE[Xe^{it_0X}]$$

Δηλαδή για κάθε $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$, με $t_n \to t_0$, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(t_n) - \phi(t_0)}{t_n - t_0} = iE[Xe^{it_0X}]$$

και άρα η ϕ είναι 1-φορά παραγωγίσιμη και

$$\phi'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} = iE[Xe^{it_0X}]$$

Συνεπώς ισχύει για $k = 1$ και άρα αν $n = 1$ τελειώσαμε.
Αν $n > 1$ προχωράμε με την επαγωγή στο k.
Έστω ότι η ϕ είναι $(k-1)$-φορές παραγωγίσιμη, όπου $k - 1 < n$ και

$$\phi^{(k-1)}(t) = i^{k-1} E[X^k e^{itX}], \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Έστω $t_0 \in \mathbb{R}$ και $t \neq t_0 \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\phi^{(k-1)}(t) - \phi^{(k-1)}(t_0)}{t - t_0} = \frac{i^{k-1}(E[X^{k-1}e^{itX}] - E[X^{k-1}e^{it_0X}])}{t - t_0}$$

$$= i^{k-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{k-1}(e^{itx} - e^{it_0x})}{t - t_0} d\nu(x) \tag{2}$$

Ισχύει

$$\mid \frac{x^{k-1}(e^{itx} - e^{it_0x})}{t - t_0} \mid = \mid x^{k-1} \mid . \mid e^{it_0x} \mid . \frac{\mid e^{i(t-t_0)x} - 1 \mid}{\mid t - t_0 \mid}$$

$$\leq \frac{\mid x^{k-1} \mid . \mid t - t_0 \mid . \mid x \mid}{\mid t - t_0 \mid} = \mid x^k \mid, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Από την υπόθεση $E(\mid X \mid^n) < +\infty$, άρα αφού $k \leq n$, $E(\mid X^k \mid) < +\infty$ οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mid x^k \mid d\nu(x) = \int_{\Omega} \mid X^k \mid d\mu = E(\mid X^k \mid) < +\infty$$

Επίσης όπως πριν,

$$\lim_{t\to t_0} \frac{x^{k-1}(e^{itx}-e^{it_0x})}{t-t_0} = x^{k-1}ixe^{it_0x} = ix^ke^{it_0x},\ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Άρα πάλι μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue και έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} \frac{\phi^{(k-1)}(t)-\phi^{(k-1)}(t_0)}{t-t_0} &\overset{(3)}{=} \lim_{t\to t_0} i^{k-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{k-1}(e^{itx}-e^{it_0x})}{t-t_0}d\nu(x)\\ &= i^{k-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t\to t_0}\frac{x^{k-1}(e^{itx}-e^{it_0x})}{t-t_0}d\nu(x)\\ &\overset{(4)}{=} i^{k-1}\int_{-\infty}^{+\infty} ix^ke^{it_0x}d\nu(x) = i^kE[X^ke^{it+0X}]\end{aligned}$$

Δηλαδή, η ϕ είναι $k-$φορές παραγωγίσιμη και ισχύει

$$\phi^{(k)}(t_0) = i^kE[X^ke^{it_0X}],\ \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

οπότε η επαγωγή έχει ολοκληρωθεί.

$b)$ Είναι άμεσο από το (a) για $t=0$.

$c)$ Η ϕ είναι $n-$φορές παραγωγίσιμη στο $t=0$ από το (b). Άρα από το λήμμα 1.30, για την τ που ορίζεται $\forall t \in \mathbb{R}$ ως

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \phi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}t^k\\ &\overset{(b)}{=} \phi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^{(k)}}{k!}E[X^k]\end{aligned}$$

ισχύει

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tau(t)}{t^n} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{t\to 0}\frac{\phi(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^{(k)}}{k!}E[X^k]}{t^n} = 0$$

που είναι το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.32. *Έστω $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ τυχαία μεταβλητή και ϕ_X η χαρακτηριστική της συνάρτηση.*
Αν $E(\mid X\mid^n) < +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mid t\mid^n E(\mid X\mid^n)}{n!} = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad (\star)$$

τότε,

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}E(X^n),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$f_1(x) = \cos tx \quad \text{και} \quad f_2(x) = \cos tx, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Επειδή f_1, f_2 άπειρες φορές παραγωγίσιμες, από το Θεώρημα Taylor, $\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \exists \xi_i \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f_i(x) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f_i^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{f_i^{(k)}(\xi_i)}{k!} x^k, \quad i = 1, 2$$

Επειδή

$$| f_i^{(k)}(x) | \leq | t |^k, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ i = 1, 2,$$

έχουμε

$$| f_i(x) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f_i^{(n)}(0)}{n!} x^n | = | \frac{f_i^{(k)}(\xi_i)}{k!} x^k | \leq \frac{| t |^k | x |^k}{k!}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ i = 1, 2.$$

Επίσης, επειδή οι περιττές παραγώγοι της f_1 και οι άρτιες παραγώγοι της f_2, είναι ίσες με κάποια δύναμη του t, πολλαπλασιασμένη επί $\sin tx$ και άρα στο $x = 0$ μηδενίζονται, έχουμε

$$| f_1(x) - \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ άρτιος}}}^{k-1} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} x^n | \leq \frac{| t |^k | x |^k}{k!}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

και

$$| f_2(x) - \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ περιττός}}}^{k-1} \frac{f_2^{(n)}(0)}{n!} x^n | \leq \frac{| t |^k | x |^k}{k!}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Άρα, επειδή για n άρτιο ισχύει

$$\frac{\partial^n \cos tx}{\partial x^n} |_{x=0} = (it)^n$$

και για n περιττό ισχύει

$$\frac{\partial^n \sin tx}{\partial x^n} |_{x=0} = \frac{(it)^n}{i},$$

έχουμε $\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$| e^{itx} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(it)^n}{n!} x^n | = | \cos tx + i \sin tx - \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ άρτιος}}}^{k-1} \frac{(it)^n}{n!} x^n - \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ περιττός}}}^{k-1} \frac{(it)^n}{n!} x^n |$$

$$\leq | \cos tx - \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ άρτιος}}}^{k-1} \frac{(it)^n}{n!} x^n | + | \sin tx - \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ περιττός}}}^{k-1} \frac{(it)^n}{n!} x^n |$$

$$= | f_1(x) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} x^n | + | i(f_2(x) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f_2^{(n)}(0)}{n!} x^n) | \overset{(1),(2)}{\leq} 2 \frac{| t |^k | x |^k}{k!}$$

Δηλαδή

$$| e^{itx} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(it)^n}{n!} x^n | \leq 2 \frac{| t |^k | x |^k}{k!}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Επειδή, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega | e^{itX} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(it)^n}{n!} X^n \mid d\mu \geq \left| \int_\Omega (e^{itX} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(it)^n}{n!} X^n) d\mu \right| = | \phi_X(t) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(it)^n}{n!} E(X^n) |$$

και από (3) ισχύει

$$\int_\Omega | e^{itX} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(it)^n}{n!} X^n \mid d\mu \leq 2 \int_\Omega \frac{| t |^k | X |^k}{k!} d\mu = 2 \frac{| t |^k E(| X |^k)}{k!}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

έχουμε

$$| \phi_X(t) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(it)^n}{n!} E(X^n) | \leq 2 \frac{| t |^k E(| X |^k)}{k!}, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

και άρα από την $(\star)$ της υπόθεσης, έχουμε τελικά ότι

$$| \phi_X(t) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(it)^n}{n!} E(X^n) | \xrightarrow{k} 0$$

Δηλαδή $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} E(X^n)$$

□

5.4. Θεώρημα Συνέχειας.

Λημμα 1.33. *Έστω μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και ϕ η χαρακτηριστική του συνάρτηση.*
Τότε για κάθε $\delta > 0$, το

$$\int_{-\delta}^{\delta} [1 - \phi(t)] dt$$

είναι πραγματικός μη αρνητικός αριθμός και ισχύει

$$\frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} [1 - \phi(t)] dt \geq \mu(\{x \in \mathbb{R} : | x | \geq \frac{2}{\delta}\})$$

Αποδειξη. Έστω $\delta > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} [1 - \phi(t)] dt &= \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\mu(x) \right) dt \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{itx}) d\mu(x) \, dt \end{aligned} \tag{1}$$

Επειδή

$$\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} \mid 1-e^{itx} \mid d\mu(x)\,dt \leq \int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} 2d\mu(x)\,dt = 4\delta < +\infty \quad (\star)$$

και τα μέτρα ως προς τα οποία ολοκληρώνουμε είναι σ-πεπερασμένα, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Fubini για να εναλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης στην (1). Τότε

$$\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{itx})d\mu(x)\,dt = \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\delta}^{\delta}(1-e^{itx})dt\,d\mu(x) \qquad (2)$$

όπου $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$I(x) \overset{\text{ορ}}{=} \int_{-\delta}^{\delta}(1-e^{itx})dt = \int_{-\delta}^{\delta}(1-\cos tx - i\sin tx)dt$$

$$= 2\delta - 2\frac{\sin\delta x}{x} \qquad (3)$$

Επειδή $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mid 1-e^{itx} \mid \leq 2$$

όπου

$$\int_{-\delta}^{\delta} 2\,dt = 4\delta < +\infty$$

από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} I(x) = \lim_{x\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}(1-e^{itx})dt$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta}\lim_{x\to 0}(1-e^{itx})dt = 0 = I(0)$$

δηλαδή I είναι συνεχές στο $x=0$ και άρα ορίζουμε

$$2\delta - 2\frac{\sin\delta x}{x}\mid_{x=0} = I(0) = 0 \qquad (4)$$

Από (1),(2),(3) έχουμε

$$\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}[1-\phi(t)]dt = \int_{-\infty}^{+\infty}(2-2\frac{\sin\delta x}{\delta x})\,d\mu(x) \qquad (5)$$

Από εδώ φαίνεται ότι

$$\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}[1-\phi(t)]dt$$

είναι πραγματικός αριθμός (συγκλίνει λόγω της $(\star)$).

Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει

$$\mid \frac{\sin\delta x}{\delta x} \mid \leq 1$$

και άρα από (4), $\forall x \in \mathbb{R}$

$$1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x} \geq 0 \tag{6}$$

Επίσης $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\frac{|\sin \delta x|}{|\delta x|} \leq \frac{1}{|\delta x|}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x} \geq 1 - \frac{|\sin \delta x|}{|\delta x|} \geq 1 - \frac{1}{|\delta x|}$$

Άρα $\forall x \in \mathbb{R}$, με $|x| \geq \frac{2}{\delta}$ επειδή

$$|x| \geq \frac{2}{\delta} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{|\delta x|} \leq \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{|\delta x|} \geq \frac{1}{2}$$

ισχύει

$$1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x} \geq \frac{1}{2} \tag{7}$$

Από τις (5),(6),(7) έχουμε

$$\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}[1-\phi(t)]dt \overset{(6)}{\geq} 2\int_{[|x|\geq \frac{2}{\delta}]}(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x})\, d\mu(x)$$

$$\overset{(7)}{\geq} 2\int_{[|x|\geq \frac{2}{\delta}]} \frac{1}{2}\, d\mu(x) = \mu(\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{2}{\delta}\})$$

Από την ανισότητα αυτή έχουμε και ότι

$$\int_{-\delta}^{\delta}[1-\phi(t)]dt$$

είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. □

Θεωρημα 1.34 (Θεώρημα Συνέχειας των Χαρακτ. Συναρτήσεων). *Έστω μ_n, $n \in \mathbb{N}$ και μ μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και έστω ϕ_n, ϕ οι χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις αντίστοιχα.*
Τότε

$$\mu_n \Rightarrow \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \phi_n(t) \xrightarrow{n} \phi(t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Αποδειξη. " $\Rightarrow$ " Έστω ότι $\mu_n \Rightarrow \mu$.
Έστω $t \in \mathbb{R}$.

$$\phi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) d\mu_n(x) + i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) d\mu_n(x)$$

$$\xrightarrow{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) d\mu(x) + i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) d\mu(x) = \phi(t)$$

από το (ii) του θεωρήματος 1.10 αφού cos και sin είναι συνεχείς και φραγμένες πραγματικές συναρτήσεις.

" $\Leftarrow$ " Έστω ότι $\phi_n(t) \to \phi(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$.
Θα δείξουμε ότι $\mathcal{M} = \{\mu_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ είναι tight οικογένεια μέτρων πιθανότητας.
Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή ϕ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση έχουμε ότι $\phi(0) = 1$ και ϕ συνεχής στο 0, άρα υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$| 1 - \phi(t) | < \epsilon,\ \forall t \in (-\delta, \delta)$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{\delta} \mid \int_{-\delta}^{\delta} [1 - \phi(t)]dt \mid \leq \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \mid 1 - \phi(t) \mid\ dt \leq \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \epsilon\, dt = 2\epsilon$$

επομένως

$$\mid \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} [1 - \phi(t)]dt \mid < 4\epsilon \qquad (1)$$

Επειδή $\phi_n(t) \to \phi(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$1 - \phi_n(t) \to 1 - \phi(t),\ \forall t \in (-\delta, \delta)$$

Επίσης

$$\mid 1 - \phi_n(t) \mid \leq 1 + \mid \phi_n(t) \mid \leq 2,\ \forall t \in (-\delta, \delta),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

όπου

$$\int_{-\delta}^{\delta} 2dt = 4\delta < +\infty$$

και άρα από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue,

$$\frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} [1 - \phi_n(t)]dt \xrightarrow{n} \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} [1 - \phi(t)]dt \qquad (2)$$

Από το προηγούμενο λήμμα, έχουμε ότι

$$\int_{-\delta}^{\delta} [1 - \phi(t)]dt \geq 0$$

και άρα από (1)

$$0 \leq \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} [1 - \phi(t)]dt < 4\epsilon$$

συνεπώς από τη (2), $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$0 \leq \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} [1 - \phi_n(t)]dt < 4\epsilon,\ \forall n \geq n_0 \qquad (3)$$

Πάλι από το προηγούμενο λήμμα, έχουμε ότι

$$\mu_n(\{x \in \mathbb{R} : \mid x \mid \geq \frac{2}{\delta}\}) \leq \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} [1 - \phi_n(t)]dt < 4\epsilon,\ \forall n \geq n_0$$

Θέτουμε $a_1 = \frac{2}{\delta}$ και τότε

$$\mu_n(-a_1, a_1] \geq \mu_n(-a_1, a_1)$$
$$= 1 - \mu_n(\{x \in \mathbb{R} : | x | \geq \frac{2}{\delta}\}) > 1 - 4\epsilon, \ \forall n \geq n_0, \qquad (a)$$

Επίσης, για την πεπερασμένη και άρα tight οικογένεια μέτρων πιθανότητας, $\{\mu_n : \ n < n_0\}$, υπάρχει $a_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mu_n(-a_2, a_2] > 1 - 4\epsilon, \ \forall n < n_0 \qquad (b)$$

Άρα αν θέσουμε $a = \max\{a_1, a_2\}$ έχουμε από $(a), (b)$ ότι

$$\mu_n(-a, a] > 1 - 4\epsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

και άρα $\mathcal{M}$ είναι tight.

Επειδή η $\mathcal{M} = \{\mu_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ είναι tight, έχουμε από το θεώρημα 1.15 ότι κάθε υπακολουθία της (μ_n) έχει περαιτέρω υπακολουθία που συγκλίνει ασθενώς. Αν δείξουμε ότι το όριο κάθε συγκλίνουσας περαιτέρω υπακολουθίας μιας υπακολουθίας της (μ_n) είναι το μ, τότε από την πρόταση 1.8 έχουμε ότι

$$\mu_n \Rightarrow \mu$$

Πράγματι, έστω (μ_{n_k}) υπακολουθία της (μ_n) και έστω ν μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε υπάρχει $(\mu_{n_{k_l}})$ υπακολουθία της (μ_{n_k}) με

$$\mu_{n_{k_l}} \Rightarrow \upsilon$$

Από το " $\Rightarrow$ " έχουμε ότι

$$\phi_{n_{k_l}}(t) \to \phi_\nu(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

και από την υπόθεση

$$\phi_{n_{k_l}}(t) \to \phi(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, από τη μοναδικότητα του ορίου

$$\phi_\nu = \phi$$

και άρα από το πόρισμα 1.28 έχουμε

$$\mu = \nu$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.35. *Έστω $\mu_n, \ n \in \mathbb{N}$, μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $\phi_n, \ n \in \mathbb{N}$, οι χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις.*
Έστω ότι

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(t) = \phi(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

όπου ϕ συνεχής στο $t = 0$.
Τότε $\exists \mu$ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να έχει χαρακτηριστική συνάρτηση τη ϕ και

$$\mu_n \Rightarrow \mu$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(0) = \phi(0) \quad \text{και} \quad \phi_n(0) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

ισχύει ότι $\phi(0) = 1$.
Στην απόδειξη του Θεωρήματος Συνέχειας, στο " $\Leftarrow$ ", χρησιμοποιήσαμε μόνο ότι $\phi_n(t) \to \phi(t)$ και ότι ϕ συνεχής στο 0 με $\phi(0) = 1$, για να δείξουμε ότι $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι tight.

Άρα και εδώ μπορούμε να δείξουμε ότι η (μ_n) είναι tight και άρα κάθε υπακολουθία της περιέχει ασθενώς συγκλίνουσα περαιτέρω υπακολουθία.

Έστω $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της (μ_n).
Τότε υπάρχει μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε υπάρχει $(\mu_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της (μ_{n_k}), με

$$\mu_{n_{k_l}} \Rightarrow \mu$$

Από το " $\Rightarrow$ " του Θεωρήματος Συνέχειας, έχουμε

$$\phi_{n_{k_l}}(t) \xrightarrow{l} \phi_\mu(t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Από την υπόθεση

$$\phi_{n_{k_l}}(t) \xrightarrow{l} \phi(t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Τότε λόγω μοναδικότητας του ορίου, από (1) και (2) έχουμε ότι

$$\phi = \phi_\mu$$

Συνεπώς η ϕ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση και επειδή

$$\phi_n(t) \to \phi(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

από το " $\Leftarrow$ " του Θεωρήματος Συνέχειας

$$\mu_n \Rightarrow \mu$$

□

6. ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Έστω $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ δύο χώροι με σ-άλγεβρες και έστω μέτρο μ στον $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$. Αν $\phi : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ μετρήσιμη, τότε ορίζεται στον $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ ένα μέτρο πιθανότητας ν ως εξής:

$$\forall A \in \mathcal{F}_2, \quad \nu(A) = \mu(\phi^{-1}(A)).$$

Θεωρημα 1.36. *Έστω $Z : (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \nu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ τυχαία μεταβλητή. Τότε η σύνθετη συνάρτηση $X(\omega) = Z(\phi(\omega))$ είναι τυχαία μεταβλητή,*

$$X : (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

με

$$E(X) = \int_{\Omega_2} Z d\nu \tag{1}$$

όπου η ύπαρξη του ενός μέλους της (1) δίνει την ύπαρξη του άλλου.

Αποδειξη. Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Τότε $X^{-1}(A) = (Z \circ \phi)^{-1}(A) = \phi^{-1}(Z^{-1}(A)) \in \mathcal{F}_1$, αφού Z είναι τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \nu)$, άρα $Z^{-1}(A) \in \mathcal{F}_2$ και ϕ είναι $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ μετρήσιμη άρα $\phi^{-1}(Z^{-1}(A)) \in \mathcal{F}_1$.
Δηλαδή, η X είναι πράγματι τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu)$.

Έστω ότι $Z = \mathcal{X}_A$, για κάποιο $A \in \mathcal{F}_2$.
Τότε $X = Z \circ \phi = \mathcal{X}_A \circ \phi = \mathcal{X}_{\phi^{-1}(A)}$ και συνεπώς έχουμε,

$$E(X) = \int_{\Omega_1} X d\mu = \int_{\Omega_1} \mathcal{X}_{\phi^{-1}(A)} d\mu$$

$$= \mu(\phi^{-1}(A)) = \nu(A) = \int_{\Omega_2} \mathcal{X}_A d\nu = \int_{\Omega_2} Z d\nu.$$

Αρα η (1) ισχύει όταν η Z είναι χαρακτηριστική συνάρτηση. Όμοια ισχύει όταν είναι απλή και μη αρνητική.

Αν $Z \geq 0$, υπάρχει $(Z_n)_n$ αύξουσα ακολουθία απλών και μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών στον $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \nu)$ τέτοια ώστε $Z_n \to Z$ κατά σημείο. Αν $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = Z_n \circ \phi$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$E(X_n) = \int_{\Omega_2} Z_n d\nu$$

Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης ισχύει,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_2} Z_n d\nu = \int_{\Omega_2} Z d\nu \tag{2}$$

Αν

$$Z_n = \sum_{i=1}^{k} a_i^n \mathcal{X}_{A_i^n},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

τότε

$$X_n = Z_n \circ \phi = \sum_{i=1}^{k} a_i^n \mathcal{X}_{\phi^{-1}(A_i^n)},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

και άρα οι X_n είναι επίσης απλές και μη αρνητικές συναρτήσεις.

$$\text{Επίσης,}\quad Z_n(\omega) \to Z(\omega),\ \forall \omega \in \Omega_2,$$
$$\Rightarrow Z_n(\phi(\omega)) \to Z(\phi(\omega)),\ \forall \omega \in \Omega_1$$
$$\Rightarrow X_n(\omega) \to X(\omega),\ \forall \omega \in \Omega_1.$$

Επιπλέον είναι προφανές ότι η ακολουθία $(X_n)_n$ είναι αύξουσα, αφού η $(Z_n)_n$ είναι αύξουσα και άρα από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X). \tag{3}$$

Από (2),(3) και λόγω μοναδικότητας του ορίου, έχουμε ότι,

$$E(X) = \int_{\Omega_2} Z d\nu$$

δηλαδή η (1) ισχύει και για Z μη αρνητική.

Τέλος, αν Z είναι πραγματική τυχαία μεταβλητή τότε $Z = Z^+ - Z^-$, όπου Z^+, Z^- είναι μη αρνητικές.
Για την $X = Z \circ \phi$, ισχυέι ότι $X = X^+ - X^-$, όπου X^+, X^- μη αρνητικές, με $X^+(\omega) = Z^+(\phi(\omega))$ και $X^-(\omega) = Z^-(\phi(\omega))$.
Τότε, επειδή η (1) ισχύει για μη αρνητικές,

$$\int_{\Omega_2} Z d\nu = \int_{\Omega_2} Z^+ d\nu - \int_{\Omega_2} Z^- d\nu = E(X^+) - E(X^-) = E(X^+ - X^-) = E(X).$$

Δηλαδή η (1) ισχύει για Z πραγματική.

Είναι φανερό από την απόδειξη, ότι $E(X)$ υπάρχει αν και μόνο αν $\int_{\Omega_2} Z d\nu$ υπάρχει.

$\square$

Θεωρημα 1.37. *Έστω $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας και έστω $X, Y : (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ τυχαίες μεταβλητές, ανεξάρτητες, με κατανομές μ_X, μ_Y αντίστοιχα και αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής F, G.*
Τότε η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματός των X, Y είναι:

$$\mu(X+Y \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-s) d\mu_Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-s) d\mu_X(s), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Αποδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$f_x(r,s) = \begin{cases} 1 & r+s \leq x \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η f_x είναι *Borel* μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^2$, δηλαδή είναι τυχαία μεταβλητή $f_x : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Επίσης ορίζουμε συνάρτηση $\phi : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, με $\phi(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)), \ \forall \omega \in \Omega_1$.

Η ϕ είναι $\mathcal{F}_1 - \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ μετρήσιμη.
Πράγματι, επειδή $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall A, B \in \mathcal{B}(R) \text{ ισχύει } \phi^{-1}(A \times B) \in \mathcal{F}_1.$$

Έστω $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε,

$$\phi^{-1}(A \times B) = (X,Y)^{-1}(A \times B) = X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1,$$

γιατί $X^{-1}(A), Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$ αφού X, Y είναι τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$.

Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα για $Z = f_x, \ \Omega_2 = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ και $\nu = \mu\phi^{-1}$ και έχουμε ότι η σύνθετη συνάρτηση

$Z' = f_x \circ \phi = f_x(X,Y)$ είναι τυχαία μεταβλητή

$$Z' : (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

με

$$E(Z') = \int_{\Omega_2} f_x d\nu$$

δηλαδή,

$$E(f_x(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} f_x d\nu. \tag{1}$$

Ισχύει

$$E(f_x(X,Y)) = \int_{\Omega_1} f_x(X,Y)\, d\mu = \int_{[X+Y\le x]} f_x(X,Y)\, d\mu + \int_{[X+Y>x]} f_x(X,Y)\, d\mu$$

$$= \int_{[X+Y\le x]} 1\, d\mu \;+\; \int_{[X+Y>x]} 0\, d\mu = \mu(X+Y\le x). \tag{2}$$

Το ν είναι μέτρο γινόμενο στον $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)),\ \nu = \mu_X \otimes \mu_Y$.
Δηλαδή αν $R, S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τότε για το $A = R \times S,\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ισχύει,

$$\nu(A) = \mu_X(R).\mu_Y(S).$$

Πράγματι, έστω $R, S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και ορίζω $A = R \times S$. Τότε

$$\nu(A) = \mu((X,Y)^{-1}(A)) = \mu(X^{-1}(R) \cap Y^{-1}(S)) = \mu(X^{-1}(R)).\mu(Y^{-1}(S)),$$

όπου η τελευταία ισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι X,Υ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Η f_x είναι ολοκληρώσιμη ως προς $\nu = \mu_X \otimes \mu_Y$, λόγω των (1) και (2) που δίνουν

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_x\, d\nu = \mu(X+Y\le x) \le 1.$$

Δηλαδή έχουμε $f_x : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_X\otimes\mu_Y) \to \mathbb{R}$, μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη ως προς $\mu_X \otimes \mu_Y$ και άρα εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini έχουμε,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_x d\nu = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_x(r,s) d\mu_X(r) d\mu_Y(s) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_x(r,s) d\mu_Y(s) d\mu_X(r). \tag{3}$$

Επειδή για s σταθερό,

$$\int_{\mathbb{R}} f_x(r,s)\, d\mu_X(r) = \int_{[r\le x-s]} 1\, d\mu_X(r) = \mu_X(-\infty, x-s] = F(x-s)$$

και για r σταθερό,

$$\int_{\mathbb{R}} f_x(r,s)\, d\mu_Y(s) = \int_{[s\le x-r]} 1\, d\mu_Y(s) = \mu_Y(-\infty, x-r] = G(x-r),$$

έχουμε από την (3) ότι

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_x d\nu = \int_{\mathbb{R}} F(x-s)d\mu_Y(s) = \int_{\mathbb{R}} G(x-r)d\mu_X(r) = \int_{\mathbb{R}} G(x-s)d\mu_X(s). \tag{4}$$

Από (1),(2) και (4) έχουμε τη ζητούμενη ισότητα.

□

Από εδώ και στο εξής, βρισκόμαστε σε ένα χώρο μέτρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, με εξαίρεση όπου αναφέρεται διαφορετικά.

Έστω F, G δύο συναρτήσεις κατανομής με αντίστοιχες κατανομές μ_F, μ_G.
Τότε, από το θεώρημα 1.11, υπάρχουν X, Y τυχαίες μεταβλητές στον $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$, ανεξάρτητες, με κατανομές μ_F και μ_G, αντίστοιχα και από το τελευταίο θεώρημα ισχύει ότι:

$$\lambda(X+Y \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-s)d\mu_G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-s)d\mu_F(s), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άρα τα πιο πάνω ολοκληρώματα υπάρχουν πάντα και μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμος 1.38. Ονομάζουμε **συνέλιξη** των F, G και συμβολίζουμε με $F * G$, τη συνάρτηση

$$(F * G)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-s)d\mu_G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-s)d\mu_F(s), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Αν X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με συναρτήσεις κατανομής F, G αντίστοιχα, τότε η συνέλιξη $F * G$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $X + Y$.

Προταση 1.39. *Έστω μ_1, μ_2, μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, με συναρτήσεις κατανομής F, G, αντίστοιχα.*
Τότε,

$$\phi_{F*G}(t) = \phi_F(t).\phi_G(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Αποδειξη. Από τον προηγούμενο ορισμό,

$$(F * G)(t) = \mu(X + Y \leq t), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

όπου X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F, G αντίστοιχα (υπάρχουν πάντα από το θεώρημα 1.11).

Δηλαδή, η συνέλιξη $F * G$ είναι η συνάρτηση κατανομής του μέτρου πιθανότητας μ_{X+Y}.

Συνεπώς, επειδή οι X, Y είναι ανεξάρτητες,

$$(\phi_{F*G})(t) = \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t).\phi_Y(t) = \phi_F(t).\phi_G(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

Ορισμος 1.40. Μια συνάρτηση κατανομής F ονομάζεται εκφυλισμένη

i) αν η κατανομή στην οποία αντιστοιχεί είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο, ή ισοδύναμα,
ii) αν είναι δίτιμη, με τιμές 0 και 1, ή ισοδύναμα,
iii) αν κάθε τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F, είναι σχεδόν παντού σταθερή, ή ισοδύναμα,
iv) αν $\exists c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε αν ϕ η χαρακτηριστική της συνάρτηση, ισχυέι $\phi(t) = e^{itc}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Να σημειώσουμε εδώ, ότι αν μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με σταθερή χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ, τότε μ έχει όλη του τη μάζα συγκεντρωμένη στο 0. Πράγματι, επειδή $\phi(0) = 1$ και ϕ σταθερή, έχουμε ότι $\phi(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
Δηλαδή
$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\mu(x) = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}$$
και άρα $\mu\{0\} = 1$.

Προταση 1.41. *Έστω F, G είναι μη εκφυλισμένες συναρτήσεις κατανομής. Τότε $F * G$ είναι μη εκφυλισμένη.*

Αποδειξη. Έστω ότι $F * G$ είναι εκφυλισμένη.
Τότε αν X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F, G αντίστοιχα, η $F * G$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $X + Y$. Δηλαδή η κατανομή της $X + Y$ είναι εκφυλισμένη, δηλαδή συγκεντρωμένη σε ένα σημείο, άρα $X + Y$ είναι σταθερή με πιθανότητα 1 και άρα $\exists c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $P(X + Y = c) = 1$.

Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε
$$P[X \in A] > 0.$$
Επειδή $P(X + Y = c) = 1$,
$$\Rightarrow \exists N \in \mathcal{F}, \text{ με } P(N) = 0 \text{ τ.ω. } (X + Y)(\omega) = c, \ \forall \omega \in \Omega \setminus N.$$
Έστω $\omega \in [X \in A]$. Τότε είτε
$$\omega \in N, \quad \text{ή} \quad \omega \in [Y \in c - A].$$
Δηλαδή,
$$[X \in A] \subseteq N \cup [Y \in c - A]$$
και άρα
$$P[X \in A] \leq P[Y \in c - A] \qquad (a)$$
Έστω $\omega \in [Y \in c - A]$. Τότε είτε
$$\omega \in N, \quad \text{ή} \quad \omega \in [X \in A].$$
Δηλαδή,
$$[Y \in c - A] \subseteq N \cup [X \in A]$$

και άρα

$$P[Y \in c - A] \leq P[X \in A] \qquad (b)$$

Από (α) και (β) έχουμε ότι

$$P[X \in A] = P[Y \in c - A] > 0$$

Έστω $\omega \in [X \in A]$. Τότε ή $\omega \in N$ ή $\omega \in [X \in A] \cap [Y \in c - A]$. Άρα

$$P[X \in A] \leq P([X \in A] \cap [Y \in c - A])$$

και επειδή προφανώς $P([X \in A] \cap [Y \in c - A]) \leq P[X \in A]$, έχουμε

$$P[X \in A] = P([X \in A] \cap [Y \in c - A]).$$

Τότε, λόγω ανεξαρτησίας των X, Y, ισχύει

$$P[X \in A] = P([X \in A] \cap [Y \in c - A]) = P[X \in A].P[Y \in c - A] = P[X \in A]^2$$

$$\Rightarrow P[X \in A] = 1.$$

Δηλαδή $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει $P[X \in A] = 0$ ή 1.

Άρα $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = P(X \in (-\infty, x]) = 0 \text{ ή } 1,$$

δηλαδή η F είναι εκφυλισμένη, άτοπο.

$\square$

7. ΤΥΠΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Ορισμος 1.42. Θα λέμε ότι δύο συναρτήσεις κατανομής μέτρου πιθανότητας F, G είναι **του ίδιου τύπου**, αν υπάρχουν $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, τέτοια ώστε,

$$F(bx + a) = G(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ο ορισμός, μας λέει ότι η F είναι μια απλή μετατόπιση της G πιθανόν με μια αλλαγή στην κλίμακα.

Συμβολίζουμε με " $\sim$ " τη σχέση "είναι του ίδιου τύπου".
Η σχέση " $\sim$ " είναι σχέση ισοδυναμίας.
Πράγματι, ικανοποιεί τις 3 υποθέσεις.

i **Αυτοπαθής:** $F \sim F$.
Πράγματι, για $b = 1, a = 0$, έχουμε $F(bx + a) = F(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

ii **Συμμετρική:** Αν $F \sim G$ τότε $G \sim F$.
Πράγματι, $F \sim G \ \Rightarrow$

$$\exists\, a \in \mathbb{R}, b > 0, \text{ τέτοια ώστε } F(bx + a) = G(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$G(\frac{1}{b}x - \frac{a}{b}) \overset{(1)}{=} F[b(\frac{1}{b}x - \frac{a}{b}) + a] = F(x - a + a) = F(x).$$

Δηλαδή, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$G(\frac{1}{b}x - \frac{a}{b}) = F(x) \quad \Rightarrow \quad G \sim F.$$

iii **Μεταβατική:** Αν $F \sim G$ και $G \sim H$, τότε $F \sim H$.
Πράγματι,

$$F \sim G \;\Rightarrow\; \exists\, a_1 \in \mathbb{R}, b_1 > 0 \;\text{ τ.ω }\; F(b_1x + a_1) = G(x),\; \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$G \sim H \;\Rightarrow\; \exists\, a_2 \in \mathbb{R}, b_2 > 0 \;\text{ τ.ω }\; G(b_2x + a_2) = H(x),\; \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε, $F(b_1(b_2x+a_2)+a_1) \overset{(1)}{=} G(b_2x+a_2) \overset{(2)}{=} H(x)$.
Δηλαδή,

$$F(b_1b_2x + (b_1a_2 + a_1)) = H(x),\; \forall x \in \mathbb{R},$$

άρα ισοδύναμα, $F \sim H$.

Παρατηρηση 1.43. Παρατηρούμε ότι μια συνάρτηση κατανομής είναι εκφυλισμένη αν και μόνο αν κάθε συνάρτηση κατανομής του ίδιου τύπου με αυτήν είναι εκφυλισμένη.
Δηλαδή υπάρχει η κλάση ισοδυναμίας των εκφυλισμένων συναρτήσεων κατανομής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

1. ΤΥΠΙΚΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΗΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Πρόταση 2.1. *Η συνάρτηση*

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

είναι συνάρτηση κατανομής μέτρου πιθανότητας.

Απόδειξη. Η F είναι αύξουσα γιατί $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Η $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ είναι συνεχής και άρα από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, η F είναι συνεχής και άρα δεξιά συνεχής.

Ισχυρισμός

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{1}$$

Επειδή e^{-x^2} είναι άρτια, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Από το Θεώρημα Tonelli, ισχύει

$$\left(\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx . \int_{0}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} \left(\int_{0}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) dx = \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx \, dy$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες,

$$x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta, \quad r \in [0, +\infty), \ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

όποτε

$$\int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx \, dy = \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} . I(r, \theta) \, d\theta \, dr$$

όπου

$$I(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

Δηλαδή,

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}.r \, d\theta \, dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} r.e^{-r^2} \, dr = -\frac{\pi}{4} \int_0^{+\infty} (-2r).e^{-r^2} \, dr = \frac{\pi}{4}$$

Συνεπώς

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

και άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Από την (1), αν κάνουμε αλλαγή μεταβλητών $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$, έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2}.e^{-u^2} du = \sqrt{2\pi} \tag{2}$$

Επειδή $\mid I_{(-\infty,t]}(x).e^{-\frac{x^2}{2}} \mid \leq e^{-\frac{x^2}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall t \in \mathbb{R}$, όπου από (2) η $e^{-\frac{x^2}{2}}$ είναι ολοκληρώσιμη, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, έχουμε ότι

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{(-\infty,t]}(x).e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t \to -\infty} I_{(-\infty,t]}(x).e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

Μένει να δείξουμε ότι

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$$

Πράγματι,

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \overset{(2)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\sqrt{2\pi} = 1$$

□

Ορισμος 2.2. Το μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ που αντιστοιχεί στη συνάρτηση κατανομής

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

ονομάζεται **Τυπική Κανονική Κατανομή** και συμβολίζεται $N(0,1)$. Η Τυπική Κανονική Κατανομή, έχει πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$,

ως προς το μέτρο Lebesgue.
Επειδή η f είναι συνεχής, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, έχουμε ότι η F είναι συνεχής.

Πρόταση 2.3. *Έστω $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Τυπική Κανονική Κατανομή.*
Τότε ισχύουν:

(i)
$$E(X^k) = \begin{cases} 0, & k \text{ περιττός} \\ 1.3.5...(k-1), & k \text{ άρτιος} \end{cases}$$

(ii)
$$E(\mid X \mid^{2k+1}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.2^k.k!, \ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(iii) *Για κάθε $t \in \mathbb{R}$,*
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mid t \mid^{2k+1} E(\mid X \mid^{2k+1})}{(2k+1)!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\mid t \mid^{2k} E(\mid X \mid^{2k})}{(2k)!} = 0$$

Απόδειξη. Έστω $\nu = \mu X^{-1}$ η κατανομή της X (Τυπική Κανονική Κατανομή).

$i)$ Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, από το θεώρημα 1.18
$$E(X^k) = \int_\Omega X^k d\mu = \int_\mathbb{R} x^k d\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k.e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (1)$$
Για k περιττό, η $x^k.e^{-\frac{x^2}{2}}$ είναι περιττή συνάρτηση, άρα από την (1), $E(X^k) = 0$.
Για k άρτιο, δείχνουμε ότι
$$E(X^k) = (k-1)E(X^{k-2}) \qquad (2)$$
Πράγματι, έστω $k \in \mathbb{N}$, άρτιος.
Από (1) έχουμε,
$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k.e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
Θέτουμε, $x^{k-1} = u$, άρα $(k-1)x^{k-2}dx = du$ και $x.e^{-\frac{x^2}{2}}dx = dv$ άρα $-e^{-\frac{x^2}{2}} = v$ και ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες, οπότε
$$E(X^k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} x^{k-1} \mid_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (k-1)x^{k-2}dx \right]$$
$$= (k-1) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-2}.e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] = (k-1)E(X^{k-2})$$

Έχουμε $E(X^0)=1$ επομένως

$$E(X^2)\overset{(1)}{=}1.E(X^0)=1$$

$$E(X^4)\overset{(2)}{=}3.E(X^2)=3.1$$

και για $k>4$ άρτιο,

$$E(X^k)\overset{(2)}{=}(k-1).E(X^{k-2})\overset{(2)}{=}(k-1).(k-3).E(X^{k-4})=...=(k-1).(k-3)...1$$

$ii)$ Έστω $k\in\mathbb{N}$. Τότε

$$E(\mid X\mid^{2k+1})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mid x\mid^{2k+1}.e-\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x.\mid x\mid^{2k-1}.x.e-\frac{x^2}{2}dx$$

Θέτουμε $x.e^{-\frac{x^2}{2}}dx=dv$ άρα $-e^{-\frac{x^2}{2}}=v$ και $x.\mid x\mid^{2k-1}=u$
άρα $2k\mid x\mid^{2k+1}dx=du$ και ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες, οπότε

$$E(\mid X\mid^{2k+1})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-x\mid x\mid^{2k-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\mid_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}.2k.\mid x\mid^{2k-1}dx\right]$$

$$=2k\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mid x\mid^{2k-1}.e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right]=2kE(\mid X\mid^{2k-1})$$

Δηλαδή

$$E(\mid X\mid^{2k+1})=2kE(\mid X\mid^{2k-1}),\ \forall k\in\mathbb{N}. \qquad (3)$$

Για $k=0$,

$$E(\mid X\mid)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mid x\mid.e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

και επειδή $\mid x\mid.e^{-\frac{x^2}{2}}$ είναι άρτια συνάρτηση,

$$E(\mid X\mid)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\mid x\mid.e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x.e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mid_{-\infty}^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Για $k=1$

$$E(\mid X\mid^3)\overset{(3)}{=}2E(\mid X\mid)=2.\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

δηλαδή για $k=1$ ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για k και θα δείξουμε ότι ισχύει για $k+1$.
Πράγματι, αφού ισχύει για k

$$E(\mid X\mid^{2(k+1)+1})=E(\mid X\mid^{2k+3})\overset{(3)}{=}2(k+1)E(\mid X\mid^{2k+1})$$

$$= 2(k+1).\sqrt{\frac{2}{\pi}}.2^k.k! = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.2^{k+1}.(k+1)!$$

Άρα

$$E(\mid X \mid^{2k+1}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.2^k.k!,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

$iii)$ Θα δείξουμε με χρήση του (i) ότι

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mid t \mid^{2k} E(\mid X \mid^{2k})}{(2k)!} = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

και όμοια από το (ii) βγαίνει και το άλλο.

Έστω $t \in \mathbb{R}$ και έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε έχουμε

$$\frac{\mid t \mid^{2k} E(\mid X \mid^{2k})}{(2k)!} = \frac{\mid t \mid^{2k} E(X^{2k})}{(2k)!} \overset{(i)}{=} \frac{\mid t \mid^{2k} (1.3....(2k-1))}{(2k)!} = \frac{\mid t \mid^{2k}}{2.4...(2k)}$$

Ισχύει

$$2.4...(2k) = 2^k(1.2...k) = 2^k k!,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$\frac{\mid t \mid^{2k} E(\mid X \mid^{2k})}{(2k)!} = \frac{\mid t \mid^{2k}}{2^k k!} = \frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Επειδή

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!} = e^{\frac{t^2}{2}} < +\infty$$

έχουμε ότι

$$\frac{\mid t \mid^{2k} E(\mid X \mid^{2k})}{(2k)!} = \frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!} \xrightarrow{k} 0$$

□

Πρόταση 2.4. *Έστω $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Τυπική Κανονική Κατανομή.*
Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση συνάρτηση της X είναι

$$\phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Από το (i) και το (ii) της πρότασης 2.3 έχουμε ότι

$$E(\mid X \mid^n) < +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

και από το (iii) της ίδιας πρότασης έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mid t \mid^n E(\mid X \mid^n)}{n!} = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Από την πρόταση 1.32 οι προυποθέσεις της οποίας είναι οι (1) και (2), έχουμε ότι η ϕ_X γράφεται σαν δυναμοσειρά

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} E(X^n), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Πάλι από το (i) της πρότασης 2.3, έχουμε

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} E(X^{2n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!}(1.3...(2n-1))$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{2.4...(2n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{-t^2}{2})^n}{n!} = e^{-\frac{t^2}{2}}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

2. ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΟΡΙΑΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Λημμα 2.5. *Έστω $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $z \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε*

$$z_n \xrightarrow{n} z$$

Τότε

$$(1 + \frac{z_n}{n})^n \xrightarrow{n} e^z$$

Αποδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$.
Από το διώνυμο του Νέυτωνα, έχουμε ότι

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z_n}{n}\right)^k = 1 + z_n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z_n}{n}\right)^k$$

Αν $n \geq 2$, έστω $2 \leq k \leq n$. Τότε

$$\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{z_n}{n}\right)^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{z_n^k}{n^k} = \frac{(n-k+1)...(n-1)n}{n^k} \cdot \frac{z_n^k}{k!}$$

$$= \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) ... \left(1 - \frac{1}{n}\right) .1. \frac{z_n^k}{k!} = a(n,k)\frac{z_n^k}{k!}$$

όπου

$$a(n,k) \overset{\text{ορ}}{=} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) . \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) ... \left(1 - \frac{1}{n}\right) .1, \ 2 \leq k \leq n.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $f_n : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C}$, με

$$f_n(k) = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = 0 \\ z_n, & \text{αν } k = 1 \\ a(n,k)\frac{z_n^k}{k!}, & \text{αν } 2 \leq k \leq n \\ 0, & \text{αν } k > n \end{cases}$$

Αν μ είναι το αριθμητικό μέτρο στο $\mathbb{N}\cup\{0\}$, δηλαδή $\mu(A)$ είναι το πλήθος των στοιχείων του A, $\forall A \subseteq \mathbb{N}\cup\{0\}$, ισοδύναμα

$$\mu(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} I_A(k),\ \forall A \subseteq \mathbb{N}\cup\{0\},$$

τότε

$$\int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} f_n d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{k\}} f_n d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\{k\}) f_n(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k) = 1 + z_n + \sum_{k=2}^{n} a(n,k)\frac{z_n^k}{k!} = \Big(1+\frac{z_n}{n}\Big)^n$$

Γνωρίζουμε ότι

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Ορίζουμε $f : \mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{C}$ με

$$f(k) = \frac{z^k}{k!}$$

και τότε

$$\int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} f d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{k\}} f d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Άρα η σύγκλιση

$$(1+\frac{z_n}{n})^n \xrightarrow{n} e^z$$

που θέλουμε να δείξουμε, είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση

$$\int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} f_n d\mu \longrightarrow \int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} f d\mu \tag{1}$$

a) Ισχύει $f_n(k) \xrightarrow{n} f(k),\ \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.
Πράγματι: Για $k=0$,

$$f_n(0) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

και

$$f(0) = 1$$

άρα ισχύει.
Για $k=1$,

$$f_n(1) = z_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

και

$$f(1) = z$$

και έχουμε

$$f_n(1) = z_n \to z = f(1)$$

από την υπόθεση.
Για $k \geq 2$, επειδή

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a(n,k) \xrightarrow{n} 1$$

και

$$z_n \xrightarrow{n} z$$

έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} f_n(k) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq k}} a(n,k)\frac{z_n^k}{k!} = \frac{z^k}{k!} = f(k)$$

b) Θα προσδιορίσουμε $g : \mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} g d\mu < +\infty$$

και

$$\mid f_n(k) \mid \leq g(k),\ \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Επειδή η (z_n) είναι συγκλίνουσα, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mid z_n \mid \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή $a(n,k) \leq 1,\ \forall 2 \leq k \leq n$, έχουμε ότι

$$\mid f_n(k) \mid \leq \frac{M^k}{k!},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

Ορίζουμε $g : \mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{C}$ με

$$g(k) = \frac{M^k}{k!},\ \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

και τότε σχύει

$$\int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} g d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{k\}} g d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = e^M < +\infty$$

Από (a) και (b) μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} f d\mu$$

και άρα από (1) έχουμε το ζητούμενο. □

Θεωρημα 2.6 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, Lindeberg - Lévy). *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών.*
Έστω $\mu = E(X_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$ και έστω ότι η διασπορά

$$V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2$$

είναι πεπερασμένη και ίση με σ^2.
Τότε, αν $S_n = X_1 + ... + X_n$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le t\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ισοδύναμα, αφού $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ συνεχής, η κατανομή της $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ συγκλίνει ασθενώς στην Τυπική Κανονική Κατανομή.

Αποδειξη. Ισχύει

$$\sigma^2 = V(X_i) = E(X_i^2) - \mu^2 \quad \Rightarrow \quad E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Θέτοντας

$$\tilde{X}_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma},\ \forall i \in \mathbb{N},$$

έχουμε

$$E(\tilde{X}_i) = 0,\ \forall i \in \mathbb{N} \tag{1}$$

και

$$E(\tilde{X}_i^{\,2}) = E(\frac{X_i^2 + \mu^2 - 2\mu X_i}{\sigma^2})$$

$$= \frac{E(X_i^2) + \mu^2 - 2\mu^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2 + \mu^2 + \mu^2 - 2\mu^2}{\sigma^2} = 1$$

δηλαδή

$$E(\tilde{X}_i^{\,2}) = 1,\ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Οι $\tilde{X}_n, n \in \mathbb{N}$ παραμένουν ανεξάρτητες και ισόνομες και ισχύει

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i - \mu}{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i}{\sqrt{n}}$$

Δηλαδή, αν $\tilde{S}_n = \tilde{X}_1 + ... + \tilde{X}_n$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$P\left(\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}} \le t\right) \xrightarrow{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

ή ισοδύναμα, αφού $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ συνεχής, ότι

$$\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow N(0,1)$$

Από το Θεώρημα Συνέχειας των Χαρακτηριστικών Συναρτήσεων, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\phi_{\frac{\tilde{S_n}}{\sqrt{n}}}(t) \xrightarrow{n} \phi_{N(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},\ \forall t \in \mathbb{R}. \qquad (\star)$$

Επειδή $\frac{\tilde{X_i}}{\sqrt{n}}, i \in \mathbb{N}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, έχουμε

$$\phi_{\frac{\tilde{S_n}}{\sqrt{n}}}(t) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{\frac{\tilde{X_i}}{\sqrt{n}}}(t) = [\phi_{\frac{\tilde{X_1}}{\sqrt{n}}}(t)]^n = [\phi_{\tilde{X_1}}(\frac{t}{\sqrt{n}})]^n,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Από το (c) του Θεωρήματος 1.31, για $n = 2$ αφού γνωρίζουμε μόνο τα $E(\tilde{X_1}), E(\tilde{X_1}^2)$, έχουμε

$$\phi_{\tilde{X_1}}(t) = \sum_{k=0}^{2} \frac{(it)^k}{k!} E(\tilde{X_1}^k) + o(t^2)$$

$$= 1 + \frac{it}{1!}E(\tilde{X_1}) - \frac{t^2}{2!}E(\tilde{X_1}^2) + o(t^2)$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2!} + o(t^2),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς,

$$\phi_{\tilde{X_1}}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n})$$

$$= 1 + \frac{\frac{-t^2}{2} + no(\frac{t^2}{n})}{n} = 1 + \frac{-\frac{t^2}{2}\left(1 - 2\frac{o(\frac{t^2}{n})}{\frac{t^2}{n}}\right)}{n},\ \forall t \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Θέτουμε

$$z_n(t) = -\frac{t^2}{2}\left(1 - 2\frac{o(\frac{t^2}{n})}{\frac{t^2}{n}}\right),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Για $n \to \infty$, έπεται $\frac{t}{\sqrt{n}} \to 0$ και άρα

$$\frac{o(\frac{t^2}{n})}{\frac{t^2}{n}} \xrightarrow{n} 0,$$

εξ ορισμού του $o(\frac{t^2}{n})$.

Συνεπώς,

$$z_n(t) \xrightarrow{n} -\frac{t^2}{2},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Από την (3) έχουμε ότι

$$\phi_{\tilde{X_1}}(\frac{t}{\sqrt{n}})^n = (1 + \frac{z_n(t)}{n})^n,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

και άρα από το λήμμα 2.5

$$\phi_{\tilde{X}_1}(\frac{t}{\sqrt{n}})^n \xrightarrow{n} e^{-\frac{t^2}{2}},\ \forall t \in \mathbb{R},$$

που είναι το ζητούμενο. $\square$

3. ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΟΥΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.7. Η κατανομή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση κατανομής

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{t} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]dx$$

ονομάζεται Κανονική Κατανομή, με παράμετρο θέσης $\mu \in \mathbb{R}$ και παράμετρο κλίμακας $\sigma > 0$.
Συμβολίζεται $N(\mu, \sigma^2)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.8. *Έστω $X : (\Omega, \mathcal{F}, p) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Κανονική Κατανομή, $N(\mu, \sigma^2)$.*
Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση συνάρτηση της X είναι

$$\phi_X(t) = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}},\ \forall t \in \mathbb{R}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνάρτηση κατανομής της X είναι,

$$P[X \leq t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{t} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]dx,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

επομένως

$$P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq t\right] = P[X \leq \sigma t + \mu] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\sigma t+\mu} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]dx,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ επομένως $du = \frac{dx}{\sigma}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq t\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{t} \exp[-\frac{(\sigma u + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}].\sigma\, du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du,\ \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Δηλαδή η $\frac{X-\mu}{\sigma}$ ακολουθεί Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή.
Συνεπώς $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = \phi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = \phi_X(\frac{t}{\sigma}).\phi_{-\frac{\mu}{\sigma}}(t) = \phi_X(\frac{t}{\sigma}).e^{-it\frac{\mu}{\sigma}}$$

οπότε

$$\phi_X(\frac{t}{\sigma}) = e^{it\frac{\mu}{\sigma}}.e^{-\frac{t^2}{2}},\ \forall t \in \mathbb{R}$$

και άρα

$$\phi_X(t) = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

Πρόταση 2.9. *Οι Κανονικές Κατανομές $N(\mu,\sigma^2)$, $\mu\in\mathbb{R},\sigma>0$, αποτελούν μια κλάση ισοδυναμίας ως προς τη σχέση ισοδυναμίας " $\sim$ ".*

Απόδειξη. $i)$ Πρώτα δείχνουμε ότι αν F_1, F_2 συνάρτησεις κατανομής που αντιστοιχούν σε δύο Κανονικές Κατανομές, τότε $F_1 \sim F_2$.

Πράγματι, έστω F_1 η συνάρτηση κατανομής της $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ και F_2 η συνάρτηση κατανομής της $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, όπου $mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$ και $\sigma_1,\sigma_2>0$.

Επίσης, έστω G η συνάρτηση κατανομής της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής.
Τότε, όπως είδαμε στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης, ισχύει

$$F_1(\sigma_1 t+\mu_1)=G(t),\ \forall t\in\mathbb{R}$$

και

$$F_2(\sigma_2 t+\mu_2)=G(t),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Άρα

$$F_1(\sigma_1 t+\mu_1)=F_2(\sigma_2 t+\mu_2),\ \forall t\in\mathbb{R},$$

επομένως

$$F_1(t)=F_2\left(\sigma_2\frac{t-\mu_1}{\sigma_1}+\mu_2\right)=F_2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}t+(\mu_2-\frac{\sigma_2\mu_1}{\sigma_1})\right),\ \forall t\in\mathbb{R},$$

δηλαδή $F_1\sim F_2$.

$ii)$ Έστω F συνάρτηση κατανομής που αντιστοιχεί σε μια Κανονική Κατανομή $N(\mu,\sigma)$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$.
Θα δείξουμε ότι αν H συνάρτηση κατανομής τέτοια ώστε $H\sim F$, τότε και η H αντιστοιχεί σε μια Κανονική Κατανομή $N(\mu',\sigma')$, $\mu'\in\mathbb{R}$, $\sigma'>0$.

Η F δίνεται από τον τύπο

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{t}\exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]dx,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Επειδή $H\sim F$, υπάρχει $a>0$ και $b\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$F(\frac{t-b}{a})=H(t),\ \forall t\in\mathbb{R}$$

Συνεπώς,

$$H(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\frac{t-b}{a}}\exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]dx,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Θέτουμε $ax+b=u$ επομένως $a.dx=du$, οπότε

$$H(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{t}\exp[-\frac{(\frac{u-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}].\frac{1}{a}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma.a)^2}} \int_{-\infty}^{t} \exp[-\frac{(u-(b+a.\mu))^2}{2(\sigma.a)^2}]du, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η H είναι η συνάρτηση κατανομής της $N(b+a\mu, \ a\sigma)$.

Από (i) και (ii) έχουμε ότι οι Κανονικές Κατανομές αποτελούν μια κλάση ισοδυναμίας ως προς τη σχέση " $\sim$ ".

□

Πρόταση 2.10. *Έστω $X_1, ..., X_n, n \in \mathbb{N}$, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν Κανονική Κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}, \ \sigma > 0$.*
Τότε, αν $S_n = X_1 + ... + X_n$, η S_n ακολουθεί Κανονική Κατανομή $N(\mu', \sigma'^2)$ και συνεπώς η συνάρτηση κατανομής της S_n είναι του ίδιου τύπου με τη συνάρτηση κατανομής των X_i.

Απόδειξη. Η χαρακτηριστική συνάρτηση των X_i είναι

$$\phi_{X_i}(t) = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, επειδή X_i ανεξάρτητες και ισόνομες,

$$\phi_{S_n}(t) = (\phi_{X_i}(t))^n = e^{it(n\mu) - \frac{(\sqrt{n}\sigma)^2 t^2}{2}}, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

και άρα από το πόρισμα 1.28, η S_n ακολουθεί Κανονική Κατανομή $N(n\mu, n\sigma^2)$.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΥΣΤΑΘΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Όπως είδαμε στην πρόταση 2.10, η Κανονική Κατανομή έχει την αξιοσημείωτη ιδιότητα ότι το άθροισμα πεπερασμένων ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν Κανονική Κατανομή, ακολουθεί επίσης Κανονική Κατανομή με αλλαγή μόνο στη θέση και την κλίμακα.

Σε αυτή την ιδιότητα στηρίζεται ο ορισμός των ευσταθών κατανομών.

Ορισμος 3.1. Μια κατανομή μ ονομάζεται **ευσταθής**, αν δεν είναι εκφυλισμένη και έχει την εξής ιδιότητα:
$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε αν $X_1, ..., X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή μ, η τυχαία μεταβλητή

$$\frac{X_1 + ... + X_n - b_n}{a_n}$$

έχει κατανομή μ. Ισοδύναμα,

$$P\left[\frac{X_1 + ... + X_n - b_n}{a_n} \leq t\right] = P[X_1 \leq t] = \mu(-\infty, t],\ \forall t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η συνάρτηση κατανομής της $X_1 + ... + X_n$ είναι του ίδιου τύπου με τη συνάρτηση κατανομής του μ.

Ορισμος 3.2. Μια κατανομή μ ονομάζεται **ευσταθής**, αν δεν είναι εκφυλισμένη και η χαρακτηριστική της συνάρτηση, ϕ, έχει την εξής ιδιότητα:
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $a_n > 0$ και $b_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\phi(t) = \phi(\frac{t}{a_n})^n . e^{-it\frac{b_n}{a_n}},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Σημείωση: Μια χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ που αντιστοιχεί σε μια ευσταθή κατανομή, ονομάζεται ευσταθής χαρακτηριστική συνάρτηση.
Επειδή οι ευσταθείς κατανομές δεν είναι εκφυλισμένες, έπεται ότι οι χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις είναι μη σταθερές.
Επίσης, μια συνάρτηση κατανομής που αντιστοιχεί σε ευσταθή κατανομή, ονομάζεται ευσταθής συνάρτηση κατανομής.
Επειδή οι ευσταθείς κατανομές είναι μη εκφυλισμένες, οι ευσταθείς συναρτήσεις κατανομής δεν μπορούν να είναι δίτιμες.

Πρόταση 3.3. *Οι ορισμοί 3.1 και 3.2 είναι ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. '$\Rightarrow$' Έστω μ κατανομή που ικανοποιεί τον ορισμό 3.1 και θα δείξω ότι ικανοποιεί τον ορισμό 3.2.
Η μ δεν είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο αφού ικανοποιεί τον ορισμό 3.1.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $X_1, ..., X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή μ.
Τότε από τον ορισμό 3.1 υπάρχουν $a_n > 0$ και $b_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η τυχαία μεταβλητή $\frac{1}{a_n}(X_1 + ... + X_n - b_n)$ έχει κατανομή μ.
Έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε για την χαρακτηριστική συνάρτηση της μ, ϕ, έχουμε

$$\phi(t) = \phi_{\frac{1}{a_n}(X_1+...+X_n-b_n)}(t) = \phi_{X_1+...+X_n}(\frac{t}{a_n}).e^{-it\frac{b_n}{a_n}}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

όπου επειδή $X_1, ...X_n$ ανεξάρτητες με κατανομή μ,

$$\phi_{X_1+...X_n}(\frac{t}{a_n}) = \phi(\frac{t}{a_n})^n, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Επομένως

$$\phi(t) = \phi(\frac{t}{a_n})^n.e^{-it\frac{b_n}{a_n}}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η μ ικανοποιεί τον ορισμό 3.2

'$\Leftarrow$' Έστω μ κατάνομη που ικανοποιεί τον ορισμό 3.2 και θα δείξω ότι ικανοποιεί τον ορισμό 3.1.
Η μ δεν είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο αφού ικανοποιεί τον ορισμό 3.2.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $X_1, ..., X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή μ.
Τότε από τον ορισμό 3.2, αν ϕ η χαρακτηριστική συνάρτηση της μ, υπάρχουν $a_n > 0$ και $b_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\phi(t) = \phi(\frac{t}{a_n})^n.e^{-it\frac{b_n}{a_n}}, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ορίζουμε

$$X = \frac{1}{a_n}(X_1 + ... + X_n - b_n)$$

Τότε επειδή $X_1, ..., X_n$ ανεξάρτητες με κατανομή μ,

$$\phi_X(t) = \phi_{\frac{1}{a_n}(X_1+...+X_n-b_n)}(t) = \phi(\frac{t}{a_n})^n.e^{-it\frac{b_n}{a_n}}, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Από (1) και (2)

$$\phi_X = \phi$$

και άρα από το πόρισμα 1.28 του Θεωρήματος Αντιστροφής των Χαρακτηριστικών Συναρτήσεων, η X έχει κατανομή μ.

Δηλαδή, το μ ικανοποιεί τον ορισμό 3.1 $\square$

Πρόταση 3.4. *Μια μη εκφυλισμένη συνάρτηση κατανομής F είναι ευσταθής, αν και μόνο αν,*
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε*

$$F^{*n}(x) = F(\frac{x-b_n}{a_n}),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

όπου $F^{*n}(x) = (\underbrace{F * ... * F}_{n-\text{φορές}})(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ " Έστω F ευσταθής και έστω $n \in \mathbb{N}$..
Τότε από τον ορισμό 3.1 υπάρχουν $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε αν $X_1, ..., X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής F, η τυχαία μεταβλητή

$$\frac{X_1 + ... + X_n - b_n}{a_n}$$

έχει επίσης συνάρτηση κατανομής F.
Δηλαδή,

$$F(x) = P\left(\frac{X_1 + ... + X_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = P(X_1 + ... + X_n \leq a_n x + b_n),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

και άρα

$$F^{*n}(x) = P(X_1 + ... + X_n \leq x) = F(\frac{x-b_n}{a_n}),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

" $\Leftarrow$ " Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχουν $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$F^{*n}(x) = F(\frac{x-b_n}{a_n}),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Αν $X_1, ..., X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής F, τότε

$$P(X_1 + ... + X_n \leq x) = F^{*n}(x) = F(\frac{x-b_n}{a_n}),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow P(X_1 + ... + X_n \leq a_n x + b_n) = F(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{X_1 + ... + X_n - b_n}{a_n}\right) = F(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η τυχαία μεταβλητή $\frac{X_1 + ... + X_n - b_n}{a_n}$ έχει συνάρτηση κατανομής F και άρα από τον ορισμό 3.1, η F είναι ευσταθής. $\square$

Πρόταση 3.5. *Η ιδιότητα της ευστάθειας, είναι ιδιότητα των κλάσεων ισοδυναμίας που ορίζει η σχέση ισοδυναμίας " $\sim$ ".*
Δηλαδή, αν F είναι ευσταθής συνάρτηση κατανομής και G είναι συνάρτηση κατανομής τέτοια ώστε $F \sim G$, τότε G είναι επίσης ευσταθής.

Απόδειξη. Έστω F ευσταθής συνάρτηση κατανομής και έστω G συνάρτηση κατανομής τέτοια ώστε $G \sim F$.
Τότε υπάρχουν $a > 0, b \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$G(ax+b) = F(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $X_1, ...X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής G.
Για να δείξουμε ότι G ευσταθής, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $c_n > 0,\ d_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε η

$$\frac{X_1 + ... + X_n - d_n}{c_n}$$

να έχει συνάρτηση κατανομής G.

Ισχύει

$$F(x) = G(ax+b) = P(X_i \leq ax+b)$$
$$= P\left(\frac{X_i - b}{a} \leq x\right),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, ..., n$$

δηλαδή, $\frac{X_1 - b}{a}, ..., \frac{X_n - b}{a}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με συνάρτηση κατανομής F.
Επειδή F ευσταθής, $\exists a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$F(x) = P\left(\frac{\frac{X_1-b}{a} + ... \frac{X_n-b}{a} - b_n}{a_n} \leq x\right)$$

$$= P\left(\frac{X_1 + ... + X_n - nb - a.b_n}{a.a_n} \leq x\right),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή,

$$G(ax+b) = P\left(\frac{X_1 + ... + X_n - nb - a.b_n}{a.a_n} \leq x\right),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

και άρα για $x = \frac{t-b}{a},\ t \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$G(t) = P\left(\frac{X_1 + ... + X_n - (n - a_n)b - a.b_n}{a_n} \leq t\right),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε,

$$c_n = a_n > 0$$

και

$$d_n = (n - a_n)b + ab_n \in \mathbb{R}$$

και τότε έχουμε ότι η $\frac{X_1 + ... + X_n - d_n}{c_n}$ έχει συνάρτηση κατανομής G που είναι το ζητούμενο.

□

Παραδειγμα 3.6. Η κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ είναι ευσταθής κατανομή.

Πράγματι, στην πρόταση 2.10 δείξαμε ότι αν $X_1, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν Κανονική Κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, τότε η $S_n = X_1 + ... + X_n$ ακολουθεί Κανονική Κατανομή $N(\mu', \sigma'^2)$, $\mu' \in \mathbb{R}$, $\sigma' > 0$.

Δηλαδή, αφού οι κανονικές κατανομές αποτελούν μια κλάση ισοδυναμίας ως προς τη σχέση ισοδυναμίας " $\sim$ ", η συνάρτηση κατανομής της S_n είναι του ίδιου τύπου με τη συνάρτηση κατανομής της $N(\mu, \sigma^2)$ και άρα $N(\mu, \sigma^2)$ είναι ευσταθής.

Λημμα 3.7. *Το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx \tag{+}$$

υπάρχει, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall 0 < a < 2$.

Αποδειξη. Έστω $0 < a < 2$ και έστω $t \in \mathbb{R}$.
Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{1} \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx$$

υπάρχει γιατί

$$0 \leq 1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}}) \leq 2, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

και άρα ολοκληρώνουμε φραγμένη συνάρτηση σε φραγμένο διάστημα.

Θα δείξουμε ότι και το

$$\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx$$

υπάρχει και συνεπώς και το ζητούμενο ολοκλήρωμα (+) υπάρχει.

Ισχύει

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta, \ \forall \theta \in \mathbb{R},$$

και άρα

$$1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}}) = 2\sin^2(\frac{tx^{-\frac{1}{a}}}{2}), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Επίσης ισχύει

$$|\sin\theta| \leq |\theta|, \ \forall \theta \in \mathbb{R},$$

επομένως,

$$\sin^2\theta \leq \theta^2, \ \forall \theta \in \mathbb{R},$$

και άρα από (1)

$$0 \leq 1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}}) \leq \frac{t^2 x^{-\frac{2}{a}}}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Από τη (2) έχουμε

$$\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{t^2 x^{-\frac{2}{a}}}{2} dx$$
$$= \frac{t^2}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{2}{a}}} dx < +\infty$$

γιατί $\frac{2}{a} > 1$ αφού $0 < a < 2$.

□

Πρόταση 3.8. *Για κάθε $0 < a \leq 2$, υπάρχει κατανομή με χαρακτηριστική συνάρτηση*

$$\phi(t) = e^{-c_a |t|^a}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

για κάποιο $c_a > 0$.

Απόδειξη. Για $a = 2$, είναι οι Κανονικές Κατανομές $N(0, \sigma^2), \sigma > 0$, οι οποίες, όπως είδαμε, έχουν χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\phi(t) = e^{-\frac{\sigma^2 |t|^2}{2}}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Έστω $0 < a < 2$.

Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $c_a > 0$, τέτοιο ώστε η $e^{-c_a|t|^a}, t \in \mathbb{R}$, είναι χαρακτηριστική συνάρτηση κάποιας κατανομής.

Θα ορίσουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, τέτοια ώστε

$$\phi_{X_n}(t) \to e^{-c_a |t|^a}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{$\star$}$$

για κάποιο $c_a > 0$ και επειδή η $\phi(t) = e^{-c_a|t|^a}$ είναι συνεχής στο $t = 0$, από το θεώρημα 1.35 θα έχουμε ότι υπάρχει κατανομή μέτρου πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, μ, που έχει για χαρακτηριστική συνάρτηση τη ϕ.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $Z_{n1}, ..., Z_{nn}$, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή ομοιόμορφη στο $[-n, n]$, δηλαδή με συνάρτηση κατανομής

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t < -n \\ \frac{t+n}{2n}, & \text{αν } t \in [-n, n] \\ 1, & \text{αν } t > n \end{cases}$$

Ορίζουμε

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{sgn(Z_{ni})}{\mid Z_{ni} \mid^{\frac{1}{a}}}$$

Επειδή $Z_{ni}, \ i = 1, ..., n$ ανεξάρτητες και ισόνομες, έχουμε

$$\phi_{X_n} = (\phi_{sign(Z_{n1})|Z_{n1}|^{-\frac{1}{a}}})^n \tag{1}$$

Ορίζουμε $Y_n = sign(Z_{n1}) \mid Z_{n1} \mid^{-\frac{1}{a}}$.
Τότε

$$\phi_{Y_n}(t) = \int_\Omega e^{itX} dp = \int_\Omega e^{it.sign(Z_{n1}).|Z_{n1}|^{-\frac{1}{a}}} dp$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it.sign(x).|x|^{-\frac{1}{a}}} d(pZ_{n1}^{-1})(x) = \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{it.sign(x).|x|^{-\frac{1}{a}}} dx,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

αφού η κατανομή της Z_{n1}, pZ_{n1}^{-1}, είναι η ομοιόμορφη στο $[-n, n]$.
Να σημειώσουμε, ότι στο 0 που δεν ορίζεται η προς ολοκλήρωση συνάρτηση δεν έχουμε πρόβλημα, γιατί ολοκληρώνουμε φραγμένη συνάρτηση ως προς το μέτρο Lebesgue που είναι συνεχές, συνεπώς $\forall t \in \mathbb{R}$ μπουρούμε να ορίσουμε

$$f_t(x) = \begin{cases} e^{it.sign(x).|x|^{-\frac{1}{a}}}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

και θα ισχύει

$$\int_{-n}^{n} f_t(x) dx = \int_{-n}^{n} e^{it.sign(x).|x|^{-\frac{1}{a}}} dx,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$\phi_{Y_n}(t) = \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{it.sign(x).|x|^{-\frac{1}{a}}} dx$$

$$= \frac{1}{2n} \left[\int_{-n}^{n} \cos\left(t.sign(x). \mid x \mid^{-\frac{1}{a}}\right) dx + i \int_{-n}^{n} \sin\left(t.sign(x). \mid x \mid^{-\frac{1}{a}}\right) dx \right]$$

$$= \frac{2}{2n} \int_0^n \cos\left(t.sign(x). \mid x \mid^{-\frac{1}{a}}\right) dx = \frac{1}{n} \int_0^n \cos\left(t.x^{-\frac{1}{a}}\right) dx,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

αφού $\sin(t.sign(x). \mid x \mid^{-\frac{1}{a}})$ είναι περιττή συνάρτηση ως προς x και άρα

$$\int_{-n}^{n} \sin\left(t.sign(x). \mid x \mid^{-\frac{1}{a}}\right) dx = 0,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

ενώ, $\cos(t.sign(x). \mid x \mid^{-\frac{1}{a}})$ είναι άρτια συνάρτηση ως προς x και άρα

$$\int_{-n}^{n} \cos\left(t.sign(x). \mid x \mid^{-\frac{1}{a}}\right) dx = 2 \int_0^n \cos\left(t.sign(x). \mid x \mid^{-\frac{1}{a}}\right) dx,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς

$$\phi_{Y_n}(t) = 1 - \frac{1}{n} \int_0^n \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx,\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

όπου στο $x = 0$ που δεν ορίζεται η προς ολοκλήρωση συνάρτηση, πάλι δεν έχουμε πρόβλημα, γιατί το συνημίτονο είναι φραγμένο και ολοκληρώνουμε ως προς συνεχές μέτρο.

Από το λήμμα 3.7, έχουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx$$

υπάρχει, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall 0 < a < 2$.
Άρα, από τη (2) $\forall t \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\phi_{Y_n}(t) = 1 - \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx + \frac{1}{n} \int_n^{+\infty} \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx, \tag{3}$$

Επειδή $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mid I_{[n,+\infty)}(x).(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})) \mid \leq 1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}}),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

και είδαμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx < +\infty,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{+\infty} \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} I_{[n,+\infty)}(x). \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} I_{[n,+\infty)}(x). \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \int_n^{+\infty} \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx}{\frac{1}{n}} = 0,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

και άρα η παράσταση

$$\frac{1}{n} \int_n^{+\infty} \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx \tag{4}$$

είναι $o(\frac{1}{n})$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $y = x^{-\frac{1}{a}}$ επομένως $dy = -\frac{1}{a} x^{-\frac{1}{a}-1} dx$ και άρα $dx = -ay^{-(a+1)} dy$.

Όταν $x \searrow 0$ έχουμε $y \nearrow +\infty$ και όταν $x \nearrow +\infty$ έχουμε $y \searrow 0$.

Συνεπώς,

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - \cos(tx^{-\frac{1}{a}})\right) dx = -a \int_{+\infty}^{0} (1 - \cos(ty))\, y^{-(a+1)} dy$$

$$= a\int_0^{+\infty} (1-\cos(ty))\, y^{-(a+1)}dy,\ \forall t\in\mathbb{R}. \qquad (5)$$

Από (3),(4),(5) έχουμε,

$$\phi_{Y_n}(t) = 1 - \frac{1}{n}.a\int_0^{+\infty}(1-\cos(ty))\, y^{-(a+1)}dy + o(\frac{1}{n})$$

$$= 1 - \frac{a\int_0^{+\infty}(1-\cos(ty))\, y^{-(a+1)}dy + \frac{o(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}}{n},\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Από την (1), έχουμε

$$\phi_{X_n}(t) = (\phi_{Y_n}(t))^n,\ \forall t\in\mathbb{R},$$

επομένως αφού n τυχαίο

$$\phi_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{a\int_0^{+\infty}(1-\cos(ty))\, y^{-(a+1)}dy + \frac{o(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}}{n}\right)^n,\ \forall t\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}. \qquad (6)$$

Ορίζουμε

$$I_t = \int_0^{+\infty}(1-\cos(ty))y^{-(a+1)}dy,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Για $t=0$ ισχύει $I_0 = 0$.

Παρατηρούμε ότι I_t είναι άρτια συνάρτηση του t και άρα αρκεί να το υπολογίσουμε για $t>0$.
Έστω $t>0$. Θέτουμε $w=ty$ επομένως $dw = tdy$ και τότε

$$I_t = \int_0^{+\infty}(1-\cos w).\frac{w^{-(a+1)}}{t^{-(a+1)}}.\frac{1}{t}dw$$

$$= \frac{1}{t^{-a}}\int_0^{+\infty}(1-\cos w).w^{-(a+1)}dw$$

Επειδή $I_{-t} = I_t$ έχουμε

$$I_t = \frac{1}{\mid t\mid^{-a}}\int_0^{+\infty}(1-\cos w).w^{-(a+1)}dw,\ \forall t\neq 0.$$

Θέτουμε

$$c_a = \int_0^{+\infty}(1-\cos w).w^{-(a+1)}dw$$

που από (5), για $t=1$, έχουμε ότι συγκλίνει και επίσης ισχύει $c_a>0$.
Τότε

$$I_t = c_a.\mid t\mid^a,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Δηλαδή,

$$-a\int_0^{+\infty}(1-\cos(ty))\,y^{-(a+1)}dy - \frac{o(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n} -c_a.\mid t\mid^a,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

και άρα από το λήμμα 2.5 και την (6)

$$\phi_{X_n}(t)\to e^{-c_a|t|^a},\ \forall t\in\mathbb{R},$$

που από ($\star$) είναι το ζητούμενο.

□

Πρόταση 3.9. *Έστω $c>0$ και $0<a\leq 2$. Αν μ κατανομή με χαρακτηριστική συνάρτηση*

$$\phi(t)=e^{-c|t|^a},\ \forall t\in\mathbb{R},$$

τότε μ είναι ευσταθής.

Απόδειξη. Από τον ορισμό 3.2, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists a_n>0, b_n\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\phi(t)=\phi(\frac{t}{a_n})^n.e^{-it\frac{b_n}{a_n}},\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Έστω $n\in\mathbb{N}$. Τότε για $a_n=n^{\frac{1}{a}}$ και $b_n=0$ έχουμε

$$\phi(\frac{t}{a_n})^n.e^{-it\frac{b_n}{a_n}}=\phi\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{a}}}\right)^n=\exp\left(-c\mid\frac{t}{n^{\frac{1}{a}}}\mid^a\right)^n$$
$$=\exp\left(-nc\frac{\mid t\mid^a}{n}\right)=e^{-c|t|^a}=\phi(t),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

□

Στις τελευταίες προτάσεις έχουμε δείξει ότι για κάθε $a\in(0,2]$ υπάρχει ευσταθής κατανομή με χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\phi(t)=e^{-c|t|^a},\ \forall t\in\mathbb{R},\quad \text{για κάποιο } c>0.$$

Για $a=2$ έχουμε την Κανονική Κατανομή, για μέση τιμή 0, $N(0,\sigma^2)$, ενώ για $a=1$ έχουμε τη συμμετρική κατανομή $Cauchy$. Για όλα τα υπόλοιπα $a\in(0,2]\setminus\{1,2\}$ δεν υπάρχει γνωστή φόρμουλα για τις αντίστοιχες κατανομές, παρά το γεγονός ότι γνωρίζουμε ότι υπάρχουν.

2. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΥΣΤΑΘΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Ορισμός 3.10. Μια κατανομή μ είναι συμμετρική, αν $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\mu(A)=\mu(-A)$$

Λήμμα 3.11. *Μια χαρακτηριστική συνάρτηση είναι* πραγματική *αν και μόνο αν η αντίστοιχη κατανομή είναι* συμμετρική γύρω από το 0.

Απόδειξη. '$\Rightarrow$' Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή μ. Παρατηρούμε ότι $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{-X}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) d\mu(x) - i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) d\mu(x) = \overline{\phi_X(t)}$$

Αν η ϕ είναι πραγματική $\Rightarrow \phi_X(t) = \overline{\phi_X(t)} = \phi_{-X}(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$.
Άρα από πόρισμα 1.28 $X, -X$ έχουν την ίδια κατανομή μ.
Έστω $A \in \mathcal{B}$. Τότε $\mu(-A) = P(X^{-1}(-A)) = P((-X)^{-1}(A)) = \mu(A)$.
Άρα μ συμμετρική γύρω από το 0.

'$\Leftarrow$' Έστω ϕ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση μίας κατανομής μ συμμετρικής γύρω από το 0,

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) d\mu(x) + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) d\mu(x),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Επειδή το ημίτονο είναι περιττή συνάρτηση και μ συμμετρική γύρω από το 0, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{0} \sin(tx) d\mu(x) = -\int_{0}^{+\infty} \sin(tx) d\mu(x)$$

Μάλιστα τα προηγούμενα ολοκληρώματα συγκλίνουν γιατί συγκλίνουν απολύτως, άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) d\mu(x) = \int_{-\infty}^{0} \sin(tx) d\mu(x) + \int_{0}^{+\infty} \sin(tx) d\mu(x) = 0$$

Επομένως,

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) d\mu(x)$$

και άρα ϕ πραγματική, $\forall t \in \mathbb{R}$.

□

Παρατηρηση 3.12. Από το τελευταίο λήμμα, έχουμε ότι οι ευσταθείς κατανομές που δείξαμε ότι υπάρχουν στις προτάσεις 3.8 και 3.9 είναι συμμετρικές, αφού οι χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις είναι της μορφής

$$\phi(t) = e^{-c|t|^a},\ \forall t \in \mathbb{R},\ c > 0,\ a \in (0, 2].$$

άρα είναι πραγματικές.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι κατανομές που έχουν χαρακτηριστική συνάρτηση της μορφής

$$\phi(t) = e^{-c|t|^a},\ t \in \mathbb{R},\ c > 0,\ a \in (0, 2]$$

είναι οι μοναδικές συμμετρικές ευσταθείς κατανομές.

Λημμα 3.13. *Έστω Ψ συνεχής, μη σταθερή τέτοια ώστε*

$$\Psi(\alpha t) = \Psi(\beta t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha \geq \beta > 0$$

Τότε $\alpha = \beta$.

Αποδειξη. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\alpha \neq \beta$.
Έστω $\xi \in \mathbb{R}$, τότε για $t = \frac{\xi}{\alpha}$ έχουμε

$$\Psi(\xi) = \Psi(\frac{\beta}{\alpha}\xi)$$

Για $\xi = \frac{\beta}{\alpha}x$

$$\Psi(\frac{\beta}{\alpha}x) = \Psi((\frac{\beta}{\alpha})^2 x),\ x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή

$$\Psi(x) = \Psi(\frac{\beta}{\alpha}x) = \Psi((\frac{\beta}{\alpha})^2 x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Επαγωγικά $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(\xi) = \Psi((\frac{\beta}{\alpha})^n \xi)$$

Για $n \to \infty$, λόγω συνέχειας της Ψ και επειδή $\alpha > \beta$

$$\Psi(\xi) = \lim_{n\to\infty} \Psi(\xi) = \lim_{n\to\infty} \Psi((\frac{\beta}{\alpha})^n \xi) = \Psi(\lim_{n\to\infty} (\frac{\beta}{\alpha})^n \xi) = \Psi(0)$$

Συνεπώς

$$\Psi(\xi) = \Psi(0),\ \forall \xi \in \mathbb{R}$$

που είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης μας ότι η Ψ είναι μη σταθερή.
Άρα $\alpha = \beta$.

□

Λημμα 3.14 (Εξίσωση Cauchy). *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνεχής τέτοια ώστε*

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Τότε $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $f(x) = \alpha x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Αποδειξη. Επαγωγικά

$$f(x_1 + ... + x_n) = f(x_1) + ... + f(x_n),\ \forall x_1, .., x_n \in \mathbb{R}.$$

Για $x_1 = ... = x_n = x$ έχουμε

$$f(nx) = nf(x),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Έστω $x = \frac{m}{n}t$, όπου $m, n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$. Τότε $nx = mt$

$$\Rightarrow\ f(nx) = f(mt)$$

και από (2)

$$\Rightarrow\ nf(x) = mf(t)\ \Rightarrow\ nf(\frac{m}{n}t) = mf(t)$$

$$\Rightarrow\ f(\frac{m}{n}t) = \frac{m}{n}f(t),\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Επομένως για την f ισχύει ότι

$$f(qt) = qf(t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}. \tag{4}$$

Για $q = 0:\ f(y) = f(y+0) = f(y) + f(0)\ \Rightarrow f(0) = 0.$
Άρα,

$$f(0.t) = 0 = 0.f(t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

δηλαδή η f είναι περιττή αφού $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Έτσι για $q < 0$ ρητό έχουμε ότι

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(qt) = f(-(-q)t) = -f(-qt)$$

αφού f περιττή. Επειδή $-q > 0$ ρητός, από (4) έχουμε

$$f(qt) = -(-q)f(t) = qf(t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Άρα

$$f(qt) = qf(t),\ \forall t \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{Q}. \tag{5}$$

Για $t = 1,\ f(q) = qf(1)$.
Δηλαδή για $\alpha = f(1) \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$f(q) = \alpha.q,\ \forall q \in \mathbb{Q}.$$

Γνωρίζουμε ότι αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ταυτίζονται σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε $f \equiv g$. Η $g(x) = \alpha.x$ είναι συνεχής συνάρτηση και η f είναι συνεχής εξυποθέσεως και ταυτίζονται στους ρητούς που είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα ταυτίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$. Επομένως για $\alpha = f(1)$ έχουμε

$$f(x) = \alpha x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Λημμα 3.15 (Εκθετική Εξίσωση Cauchy). *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, όχι ταυτοτικά ίση με μηδέν τέτοια ώστε*

$$f(x+y) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Τότε υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = b^x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Αποδειξη. Η f δεν μηδενίζεται πουθενά.

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Τότε

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f((x - x_0) + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0.$$

Άρα $f \equiv 0$, που είναι άτοπο από την υπόθεση.
Για $x = y = \frac{t}{2}$,

$$(1) \Rightarrow\ f(t) = f(\frac{t}{2})^2,\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Επειδή $f(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; f(\frac{t}{2})^2 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Άρα από την (2) έχουμε ότι $f(t) > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.
Ορίζουμε $g(t) = \log f(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Η g ορίζεται και είναι συνεχής παντού γιατί $f > 0$ και f συνεχής. Για την g ισχύει

$$g(x+y) = \log(f(x+y)) = \log(f(x)f(y))$$
$$= \log f(x) + \log f(y) = g(x) + g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή η g ικανοποιεί την εξίσωση Cauchy του προηγούμενου λήμματος και άρα

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε } g(x) = \alpha x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Από τον ορισμό της g και την (3) έχουμε,

$$\log f(x) = \alpha x,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

επομένως

$$f(x) = e^{\alpha x},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Για $b = e^{\alpha} > 0$, έχουμε ότι

$$f(x) = b^x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Λημμα 3.16. *Έστω $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ συνεχής, τέτοια ώστε*

$$g(x.y) = g(x)g(y),\ \forall x, y > 0. \tag{1}$$

Τότε $\exists\, p \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$g(x) = x^p,\ \forall x > 0.$$

Αποδειξη. Έστω $x, y > 0$. Θέτουμε $z = \log x,\ w = \log y$, δηλαδή $x = e^z,\ y = e^w$. Τότε η (1) δίνει

$$g(xy) = g(e^{z+w}) = g(e^z)g(e^w)$$

Αν f τέτοια ώστε $f(t) = g(e^t),\ \forall t \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε

$$f(z+w) = g(e^{z+w}) = g(e^z)g(e^w) = f(z)f(w)$$

Δηλαδή για την f ισχύει ότι

$$f(z+w) = f(z)f(w),\ \forall z, w \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η f ικανοποιεί την Εκθετική Εξίσωση Cauchy και άρα από το προηγούμενο λήμμα $\exists\, b > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) = b^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Άρα,

$$g(x) = f(\log x) = b^{\log x} = (e^{\log b})^{\log x} = e^{(\log b)\log(x)} = e^{\log(x^{\log b})} = x^{\log b}$$

Για $p = \log b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$g(x) = x^p,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Λημμα 3.17. *Έστω $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, άρτια και μη σταθερή, τέτοια ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $g(k) > 0$ έτσι ώστε*

$$k\Psi(t) = \Psi(g(k)t), \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Τότε υπάρχει $p > 0$ τέτοιο ώστε

$$\Psi(t) = \Psi(1)|t|^{\frac{1}{p}}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Αποδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε επειδή Ψ συνεχής και μη σταθερή, το $g(k)$ που υπάρχει ούτως ώστε να ικανοποιείται η (1), είναι μοναδικό από το λήμμα 3.13.

Βήμα 1: Για $k = 1$ η (1) μας δίνει

$$\Psi(t) = \Psi(g(1)t), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

και άρα από το λήμμα 3.13 έχουμε

$$g(1) = 1$$

Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\Psi(g(n.m).t) \overset{(1)}{=} n.m\Psi(t) \overset{(1)}{=} n\Psi(g(m).t) \overset{(1)}{=} \Psi(g(n).g(m).t), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

συνεπώς από το λήμμα 3.13 έχουμε ότι

$$g(n.m) = g(n).g(m), \ \forall n, m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Δηλαδή έχουμε ορίσει, μια συνάρτηση $g : \mathbb{N} \to (0, +\infty)$ με την ιδιότητα

$$g(n.m) = g(n).g(m), \ \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

.

Βήμα 2: Επεκτείνουμε την g στο $\mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ ως εξής:
Ορίζουμε

$$g(\frac{p}{q}) = \frac{g(p)}{g(q)}, \ \forall p, q \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Η g τότε είναι καλά ορισμένη στο $\mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$.
Πράγματι, $g(p), g(q)$ είναι γνήσια θετικά και μοναδικά για κάθε $p, q \in \mathbb{N}$.
Επίσης έστω $r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ και έστω $r = \frac{p_1}{q_1}$, $p_1, q_1 \in \mathbb{N}$ μια αναπαράσταση του. Τότε υπάρχουν μοναδικοί $p, q \in \mathbb{N}$, πρώτοι μεταξύ τους και $k \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $r = \frac{p}{q}$ και $p_1 = kp, q_1 = kq$.
Έχουμε,

$$g(\frac{p_1}{q_1}) = g(\frac{kp}{kq}) \overset{(3)}{=} \frac{g(kp)}{g(kq)} \overset{(2)}{=} \frac{g(k)g(p)}{g(k)g(q)} = \frac{g(p)}{g(q)} \overset{(3)}{=} g(\frac{p}{q}) \equiv g(r)$$

Παρατηρούμε ότι

$$g(r) > 0, \ \forall r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$$

Ισχύρισμός:

$$r\Psi(t) = \Psi(g(r)t), \ \forall r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Πράγματι, έστω $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$.
Τότε,

$$\frac{p}{q}\Psi(t) \overset{(1)}{=} \frac{1}{q}\Psi\left(g(p).t\right) = \frac{1}{q}\Psi\left(\frac{g(p)}{g(q)}.g(q).t\right)$$
$$= \frac{1}{q}\Psi\left(g(\frac{p}{q}).g(q).t\right) \overset{(1)}{=} \frac{q}{q}\Psi(g(\frac{p}{q}).t) = \Psi(g(\frac{p}{q}).t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Η g είναι η μοναδική θετική συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους θετικούς ρητούς που ικανοποιεί την (4).
Πράγματι αν $g' : \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\} \to (0, +\infty)$ που ικανοποιεί την (4) τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και για κάθε $r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$

$$\Psi(g(r)t) \overset{(4)}{=} r\Psi(t) \overset{(4)}{=} \Psi(g'(r)t)$$
$$\Rightarrow \quad \forall r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}, \Psi(g(r)t) = \Psi(g'(r)t),\ \forall t \in \mathbb{R},$$

όπου $g(r), g'(r) > 0$,
άρα από το λήμμα 3.13 έπεται $g(r) = g(r'),\ \forall r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$.

Βήμα 3: Θα επεκτείνουμε την g στο $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, διατηρώντας τις ιδιότητές της.
Έστω $x > 0$ και έστω $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ με $r_n \xrightarrow{n} x$.
Τότε το $\lim g(r_n)$ υπάρχει.
Πράγματι:
Από (4) επειδή $\forall r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ ισχύει $\Psi(g(r)t) = r\Psi(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$,

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \Psi(g(r_n)t) = \lim_{n\to\infty} r_n\Psi(t) = x\Psi(t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Λόγω συνέχειας της Ψ αν υπάρχει $(g(r_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(g(r_n))$, που να συγκλίνει στο 0, τότε $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k\to\infty} \Psi(g(r_{n_k})t) = \Psi(\lim_{k\to\infty} g(r_{n_k})t) = \Psi(0) \tag{6}$$
$$(5), (6) \Rightarrow\ x\Psi(t) = \Psi(0),\ \forall t \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

Επομένως η $\Psi(t)$ είναι σταθερή που είναι άτοπο εξ υποθέσεως.
Άρα δεν υπάρχει υπακολουθία της $(g(r_n))_n$ που να συγκλίνει στο 0.
Αν $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$, ισχύει

$$g(\frac{1}{r}) = g(\frac{q}{p}) = \frac{g(q)}{g(p)} = \frac{1}{g(r)}$$

αφού

$$g(r) = g(\frac{p}{q}) = \frac{g(p)}{g(q)}$$

Επειδή η $(\frac{1}{r_n})_n$ συγκλίνει στο $\frac{1}{x} > 0$, όμοια με πιο πάνω έχουμε ότι η $(g(\frac{1}{r_n}))_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{g(r_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ δεν μπορεί να έχει υπακολουθία που να συκλίνει στο 0.

Συνεπώς, η $g(r_n)_n$ δεν μπορεί να έχει υπακολουθία που να πηγαίνει στο $+\infty$.

Δηλαδή η $(g(r_n))_n$ είναι φραγμένη ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών και άρα από το θεώρημα Bolzano Weierstrass έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο.
Έστω ότι έχει 2 οριακά σημεία $u \neq v,\ u, v > 0$.
Δηλαδή έστω ότι

$$\exists (r_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{με} \lim_{k\to\infty} g(r_{n_k}) = u \quad \text{και} \quad \exists (r_{n_l})_{l\in\mathbb{N}} \quad \text{με} \lim_{l\to\infty} g(r_{n_l}) = v.$$

Τότε από συνέχεια της Ψ και από την (5), $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{k\to\infty} \Psi(g(r_{n_k})t) = \Psi(ut) = x\Psi(t)$$

και

$$\lim_{l\to\infty} \Psi(g(r_{n_l})t) = \Psi(vt) = x\Psi(t).$$

Επομένως

$$\Psi(ut) = \Psi(vt), \forall t \in \mathbb{R}$$

και άρα από το λήμμα 3.13

$$\Rightarrow u = v, \text{άτοπο}.$$

Δείξαμε, δηλαδή, ότι το όριο $\lim g(r_n)$ υπάρχει και είναι γνήσια θετικό.
Δείχνουμε τώρα ότι αυτό το όριο δεν εξαρτάται από την $(r_n)_n$ που πήραμε να συγκλίνει στο x.
Έστω $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ με $q_n \to x$.
Ορίζω

$$p_n = \begin{cases} r_k & n = 2k, \quad\quad k = 0, 1, 2... \\ q_k & n = 2k+1, \ k = 0, 1, 2, .. \end{cases}$$

Τότε όπως είδαμε τα $\lim g(r_n)$ και $\lim g(q_n)$ υπάρχουν και επίσης $p_n \to x$, άρα $\lim g(p_n)$ υπάρχει.
Επειδή $g(r_n), g(q_n)$ είναι υπακολουθίες της $g(p_n)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(p_n) = \lim_{n\to\infty} g(q_n) = \lim_{n\to\infty} g(r_n)$$

Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\},\ g(x) = \lim_{n\to\infty} g(r_n)$$

για οποιαδήποτε $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ με $r_n \to x$.

Για την g ισχύει ότι $\forall x, y > 0$

$$g(xy) = g(x)g(y) \tag{7}$$

Πράγματι, έστω $x, y > 0$ και έστω $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ με $r_n \to x$ και $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ με $q_n \to y$.
Τότε $r_n q_n \to xy$ και υπάρχουν ακολουθίες $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ φυσικών

αριθμών, τέτοιες ώστε $r_n = \frac{a_n}{b_n}$ και $q_n = \frac{c_n}{d_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Τότε εξ ορισμού

$$g(xy) = \lim_{n\to\infty} g(r_n q_n)$$

$$\Rightarrow g(xy) = \lim_{n\to\infty} g(\frac{a_n c_n}{b_n d_n}) \overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{g(a_n c_n)}{g(b_n d_n)} \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{g(a_n)g(c_n)}{g(b_n)g(d_n)}$$

$$\overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} g(\frac{a_n}{b_n})g(\frac{c_n}{d_n}) = \lim_{n\to\infty} g(r_n)g(q_n) = g(x)g(y).$$

Επίσης, για την g ισχύει

$$x\Psi(t) = \Psi(g(x)t), \ \forall t \in \mathbb{R}, \forall x > 0 \tag{8}$$

Πράγματι, έστω $x > 0$, $t \in \mathbb{R}$. Τότε αν $(r_n)_n \subseteq \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ με $r_n \to x$ έχουμε,

$$x\Psi(t) = \lim_{n\to\infty} r_n \Psi(t) \overset{(4)}{=} \lim_{n\to\infty} \Psi(g(r_n)t)$$

και από συνέχεια της Ψ και τον ορισμό του $g(x)$,

$$x\Psi(t) = \Psi(\lim_{n\to\infty} g(r_n)t) = \Psi(g(x)t).$$

Η g είναι η μοναδική θετική συνάρτηση που ικανοποιεί την (8), αφού από το λήμμα 3.13 αν $h : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ τέτοια ώστε

$$\forall x > 0, \ x\Psi(t) = \Psi(h(x)t), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

έχουμε ότι

$$\forall x > 0, \ \Psi(g(x)t) = \Psi(h(x)t), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

επομένως

$$h(x) = g(x), \ \forall x > 0.$$

Η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.
Πράγματι, έστω $x \in (0, +\infty)$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, +\infty)$, με $x_n \to x$.
Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\exists (q_k^n)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\} \quad \text{με} \quad q_k^n \xrightarrow{k} x_n, \text{ και άρα} \quad g(x_n) = \lim_{k\to\infty} g(q_k^n)$$

Συνεπώς, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists r_n \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$, τέτοιο ώστε

$$| \, x_n - r_n \, | < \frac{1}{n} \text{ και } | \, g(x_n) - g(r_n) \, | < \frac{1}{n}$$

Επομένως $\lim r_n = \lim x_n = x$ και $\lim g(r_n) = \lim g(x_n)$.
Όμως $\lim g(r_n) = g(x)$ εξ ορισμού.
Έτσι έχουμε ότι $\lim g(x_n) = g(x)$ και από την Αρχή Μεταφοράς Συγκλινουσών Ακολουθιών η g είναι συνεχής στο τυχαίο $x > 0$, άρα συνεχής παντού.

Δηλαδή, ορίσαμε $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ συνεχή, τέτοια ώστε

$$\forall x, y > 0, \quad g(xy) = g(x)g(y) \tag{9}$$

και

$$\forall x > 0, \quad x\Psi(t) = \Psi(g(x)t), \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Λόγω της (9) από το λήμμα 3.16 έχουμε ότι,

$$\exists p \in \mathbb{R}, \text{ τέτοιο ώστε } g(x) = x^p, \ \forall x > 0. \tag{11}$$

Ισχύει $p \neq 0$. Έστω ότι $p = 0$. Τότε από (11) η g είναι σταθερή και επειδή $g(1) = 1$ έχουμε

$$g(x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς από τη (10) για $x = 2$ έχουμε,

$$2\Psi(t) = \Psi(g(2)t) = \Psi(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

και άρα $\Psi(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$, που είναι άτοπο γιατί Ψ μη σταθερή.

Από (10) και (11) έχουμε ότι

$$\forall y > 0, \ y\Psi(t) = \Psi(y^p t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Για $y = x^{\frac{1}{p}}$, όπου $x > 0$ και $t = 1$, έχουμε

$$x^{\frac{1}{p}}\Psi(1) = \Psi((x^{\frac{1}{p}})^p.1) = \Psi(x)$$

$$\Rightarrow \Psi(x) = \Psi(1)x^{\frac{1}{p}}, \ \forall x > 0 \tag{12}$$

Επειδή από την υπόθεση, η Ψ είναι άρτια έχουμε

$$\Psi(t) = \Psi(1) \mid t \mid^{\frac{1}{p}}, \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Επειδή Ψ συνεχής παντού, έχουμε $p > 0$ γιατί αν ήταν $p < 0$

$$\lim_{t \to 0} \Psi(t) = +\infty$$

και άρα η Ψ δε θα μπορούσε να είναι συνεχής στο 0.
Συνεπώς, $p > 0$ και επειδή

$$\lim_{t \to 0} \Psi(1) \mid t \mid^{\frac{1}{p}} = 0,$$

λόγω συνέχειας της Ψ έχουμε

$$\Psi(0) = 0$$

Δηλαδή,

$$\Psi(t) = \Psi(1) \mid t \mid^{\frac{1}{p}}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

όπου $p > 0$. □

Λημμα 3.18. *Αν X τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $\phi''_X(0)$ υπάρχει, τότε $E(X^2)$ υπάρχει.*

Αποδειξη. Συμβολισμός $\phi_X \equiv \phi$. Παρατηρούμε ότι από τον Κανόνα De l'Hospital,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(2h) - 2\phi(0) + \phi(-2h)}{4h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{2\phi'(2h) - 2\phi'(-2h)}{8h} \tag{1}$$

και ότι $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin hx}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x \cos hx}{1} = x$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}(\frac{\sin hx}{h})^2 = (\lim_{h\to 0}\frac{\sin hx}{h})^2 = x^2 \qquad (2)$$

λόγω συνέχειας της $f(x) = x^2$.

Επειδή $\phi''(0)$ υπάρχει, έχουμε

$$\phi''(0) = \frac{1}{2}[\phi''_+(0) + \phi''_-(0)] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2}[\frac{\phi'(2h)-\phi'(0)}{2h} + \frac{\phi'(0)-\phi'(-2h)}{2h}]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\phi'(2h)-2\phi'(-2h)}{8h} \overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\phi(2h)-2\phi(0)+\phi(-2h)}{4h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{4h^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{2ihx}-2+e^{-2ihx})d\mu(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{4h^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{ihx}-e^{-ihx})^2 d\mu(x)$$

$$= \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{e^{ihx}-e^{-ihx}}{2h})^2 d\mu(x) = \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{i\sin hx}{h})^2 d\mu(x)$$

$$= -\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\sin hx}{h})^2 d\mu(x)$$

όπου όλα τα πιο πάνω όρια υπάρχουν λόγω της ύπαρξης της $\phi''(0)$. Από την ισότητα

$$\phi''(0) = -\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\sin hx}{h})^2 d\mu(x)$$

έχουμε και ότι $\phi''(0) \in \mathbb{R}$.

Από το Λήμμα του Fatou, αφού η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι μη αρνητική και επειδή τα όρια υπάρχουν άρα ταυτίζονται με τα κάτω όρια, έχουμε

$$\phi''(0) = -\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\sin hx}{h})^2 d\mu(x) \le -\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{h\to 0}(\frac{\sin hx}{h})^2 d\mu(x)$$

$$\overset{(2)}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\mu(x)$$

Επομένως

$$0 \le \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\mu(x) \le -\phi''(0) < +\infty \qquad (3)$$

δηλαδή, η $E(X^2)$ υπάρχει. □

Θεωρημα 3.19. *Αν ϕ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας συμμετρικής ευσταθούς κατανομής, τότε $\exists c > 0$ και $\alpha \in (0,2]$ τέτοια ώστε*

$$\phi(t) = e^{-c|t|^\alpha},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Έστω ϕ η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός ευσταθούς νόμου μ, συμμετρικού.
Τότε από το Λήμμα 3.11 η ϕ είναι πραγματική. Επίσης η ϕ είναι συνεχής ως χαρακτηριστική συνάρτηση και άρτια, αφού

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) d\mu(x), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \phi(t) \neq 0.$$

Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\phi(t) = 0$.
Τότε, επειδή $\phi(0) = 1 \neq 0$ και ϕ άρτια,

$$\Rightarrow \ \exists t > 0 \quad \text{τέτοιο ώστε} \quad \phi(t) = 0.$$

Ορίζουμε

$$t_0 = \inf\{t > 0 : \phi(t) = 0\}$$

Επειδή $\{t > 0 : \phi(t) = 0\} \neq \emptyset$,

$$\Rightarrow \ t_0 \in \mathbb{R} \text{ και εξ ορισμού } t_0 \geq 0$$

και υπάρχει $(t_n)_n \subseteq \{t > 0 : \phi(t) = 0\}$ τέτοια ώστε $t_n \searrow t_0$.
Λόγω συνέχειας της ϕ,

$$\phi(t_n) \to \phi(t_0).$$

Συνεπώς $\phi(t_0) = 0$, αφού $\phi(t_n) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Επειδή $t_0 \geq 0, \ \phi(0) = 1 \neq 0$ και $\phi(t_0) = 0$

$$\Rightarrow \ t_0 \in \{t > 0 : \phi(t) = 0\}$$

Έχουμε δείξει δηλαδή ότι υπάρχει $t_0 > 0$ τέτοιο ώστε είναι το ελάχιστο θετικό t με $\phi(t) = 0$.

Επειδή ϕ ευσταθής,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \exists \ a_k > 0 \text{ και } b_k \in \mathbb{R},$$

τέτοια ώστε

$$\phi(t) = e^{-itb_k} \phi(\frac{t}{a_k})^k, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Επειδή ϕ πραγματική, $\ \forall k \in \mathbb{N}$,

$$\Rightarrow e^{itb_k} = \cos tb_k + i \sin tb_k \in \mathbb{R}, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sin tb_k = 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow b_k = 0.$$

Για $k = 2, \ \exists d > 0$ έτσι ώστε

$$\phi(t) = \phi(\frac{t}{d})^2, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

και άρα

$$\phi^2(t) = \phi(dt) \tag{1}$$

Αν $d = 1$ τότε $\phi^2(t) = \phi(t), \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \ \text{ ή } \ \phi(t) = 1 \ \text{ ή } \ \phi(t) = 0.$$

Επειδή $\phi(0) = 1$, λόγω συνέχειας της ϕ,

$$\Rightarrow \ \phi(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$$

που είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι η ϕ μηδενίζεται τουλάχιστον σε ένα σημείο.
Αν $0 < d < 1$, για $t = t_0$ έχουμε

$$0 = \phi^2(t_0) = \phi(dt_0) \ \Rightarrow \phi(dt_0) = 0$$

που είναι άτοπο γιατί $0 < dt_0 < t_0$ και t_0 είναι το ελάχιστο θετικό σημείο στο οποίο η ϕ μηδενίζεται.
Αν $d > 1$, για $t = \frac{t_0}{d}$, έχουμε

$$\phi^2(\frac{t_0}{d}) = \phi(t_0) = 0 \Rightarrow \ \phi(\frac{t_0}{d}) = 0$$

που είναι άτοπο γιατί $0 < \frac{t_0}{d} < t_0$ ενώ το t_0 είναι το ελάχιστο θετικό σημείο στο οποίο η ϕ μηδενίζεται.

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση έχουμε άτοπο και άρα η ϕ δεν μηδενίζεται πουθενά.

Επειδή η ϕ είναι συνεχής, πραγματική, δεν μηδενίζεται πουθενά και $\phi(0) = 1$,

$$\Rightarrow \phi(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε

$$\Psi(t) = \log \phi(t), \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Η ϕ ως πραγματική και ευσταθής, ικανοποιεί την συνθήκη

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \exists a_k > 0$$

τέτοιο ώστε

$$\phi(a_k t) = \phi(t)^k, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Λογαριθμίζοντας τη συνθήκη (3), έχουμε για την Ψ ότι

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \exists g(k) > 0 \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$k\Psi(t) = \Psi(g(k)t)), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Η Ψ είναι πραγματική, συνεχής, θετική και άρτια γιατί η ϕ είναι πραγματική συνεχής και άρτια και επίσης, επειδή η ϕ είναι ευσταθής άρα μη εκφυλισμένη και άρα (βλέπε ορισμό 1.40) μη σταθερή, έπεται ότι και η Ψ είναι μη σταθερή.
Συνεπώς από το Λήμμα 3.17, $\exists p > 0$ τέτοιο ώστε,

$$\Psi(t) = \Psi(1) \mid t \mid^{\frac{1}{p}}, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ \phi(t) = e^{-c|t|^a}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \text{όπου } a = \frac{1}{p} \text{ και } c = -\Psi(1). \tag{4}$$

Ισχύει $c \geq 0$ γιατί $| \phi(t) | \leq 1$ και $c \neq 0$ γιατί η ϕ δεν είναι ταυτοτικά ίση με 1, αφού είναι ευσταθής άρα μη σταθερή.

Επίσης $a > 0$ γιατί $p > 0$ και άρα μένει να δείξουμε ότι $a \leq 2$.

Έστω ότι $a > 2$. Τότε $\phi''(0) = 0$.
Πραγματι,

$$\phi'(t) = -ca\frac{t}{| t |} | t |^{a-1} e^{-c|t|^a} = -cat | t |^{a-2} e^{-c|t|^a},$$

$$\phi''(t) = -ca | t |^{a-2} e^{-c|t|^a} - cat(a-2)\frac{t}{| t |} | t |^{a-3} e^{-c|t|^a} + c^2a^2t^2 | t |^{2a-4} e^{-c|t|^a}$$

επομένως η $\phi''(0)$ υπάρχει, γιατί $a > 2$ άρα δεν έχει πρόβλημα στο 0 και μάλιστα $\phi''(0) = 0$.

Από το Λήμμα 3.18, αν Χ τυχαία μεταβλητή με κατανομή τον ευσταθή νόμο μ και άρα χαρακτηριστική συνάρτηση την ϕ (υπάρχει πάντα), τότε ισχύει

$$E(X^2) < +\infty.$$

Επιπλέον, επειδή $\phi''(0) = 0$, από την σχέση (3) της απόδειξης του λήμματος 3.18 έχουμε ότι $E(X^2) = 0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\mu(x) = 0$$

$\Rightarrow$ το μ είναι μέτρο συγκεντρωμένο στο 0, άρα εκφυλισμένο,
άτοπο γιατι μ ευσταθής νόμος. Συνεπώς $a \leq 2$. □

Παρατηρηση 3.20. Οι σταθερές a και c στην αναπαράσταση της χαρακτηριστικής συνάρτησης μια συμμετρικής, ευσταθούς κατανομής, είναι μοναδικά προσδιορισμένες.
Πράγματι, έστω

$$\phi(t) = e^{-c|t|^a} = e^{-c'|t|^{a'}}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad c, c' > 0, \quad a, a' \in (0, 2]$$

Λογαριθμίζοντας έχουμε

$$-c | t |^a = -c' | t |^{a'}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

επομένως

$$| t |^{a-a'} = \frac{c'}{c}, \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Για $t = 1$ έχουμε $\frac{c'}{c} = 1$ και άρα $c = c'$.
Συνεπώς

$$| t |^{a-a'} = 1, \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

επομένως

$$a = a'$$

Πορισμα 3.21. *Για κάθε μ ευσταθή κατανομή, οι σταθερές $a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$ του ορισμού 3.1 είναι*

$$a_n = n^{\frac{1}{a}},\ a \in (0, 2]$$

Η σταθερά $a \in (0, 2]$ καλείται ***δείκτης*** *της ευσταθούς κατανομής μ.*

Αποδειξη. Έστω F η συνάρτηση κατανομής του μ και έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή μ.

Έστω F^- η συνάρτηση κατανομής της $-X$. Θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της F^- εκτενέστερα στο επόμενο υποκεφάλαιο, ωστόσο θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες από τις ιδιότητες της και εδώ, αποδεικνύοντας τις επιτόπου.

Επειδή μ ευσταθής, $\forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε αν ϕ η χαρακτηριστική συνάρτηση του μ, ισχύει

$$\phi(t) = e^{-it\frac{b_n}{a_n}}.\phi(\frac{t}{a_n})^n,\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Αν X' με συνάρτηση κατανομής F, ανεξάρτητη με τη X, τότε η $X - X'$ έχει κατανομή τη συνέλιξη $F * F^-$ και ισχύει

$$\phi_{X-X'}(t) = \phi_X(t).\phi_{X'}(-t) = \phi(t).\phi(-t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Από την (1) έχουμε

$$\begin{aligned}\phi_{X-X'}(t) &= e^{-it\frac{b_n}{a_n}}.\phi(\frac{t}{a_n})^n.e^{it\frac{b_n}{a_n}}.\phi(\frac{-t}{a_n})^n \\ &= \left(\phi(\frac{t}{a_n}).\phi(\frac{-t}{a_n})\right)^n \overset{(2)}{=} \phi_{X-X'}(\frac{t}{a_n})^n,\ \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Δηλαδή, η $F * F^-$ είναι ευσταθής και μάλιστα οι σταθερές $a'_n > 0$ και $b'_n \in \mathbb{R}$ του ορισμού 3.1 είναι $b'_n = 0$ και $a'_n = a_n$.
Επιπλέον, η χαρακτηριστική συνάρτηση της $F * F^-$ είναι πραγματική, αφού

$$\phi_{F*F^-}(t) = \phi(t).\phi(-t) = \phi(t).\overline{\phi(t)} = \mid \phi(t) \mid^2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Άρα η συνάρτηση κατανομής $F * F^-$, αντιστοιχεί σε συμμετρική ευσταθή κατανομή και συνεπώς από το θεώρημα 3.19, $\exists c > 0,\ a \in (0, 2]$ τέτοια ώστε

$$\phi_{F*F^-}(t) = e^{-c|t|^a},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Τότε όμως, όπως είδαμε στην απόδειξη της πρότασης 3.9, ισχύει

$$a_n = a'_n = n^{\frac{1}{a}}$$

που είναι το ζητούμενο. □

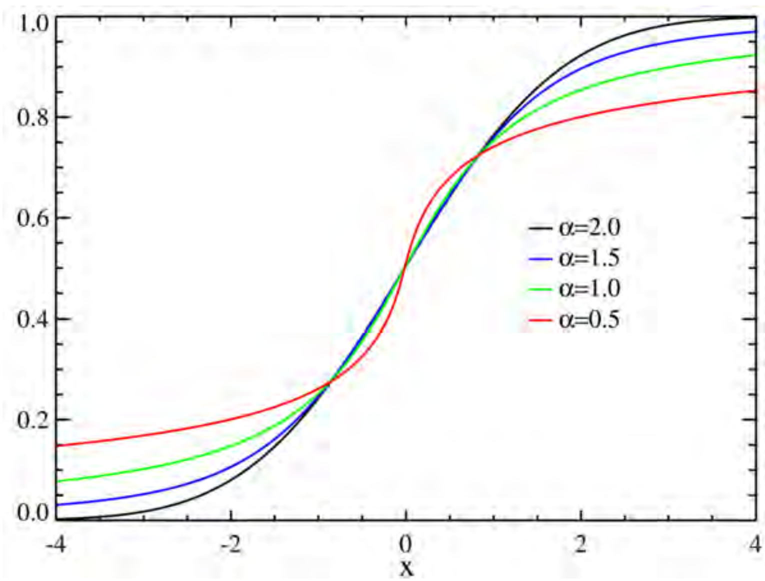
Πορισμα 3.22. *Ο δείκτης $a \in (0, 2]$ είναι σταθερός σε μια κλάση ισοδυναμίας (ως προς τη σχέση " $\sim$ ") ευσταθών κατανομών.*

Απόδειξη. Έστω F ευσταθής συνάρτηση κατανομής.
Τότε από το 3.21 οι σταθερές $a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$ του ορισμού 3.1 είναι

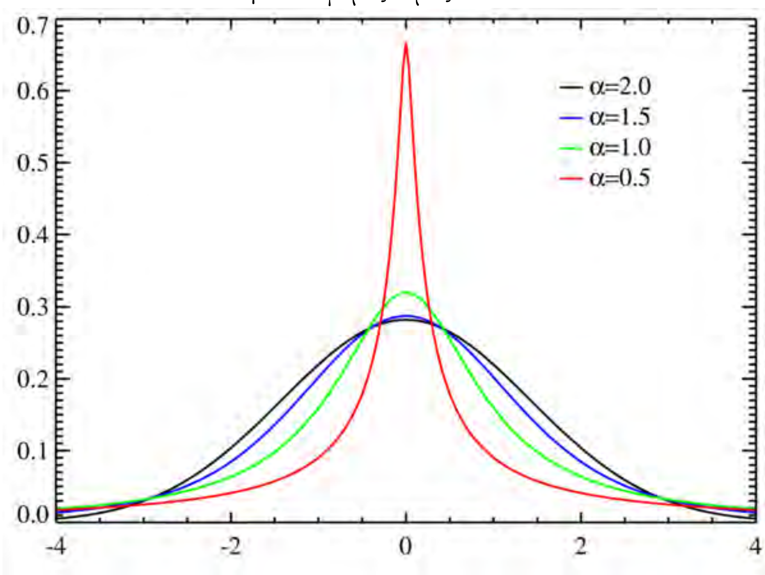
$$a_n = n^{\frac{1}{a}},\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{όπου} \ \ a \in (0, 2]$$

Από την απόδειξη της πρότασης 3.5 έχουμε ότι αν $G \sim F$, τότε η G είναι επίσης ευσταθής και μάλιστα για τις ίδιες σταθερές $a_n = n^{\frac{1}{a}}$. □

Στα επόμενα δύο γραφήματα, φαίνονται οι συναρτήσεις κατανομής και οι αντίστοιχες πυκνότητες, συμμετρικών ευσταθών κατανομών για διάφορες τιμές του $a \in (0, 2]$.



Συναρτήσεις κατανομής συμμετρικών ευσταθών κατανομών
για διάφορες τιμές του a



Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας συμμετρικών
ευσταθών κατανομών για διάφορες τιμές του a

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.23. *Όλες οι ευσταθείς συναρτήσεις κατανομής είναι απολύτως συνεχείς και έχουν συνεχή πυκνότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω F ευσταθής συνάρτηση κατανομής και X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής την F.
Τότε αν F^- η συνάρτηση κατανομής της $-X$, όπως έχουμε δει στην απόδειξη του πορίσματος 3.21, η $| \phi |^2$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της $F * F^-$, η οποία είναι επίσης ευσταθής και επειδή είναι πραγματική, έχει τη μορφή

$$| \phi(t) |^2 = e^{-c|t|^a}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

όπου $a \in (0, 2]$ και $c > 0$.
Συνεπώς,

$$| \phi(t) | = (e^{-c|t|^a})^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{c}{2}|t|^a}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ισχύει

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} | \phi(t) | \, dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c'|t|^a} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-c't^a} dt \end{aligned}$$

όπου $c' = \frac{c}{2}$.
Θέτουμε $c't^a = u$ επομένως $ac't^{a-1}dt = du$ και άρα $dt = \frac{1}{ac'} u^{\frac{1-a}{a}} du$, οπότε

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-c't^a} dt &= \frac{1}{a(c')^{\frac{1}{a}}} \int_0^{+\infty} e^{-u}.u^{\frac{1-a}{a}} du \\ &= \frac{1}{a(c')^{\frac{1}{a}}} \int_0^{+\infty} u^{p-1}.e^{-u} du \end{aligned}$$

όπου $p - 1 = \frac{1-a}{a}$ και άρα $p = \frac{1-a+a}{a} = \frac{1}{a} > 0$.
Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} u^{p-1}.e^{-u} du$$

είναι η τιμή της γνωστής μας συνάρτησης Γάμμα του Euler στο p, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι πεπερασμένη για $p > 0$.
Συνεπώς, έχουμε ότι $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, οπότε από το θεώρημα 1.29 συνεπάγεται ότι η F είναι απολύτως συνεχής και έχει συνεχή πυκνότητα. □

Παραθέτουμε πιο κάτω χωρίς απόδειξη τη γενική μορφή των ευσταθών χαρακτηριστικών συναρτήσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.24. *Μια συνάρτηση ϕ είναι ευσταθής χαρακτηριστική συνάρτηση, αν και μόνο αν*

$$\log(\phi(t)) = it\mu - c \mid t \mid^a (1 + i\beta.sgn(t)w_a(t)), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

όπου

$$a \in (0, 2], \ \text{ο δείκτης},$$
$$-1 \leq \beta \leq 1, \ \text{παράμετρος λοξότητας},$$

$$\mu \in \mathbb{R}, \ \textit{παράμετρος θέσης},$$

$$c > 0, \ \textit{παράμετρος κλίμακας}$$

και $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$w_a(t) = \begin{cases} \tan\left(\frac{a\pi}{2}\right), & \textit{αν } a \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}\log|\,t\,|, & \textit{αν } a = 1 \end{cases}$$

Παρατηρηση 3.25. Σε σχέση με το τελευταίο θεώρημα παρατηρούμε τα εξής:

i) Για $a = 2$, έχουμε $w_2(t) = \tan\pi = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$ και άρα

$$\phi(t) = \exp[it\mu - ct^2], \ \forall t \in \mathbb{R},$$

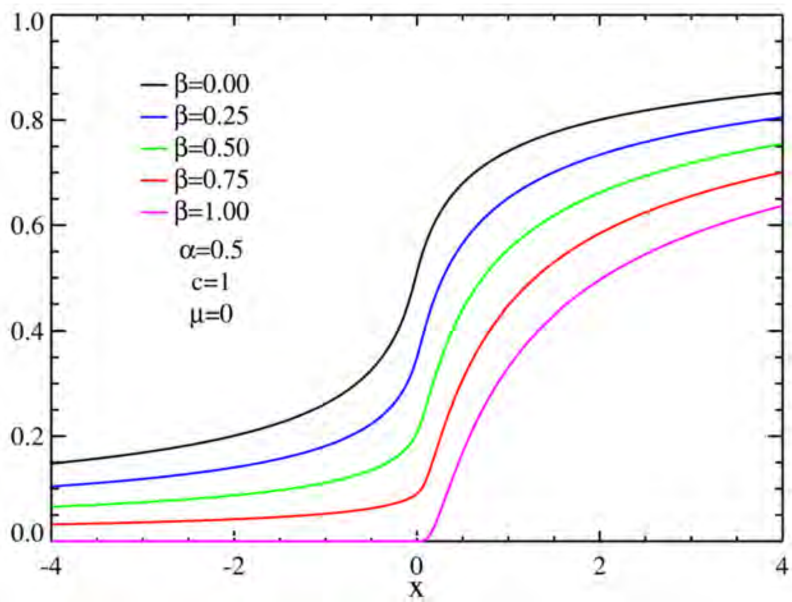
που είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της Κανονικής Κατανομής $N(\mu, 2c)$.

Δηλαδή για $a = 2$, η μόνη κλάση ισοδυναμίας ευσταθών κατανομών, είναι αυτή των Κανονικών Κατανομών.

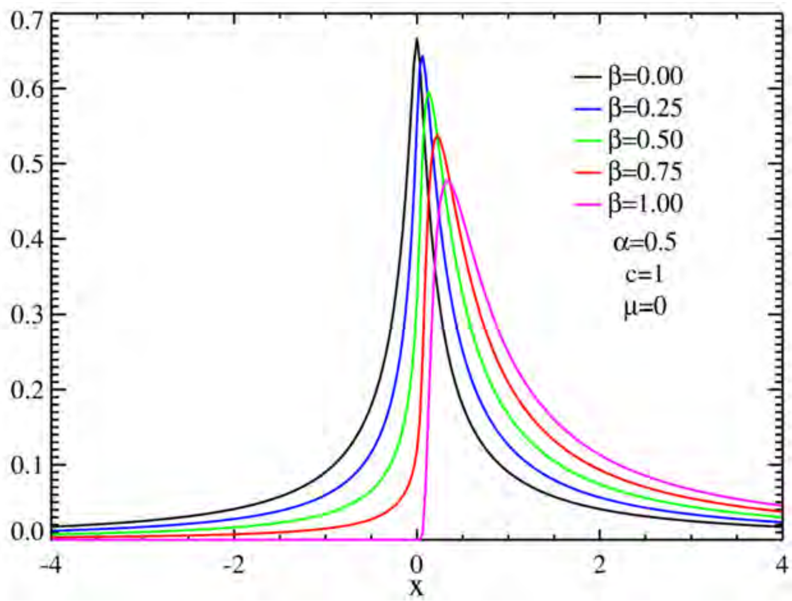
ii) Για $a \in (0,2)$, αν F, G ευσταθείς συναρτήσεις κατανομής με τον ίδιο δείκτη a, δεν ισχύει γενικά ότι $F \sim G$. Δηλαδή πιθανόν να υπάρχουν περισσότερες από μια ευσταθείς κλάσεις ισοδυναμίας για κάθε $a \in (0,2)$.

Αυτό οφείλεται στην παράμετρο λοξότητας $\beta \in [-1,1]$.

Στα επόμενα δύο γραφήματα, φαίνονται οι συναρτήσεις κατανομής και οι αντίστοιχες πυκνότητες, που προκύπτουν για διάφορες τιμές της παραμέτρου λοξότητας β, όταν οι παράμετροι a, c και μ παραμένουν σταθερές.



Συναρτήσεις κατανομής ευσταθών κατανομών
για διάφορες τιμές της β όταν a, c, μ σταθερές.



Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας ευσταθών κατανομών για διάφορες τιμές της β όταν a, c, μ σταθερές.

Παρατηρούμε ότι αν F, G έχουν διαφορετική παράμετρο λοξότητας, τότε πιθανόν να έχουν διαφορετικό σχήμα και άρα δεν μπορούν να έχουν τον ίδιο τύπο, γιατί θα σήμαινε ότι η F είναι μία απλή μετατόπιση της G, πιθανόν με μία αλλαγή στην κλίμακα.

3. ΟΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΩΣ ΟΡΙΑΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Λημμα 3.26. *Έστω F_n, G_n, $n \in \mathbb{N}$ και F, G, συναρτήσεις κατανομής τέτοιες ώστε $F_n \Rightarrow F$ και $G_n \Rightarrow G$.*
Τότε,

$$F_n * G_n \Rightarrow F * G.$$

Αποδειξη. Απο το θεώρημα συνέχειας των χαρακτηριστικών συναρτήσεων,

$$F_n \Rightarrow F \ \Rightarrow \ \phi_{F_n}(t) \to \phi_F(t), \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

και

$$G_n \Rightarrow G \ \Rightarrow \ \phi_{G_n}(t) \to \phi_G(t), \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Από (1),(2) και την Πρόταση 1.39, έχουμε ότι

$$\phi_{F_n * G_n}(t) = \phi_{F_n}(t).\phi_{G_n}(t) \to \phi_F(t).\phi_G(t) = \phi_{F*G}(t), \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Από την (3), ξανά από το θεώρημα συνέχειας των χαρακτηριστικών συναρτήσεων, έχουμε ότι,

$$F_n * G_n \Rightarrow F * G.$$

□

ΛΗΜΜΑ 3.27. *Έστω F_n, $n \in \mathbb{N}$ και G συναρτήσεις κατανομής μέτρου πιθανότητας και ακολουθίες $(a_n)_n, (b_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, με $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε*

$$F_n(b_n x + a_n) \Rightarrow G(x).$$

Επίσης, έστω ακολουθίες $(a'_n)_n, (b'_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b'_n}{b_n} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a'_n - a_n}{b_n} = 0.$$

Τότε,

$$F_n(b'_n x + a'_n) \Rightarrow G(x).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x_1 < x < x_2$ σημεία συνέχειας της G.
Τότε για αρκετά μεγάλο $n \in \mathbb{N}$, επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b'_n}{b_n} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a'_n - a_n}{b_n} = 0,$$

έχουμε,

$$x_1 < \frac{b'_n}{b_n} x + \frac{a'_n - a_n}{b_n} < x_2$$
$$\Rightarrow \; b_n x_1 < b'_n x + a'_n - a_n < b_n x_2$$
$$\Rightarrow \; b_n x_1 + a_n < b'_n x + a'_n < b_n x_2 + a_n.$$

Επειδή F_n αύξουσες $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε,

$$F_n(b_n x_1 + a_n) \leq F_n(b'_n x + a'_n) \leq F_n(b_n x2 + a_n) \tag{1}$$

Επίσης, επειδή x_1, x_2 είναι σημεία συνέχειας της G και από υπόθεση $F_n(b_n x + a_n) \Rightarrow G(x)$, έχουμε,

$$F_n(b_n x_1 + a_n) \to G(x_1) \text{ και } F_n(b_n x_2 + a_n) \to G(x_2).$$

Έτσι, στο όριο, η ανισότητα (1) γίνεται:

$$G(x_1) \leq \liminf F_n(b'_n x + a'_n) \leq \limsup F_n(b'_n x + a'_n) \leq G(x_2). \tag{2}$$

Για $x_1 \nearrow x, x_2 \searrow x$, επειδή x σημείο συνέχειας της G,

$$\lim_{x_1 \nearrow x} G(x_1) = G(x) \text{ και } \lim_{x_2 \searrow x} G(x_2) = G(x)$$

και άρα η (2) γίνεται,

$$G(x) \leq \liminf F_n(b'_n x + a'_n) \leq \limsup F_n(b'_n x + a'_n) \leq G(x).$$

Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(b'_n x + a'_n) = G(x),$$

όπου αυτό συμβαίνει για κάθε x σημείο συνέχειας της G, δηλαδή,

$$F_n(b'_n x + a'_n) \Rightarrow G(x).$$

□

Λημμα 3.28. *Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και έστω ότι υπάρχουν ακολουθίες $(a_n)_n, (b_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, $b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε,*

$$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \Rightarrow F(x)$$

για κάποια συνάρτηση κατανομής μέτρου πιθανότητας F που δεν αναπαριστά ένα εκφυλισμένο νόμο.
Τότε αν $G \sim F$, υπάρχουν $(a'_n)_n, (b'_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, με $b'_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε

$$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - a'_n}{b'_n} \leq x\right) \Rightarrow G(x).$$

Αποδειξη. Επειδή $F \sim G$

$$\Rightarrow\ \exists\, b > 0, a \in \mathbb{R} \text{ τ.ω } G(x) = F(bx + a),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Από την υπόθεση,

$$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \Rightarrow F(x),$$

επομένως,

$$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - a_n}{b_n} \leq bx + a\right) \Rightarrow F(bx + a),$$

δηλαδή,

$$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - a_n - ab_n}{bb_n} \leq x\right) \Rightarrow G(x).$$

Άρα για $a'_n = a_n + ab_n \in \mathbb{R}$, $b'_n = bb_n > 0$ έχουμε το ζητούμενο. □

Ορισμος 3.29. Έστω F είναι συνάρτηση κατανομής μέτρου πιθανότητας. Τότε αν X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής την F,

$$F(x) = P(X \leq x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

ορίζουμε F^- να είναι η συνάρτηση κατανομής της $-X$,

$$F^-(x) = P(-X \leq x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Είναι άμεσο ότι η F^- είναι μη εκφυλισμένη, αν και μόνο αν η F είναι μη εκφυλισμένη.
Για x σημείο συνέχειας της F^-, ισχύει

$$F^-(x) = 1 - F(-x). \tag{$*$}$$

Πράγματι, αφού x είναι σημείο συνέχειας της F^-, ισχύει

$$P(-X \leq x) = F^-(x) = F^-(x-) = P(-X < x)$$

$$\Rightarrow F^-(x) = 1 - P(-X \geq x) = 1 - P(X \leq -x) = 1 - F(-x).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.30. *Έστω F συνάρτηση κατανομής μέτρου πιθανότητας και ϕ η χαρακτηριστική της συνάρτηση.*
Τότε η $|\phi|^2$, είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της $F * F^-$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω X, X' ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής F.
Η $-X'$ έχει συνάρτηση κατανομής F^- και εξ ορισμού, η συνέλιξη $F * F^-$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $X - X'$.
Άρα,

$$\phi_{F*F^-} = \phi_{X-X'}$$

και λόγω ανεξαρτησίας των X, X' έχουμε $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{X-X'}(t) = \phi_X(t).\phi_{-X'}(t) = \phi(t).\phi(-t) = \phi(t).\overline{\phi(t)} = |\phi(t)|^2$$

□

ΛΗΜΜΑ 3.31. *Έστω F_n, G συναρτήσεις κατανομής μέτρων πιθανότητας, τέτοιες ώστε $F_n \Rightarrow G$*
Τότε

$$F_n{}^- \Rightarrow G^-$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F_n αντίστοιχα και έστω Y τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής G.
Επειδή $F_n \Rightarrow G$, από το Θεώρημα Συνέχειας των χαρακτηριστικών συναρτήσεων, έχουμε ότι

$$\phi_{F_n}(t) \xrightarrow{n} \phi_G(t),\ \forall t \in \mathbb{R},$$

επομένως

$$\phi_{F_n}(-t) \xrightarrow{n} \phi_G(-t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Όμως

$$\phi_{F_n}(-t) = \phi_{X_n}(-t) = \phi_{-X_n}(t) = \phi_{F_n^-}(t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

και

$$\phi_G(-t) = \phi_Y(-t) = \phi_{-Y}(t) = \phi_{G^-}(t),\ \forall t \in \mathbb{R},$$

επομένως από (1)

$$\phi_{F_n^-}(t) \xrightarrow{n} \phi_{G^-}(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

και άρα από το Θελωρημα Συνέχειας των χαρακτηριστικών συναρτήσεων

$$F_n^- \Rightarrow G^-$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.32 (Convergence of Types). *Έστω $F_n, n \in \mathbb{N}, G, H$ συναρτήσεις κατανομής μέτρων πιθανότητας, τέτοιες ώστε*

$$F_n(x) \Rightarrow G(x) \text{ και } F_n(b_n x + a_n) \Rightarrow H(x),$$

όπου $b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ και $a_n \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι G, H δεν είναι εκφυλισμένες.
Τότε G και H είναι του ίδιου τύπου.

Αποδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία $(b_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $b_{n'} \to b,\ b > 0$.
Αν όχι, τότε υπάρχει είτε $b_{n'} \to 0$ ή $b_{n'} \to +\infty$.
Πράγματι: Η (b_n) έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο.
Αν είναι φραγμένη από κάποιο $M > 0$, τότε από Bolzano Weierstrass έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο $b \in [0, M]$ και άρα από την υπόθεση υποχρεωτικά $b = 0$.
Αν δεν είναι φραγμένη, τότε έχει υπακολουθία που πάει στο $+\infty$.

Έστω $a_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

i) Αν $(b_{n'})_{n'}$ υπακολουθία με $b_{n'} \to 0$, τότε

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) \in [G(0-), G(0+)].$$

Πράγματι: Αν x σημείο συνέχειας της H,
επειδή $F_{n'}(b_{n'}x) \Rightarrow H(x)$ από υπόθεση, έχουμε ότι

$$H(x) = \lim_{n'\to\infty} F_{n'}(b_{n'}x).$$

Έστω $x_1 < 0 < x_2$ σημεία συνέχειας της G. Τότε για το $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$xb_{n'} \in (x_1, x_2),\ \forall n' \geq n_0.$$

Επειδή $F_{n'}$ αύξουσες συναρτήσεις ως συναρτήσεις κατανομής, έχουμε

$$F_{n'}(x_1) \leq F_{n'}(xb_{n'}) \leq F_{n'}(x_2),\ \forall n' \geq n_0. \tag{1}$$

Για $n' \to +\infty$, επειδή x_1, x_2 σημεία συνέχειας της G, έχουμε

$$F_{n'} \to G(x_1),\ \text{και } F_{n'} \to G(x_2).$$

Άρα στο όριο η (1) γίνεται,

$$G(x_1) \leq H(x) \leq G(x_2)$$

και αυτό ισχύει για όλα τα $x_1 < 0 < x_2$ σημεία συνέχειας της G.
Για $x_1 \nearrow 0, x_2 \searrow 0$ έχουμε,

$$G(0-) \leq H(x) \leq G(0+),\ \forall x \text{ σημείο συνέχειας της } H. \tag{2}$$

Έστω ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $H(x) \notin [G(0-), G(0+)]$.
Έστω $H(x) > G(0+)$. Τότε υπάρχει $x' > x$ σημείο συνέχειας της H, αφού η H είναι συνάρτηση κατανομής άρα αύξουσα και άρα τα σημεία συνέχειας της είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$.
Επειδή η H είναι αύξουσα έχουμε
$H(x') \geq H(x) > G(0+)$, που είναι άτοπο από τη (2).
Όμοια αν $H(x) < G(0-)$, έχουμε πάλι άτοπο.

Άρα, πράγματι $\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) \in [G(0-), G(0+)]$.

Για $x \to +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} H(x) = 1$, αφού H είναι συνάρτηση κατανομής και άρα $G(0+) \geq 1$.

Για $x \to -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} H(x) = 0$, αφού H είναι συνάρτηση κατανομής και άρα $G(0-) \leq 0$.

Επειδή η G είναι συνάρτηση κατανομής και άρα παίρνει τιμές στο $[0, 1]$,

$$\Rightarrow G(0-) = 0,\ G(0+) = 1$$

και άρα η G είναι εκφυλισμένη, άτοπο από την υπόθεση.

Άρα δεν μπορεί να υπάρχει $(b_{n'})_{n'}$ υπακολουθία της $(b_n)_n$, με $b_{n'} \to 0$.

ii) Αν $(b_{n'})_{n'}$ υπακολουθία με $b_{n'} \to +\infty$, τότε

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Πράγματι: Επειδή από υπόθεση $F_n(x) \Rightarrow G(x)$, αν μ_n οι κατανομές που αντιστοιχούν στις F_n, τότε η οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\mathcal{M} = \{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι tight.

Δηλαδή, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, I = (c, d]$, φραγμένο διάστημα στο $\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_n(I) > 1 - \varepsilon.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$.

Αν $x > 0$, τότε υπάρχει n'_0 τέτοιο ώστε $\forall n' \geq n'_0$, $b_{n'}x > d$

$$\Rightarrow F_{n'}(b_{n'}x) = \mu_{n'}(-\infty, b_{n'}x] \geq \mu_{n'}(-\infty, d] \geq \mu_{n'}(I) > 1 - \varepsilon.$$

Δηλαδή, για $x > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n'_0$ τέτοιο ώστε $\forall n' \geq n'_0$

$$1 \geq F_{n'}(b_{n'}x) > 1 - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n'\to\infty} F_{n'}(b_{n'}x) = 1,\ \forall x > 0. \tag{3}$$

Αν $x < 0$, τότε υπάρχει n'_0 τέτοιο ώστε $\forall n' \geq n'_0$, $b_{n'}x < c$

$$\Rightarrow F_{n'}(b_{n'}x) = \mu_{n'}(-\infty, b_{n'}x] \leq \mu_{n'}(-\infty, c] \leq \mu_{n'}(I^c) < \varepsilon.$$

Δηλαδή, για $x < 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n'_0$ τέτοιο ώστε $\forall n' \geq n'_0$

$$0 \leq F_{n'}(b_{n'}x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n'\to\infty} F_{n'}(b_{n'}x) = 0,\ \forall x < 0. \tag{4}$$

Επειδή $F_{n'}(b_{n'}x) \Rightarrow H(x)$, από (3) και (4) έχουμε ότι για κάθε x σημείο συνέχειας της H, με $x \neq 0$,

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $H(x_0) \in (0,1)$.
Αν $x_0 > 0$, τότε επειδή η H είναι συνάρτηση κατανομής και άρα τα σημεία συνέχειας της είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$, υπάρχει x σημείο συνέχειας της H τέτοιο ώστε $0 < x < x_0$. Επειδή η H είναι αύξουσα, έχουμε ότι $H(x) \leq H(x_0) < 1$, που είναι άτοπο γιατί $H(x) = 1$.
Αν $x_0 < 0$, τότε υπάρχει x σημείο συνέχειας της H τέτοιο ώστε $0 > x > x_0$. Επειδή η H είναι αύξουσα, έχουμε ότι
$H(x) \geq H(x_0) > 0$, που είναι άτοπο γιατί $H(x) = 0$.
Αν $x_0 = 0$, τότε επειδή η H είναι δεξιά συνεχής ως συνάρτηση κατανομής, για $x \searrow 0,\ x > 0$,

$$\lim_{x \searrow 0} H(x) = H(0) \ \Rightarrow 1 = H(0) < 1, \text{ άτοπο.}$$

Άρα πράγματι, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

και άρα η H είναι εκφυλισμένη, άτοπο.

Συνεπώς δεν μπορεί να υπάρχει $(b_{n'})_{n'}$ υπακολουθία της $(b_n)_n$, με $b_{n'} \to +\infty$.

Από (i) και (ii) δεν μπορεί να υπάρχει υπακολουθία της $(b_n)_n$ που πάει στο 0 ή στο $+\infty$, επομένως υπάρχει $b > 0$ και $(b_{n'})_{n'}$, υπακολουθία της $(b_n)_n$, τέτοια ώστε

$$b_{n'} \to b.$$

Θα αφαιρέσουμε τον περιορισμό $a_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$:
Από το Λήμμα 3.31 έχουμε,

$$F_n(x) \Rightarrow G(x) \quad \text{άρα} \quad F_n{}^{-}(x) \Rightarrow G^{-}(x)$$

και

$$F_n(b_n x + a_n) \Rightarrow H(x) \quad \text{άρα} \quad F_n{}^{-}(b_n x + a_n) \Rightarrow H^{-}(x).$$

Τότε, από το Λήμμα 3.26 έχουμε,

$$F_n * F_n{}^{-} \Rightarrow G * G^{-}, \tag{5i}$$

και

$$F_n(b_n x + a_n) * F_n{}^{-}(b_n x + a_n) \Rightarrow H * H^{-}. \tag{5ii}$$

Όμως, από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue-Stieltjes, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$(F_n(b_nx+a_n)*F_n{}^-(b_nx+a_n))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(b_n(t-s)+a_n)dF_n{}^-(b_ns+a_n)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(b_n(t-s))dF_n{}^-(b_ns) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(b_nt-b_ns)dF_n{}^-(b_ns)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(b_nt-s)dF_n{}^-(s) = (F_n * F_n{}^-)(b_nt). \tag{6}$$

Άρα από $(5i), (5ii)$ και με χρήση της (6) έχουμε ότι,

$$F_n * F_n{}^- \Rightarrow G * G^-,$$

και

$$(F_n * F_n{}^-)(b_nx) \Rightarrow (H * H^-)(x),$$

όπου από την Πρόταση 1.41, οι $G * G^-, H * H^-$ είναι μη εκφυλισμένες. Δηλαδή οι $(F_n * F_n{}^-)$, $(G * G^-)$ και $(H * H^-)$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος για τα ίδια b_n και για $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και άρα όπως έχουμε δείξει, υπάρχει υπακολουθία $(b_{n'})_{n'}$ της $(b_n)_n$ και $b > 0$ τέτοιο ώστε

$$b_{n'} \to b.$$

Άρα πράγματι όταν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος, υπάρχει υπακολουθία $(b_{n'})_{n'}$ της $(b_n)_n$ και $b > 0$ τέτοιο ώστε

$$b_{n'} \to b.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι

$$F_{n'}(b_{n'}x + a_{n'}) \Rightarrow H(x), \text{ όπου } b_{n'} \to b > 0.$$

Θα δείξουμε ότι δεν μπορεί να υπάρχει υπακολουθία $(a_{n''})_{n''}$ της $(a_{n'})_{n'}$, τέτοια ώστε $a_{n''} \to +\infty$, ή $a_{n''} \to -\infty$.

Έστω x σημείο συνέχειας της H.
Αν $\mu_{n''}$ οι κατανομές που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις κατανομής $F_{n''}$, τότε επειδή $F_{n''} \Rightarrow G$, η $(\mu_{n''})_{n''}$ είναι tight οικογένεια μέτρων πιθανότητας.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει διάστημα $(c, d]$ στο $\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\mu_{n''}(c, d] > 1 - \varepsilon, \ \forall n'' \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$F_{n''}(d) > 1 - \varepsilon, \ \forall n'' \in \mathbb{N}$$

και

$$F_{n''}(c) < \varepsilon, \ \forall n'' \in \mathbb{N}.$$

Αν $a_{n''} \to +\infty$, τότε επειδή $(b_{n''})_{n''}$ είναι φραγμένη ώς συγκλίνουσα σε πραγματικό αριθμό, $\exists\, n_0'' \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\forall n'' \geq n_0''$,

$$b_{n''}x + a_{n''} > d \quad \Rightarrow \quad F_{n''}(b_{n''}x + a_{n''}) \geq F_{n''}(d) > 1 - \varepsilon.$$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0'' \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\forall n'' \geq n_0''$, ισχύει

$$1 \geq F_{n''}(b_{n''}x + a_{n''}) > 1 - \varepsilon.$$

Επειδή $F_{n''}(b_{n''}x + a_{n''}) \Rightarrow H(x)$, για $n'' \to +\infty$, έχουμε

$$H(x) = 1$$

και αυτό ισχύει για κάθε x σημείο συνέχειας της H. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η H είναι συνάρτηση κατανομής.

Αν $a_{n''} \to -\infty$, τότε επειδή $(b_{n''})_{n''}$ είναι φραγμένη ώς συγκλίνουσα σε πραγματικό αριθμό, $\exists\, n_0'' \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\forall n'' \geq n_0''$,

$$b_{n''}x + a_{n''} < c \quad \Rightarrow \quad F_{n''}(b_{n''}x + a_{n''}) \leq F_{n''}(c) < \varepsilon.$$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0'' \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\forall n'' \geq n_0''$, ισχύει

$$0 \leq F_{n''}(b_{n''}x + a_{n''}) < \varepsilon.$$

Επειδή $F_{n''}(b_{n''}x + a_{n''}) \Rightarrow H(x)$, για $n'' \to +\infty$, έχουμε

$$H(x) = 0$$

και αυτό ισχύει για κάθε x σημείο συνέχειας της H. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η H είναι συνάρτηση κατανομής.

Άρα η $(a_{n'})_{n'}$, δεν μπορεί να έχει υπακολουθία που να πηγαίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, άρα έχει υπακολουθία που πάει σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$.

Άρα μπορώ να επιλέξω υπακολουθίες $(b_{n''})_{n''}$ και $(a_{n''})_{n''}$, τέτοιες ώστε

$$b_{n''} \to b \in (0, +\infty) \quad \text{και} \quad a_{n''} \to a \in (-\infty, +\infty).$$

Επειδή $F_{n''}(x) \Rightarrow G(x)$ έχουμε ότι,

$$F_{n''}(bx + a) \Rightarrow G(bx + a) \tag{7}$$

και επίσης

$$F_{n''}(b_{n''}x + a_{n''}) \Rightarrow H(x). \tag{8}$$

Ορίζουμε

$$c_{n''} = b, \forall n'' \in \mathbb{N}$$

και

$$d_{n''} = a, \forall n'' \in \mathbb{N}.$$

Τότε

$$\lim \frac{c_{n''}}{b_{n''}} = 1 \quad \text{και} \quad \lim \frac{d_{n''} - a_{n''}}{b_{n''}} = 0. \tag{9}$$

Από τις (8) και (9), εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.27, έχουμε ότι

$$F_{n''}(c_{n''}x + d_{n''}) \Rightarrow H(x),$$

δηλαδή

$$F_{n''}(bx + a) \Rightarrow H(x). \tag{10}$$

Τότε όμως, από (7) και (10), λόγω της μοναδικότητας του ασθενούς ορίου, έχουμε

$$G(bx + a) = H(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

δηλαδή, G και H είναι του ίδιου τύπου.

□

Θεωρημα 3.33 (P.P. Levy). *Έστω F μη εκφυλισμένη συνάρτηση κατανομής.*
Η F είναι ευσταθής αν και μόνο αν, υπάρχουν $X_1, X_2, ...$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθίες $(a_n)_n, (b_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, με $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε

$$F_n(x) \overset{\text{ορ}}{=} P\left(\frac{X_1 + ... + X_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \Rightarrow F(x). \tag{1}$$

Αποδειξη. '$\Rightarrow$' Έστω ότι η F είναι ευσταθής.
Έστω $X_1, X_2, ...$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με συνάρτηση κατανομής F (υπάρχουν από το θεώρημα 1.11).
Επειδή η F είναι ευσταθής, $\forall n \in \mathbb{N}$, από τον ορισμό 3.1
$\exists\, a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$P\left(\frac{X_1 + ... + X_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = F(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή υπάρχουν ακολουθίες $(a_n)_n, (b_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, με $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε $\forall x \in \mathbb{R}$,,

$$F_n(x) \overset{\text{ορ}}{=} P\left(\frac{X_1 + ... + X_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = F(x),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

και άρα

$$F_n(x) \overset{\text{ορ}}{=} P\left(\frac{X_1 + ... + X_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \Rightarrow F(x).$$

'$\Leftarrow$' Από την πρόταση 3.4, για να δείξουμε ότι η F είναι ευσταθής, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall k \in \mathbb{N}$, η F^{*k} είναι του ίδιου τύπου με την F.
Έστω $k \in \mathbb{N}$. Από την υπόθεση $F_n \Rightarrow F$ και άρα από το Λήμμα 3.26

$$F_n{}^{*k}(x) \Rightarrow F^{*k}(x). \tag{2}$$

Η $F_n{}^{*k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, είναι η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος k ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που έχουν συνάρτηση κατανομής F_n, δηλαδή ίδια με τη συνάρτηση κατανομής της $\frac{S_n - b_n}{a_n}$, όπου $S_n = X_1 + ... + X_n$.
Άρα, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$,

$$F_n{}^{*k}(x) = P\left(\frac{S_n - b_n}{a_n} + \frac{S_{2n} - S_n - b_n}{a_n} + ... + \frac{S_{kn} - S_{(k-1)n} - b_n}{a_n} \leq x\right)$$

$$= P\left(\frac{S_{kn}-kb_n}{a_n}\leq x\right) = P\left(\frac{S_{kn}-b_{kn}-kb_n+b_{kn}}{a_n a_{kn}}\leq \frac{x}{a_{kn}}\right)$$

$$= P\left(\frac{S_{kn}-b_{kn}}{a_{kn}}\leq \frac{xa_n+kb_n-b_{kn}}{a_{kn}}\right) = F_{kn}(\frac{a_n}{a_{kn}}x+\frac{kb_n-b_{kn}}{a_{kn}}). \quad (3)$$

Από (1) έχουμε ότι

$$F_{kn}(x) \Rightarrow F(x) \quad (4)$$

και από (2) και (3) ότι

$$F_{kn}(\frac{a_n}{a_{kn}}x+\frac{kb_n-b_{kn}}{a_{kn}}) \Rightarrow F^{*k}(x). \quad (5)$$

Επίσης, από την υπόθεση η F δεν είναι εκφυλισμένη και άρα ούτε η F^{*k} είναι εκφυλισμένη.
Από (4) και (5) εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.32 Convergence of Types, έχουμε ότι η F^{*k} είναι του ίδιου τύπου με την F.
Άρα η F είναι ευσταθής. □

Παρατηρηση 3.34. Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα μας λέει ότι το κατάλληλα κανονικοποιημένο άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη διασπορά, τείνει ασθενώς στην Κανονική Κατανομή καθώς ο αριθμός των τυχαίων μεταβλητών ανεβαίνει. Το θεώρημα 3.33 μας λέει ότι χωρίς την υπόθεση της πεπερασμένης διασποράς, η οριακή κατανομή πιθανόν να μην είναι η Κανονική, αλλά μια άλλη ευσταθής κατανομή.

4. MAX-STABLE ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το maximum μιας ανεξάρτητης και ισόνομης τυχαίας ακολουθίας και θα δούμε ότι οι πιθανές οριακές κατανομές, χαρακτηρίζονται με αντίστοιχο τρόπο με τις οριακές κατανομές που προκύπτουν από μερικά αθροίσματα ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων ακολουθιών.

Ορισμος 3.35. Έστω $X_1, X_2, ...$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής F και κατανομή μ που είναι μη εκφυλισμένες.
Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$M_k = \max\{X_1, ..., X_k\}$$

Η κατανομή μ και η συνάρτηση κατανομής F λέγονται max-stable, αν η συνάρτηση κατανομής της M_k είναι του ίδιου τύπου με την F για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Παρατηρηση 3.36. Έστω $X_1, X_2, ...$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής F και κατανομή μ που είναι μη εκφυλισμένες.
Τότε $\forall k \in \mathbb{N}$, λόγω της ανεξαρτησίας των X_i, η συνάρτηση κατανομής της

$$M_k = \max\{X_1, ..., X_k\}$$

είναι

$$P(\max\{X_1,...,X_k\} \le t) = P([X_1 \le t] \cap ... \cap [X_k \le t])$$
$$= P(X_1 \le t)...P(X_k \le t) = F(t)...F(t) = F(t)^k,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς ο ορισμός 3.35 είναι ισοδύναμος με τον εξής ορισμό:

Ορισμος 3.37. Μια συνάρτηση κατανομής F λέγεται max-stable όταν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση κατανομής F^k είναι του ίδιου τύπου με την F, δηλαδή

$$F^k \sim F,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Από την πρόταση 3.4, ο ορισμός των max-stable συναρτήσεων κατανομής, είναι αντίστοιχος με τον ορισμό των ευσταθών συναρτήσεων κατανομής, όπου αντί για συνέλιξη, έχουμε πολλαπλασιασμό.

Θεωρημα 3.38 (Fisher, Tippett, Gnedenko).
Έστω F μη εκφυλισμένη συνάρτηση κατανομής. Η F είναι max-stable αν και μόνο αν
υπάρχουν $X_1, X_2, ...$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και $a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε αν

$$M_n = \max\{X_1,...,X_n\},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

ισχύει

$$F_n(t) \overset{o\rho}{=} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \le t\right) \Rightarrow F(t) \tag{1}$$

Αποδειξη. " $\Rightarrow$ " Έστω ότι F είναι max-stable.
Τότε αν $X_1, X_2, ...$ ανεξάρτητες και ισόνομες, με συνάρτηση κατανομής την F, έχουμε

$$P(M_n \le t) = F(t)^n,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Επειδή F max-stable, $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$F(t)^n = F(\frac{t - b_n}{a_n}),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς,

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \le t\right) = P(M_n \le a_n t + b_n) = F(t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

και άρα

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right) \Rightarrow F(t)$$

" $\Leftarrow$ " Συμβολισμός: Αν $i < j \in \mathbb{N}$,

$$M_{i,j} = \max\{X_{i+1},...,X_j\}$$

Για παράδειγμα

$$M_{0,n} = M_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $F^k \sim F$.

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Από την υπόθεση $F_n \Rightarrow F$ και άρα $F_n^k \Rightarrow F^k$, γιατί t είναι σημείο συνέχειας της F αν και μόνο αν είναι σημείο συνέχειας της F^k και επίσης

$$F_n(t) \to F(t) \quad \iff \quad F_n^k(t) \to F^k(t)$$

Όμως F_n^k είναι η συνάρτηση κατανομής του maximum k ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με κατανομή ίδια με την κατανομή της $\frac{M_n-b_n}{a_n}$.

Άρα,

$$\begin{aligned} {F_n}^k(t) &= P\left(\max\{\frac{M_{0,n}-b_n}{a_n}, \frac{M_{n,2n}-b_n}{a_n}, ..., \frac{M_{k(n-1),kn}-b_n}{a_n}\} \leq t\right) \\ &= P(\frac{M_{kn}-b_n}{a_n} \leq t), \ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad (2) \end{aligned}$$

αφού

$$M_{kn} = \max\{X_1, ..., X_{kn}\} = \max\{M_{0,n}, M_{n,2n}, ..., M_{(k-1)n,nk}\}$$

Από τη (2), έχουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned} {F_n}^k(t) &= P\left(\frac{M_{kn}-b_n}{a_n} \leq t\right) = P\left(\frac{M_{kn}-b_{kn}+b_{kn}-b_n}{a_n.a_{kn}} \leq \frac{t}{a_{kn}}\right) \\ &= P\left(\frac{M_{kn}-b_{kn}}{a_{kn}} \leq \frac{a_n t + b_n - b_{kn}}{a_{kn}}\right) = F_{kn}(\frac{a_n}{a_{kn}}t + \frac{b_n-b_{kn}}{a_{kn}}) \end{aligned}$$

δηλαδή

$${F_n}^k(t) = F_{kn}(\frac{a_n}{a_{kn}}t + \frac{b_n-b_{kn}}{a_{kn}}), \ \forall t \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Από (1) έχουμε ότι

$$F_{kn}(t) \Rightarrow F(t) \qquad (4)$$

και από (3), αφου $F_n^k \Rightarrow F^k$, έχουμε ότι

$$F_{kn}(\frac{a_n}{a_{kn}}t + \frac{kb_n-b_{kn}}{a_{kn}}) \Rightarrow F^k(t). \qquad (5)$$

Επίσης, από την υπόθεση η F δεν είναι εκφυλισμένη και άρα ούτε η F^k είναι εκφυλισμένη.
Συνεπώς, από (4) και (5), με εφαρμογή του Θεώρηματος 3.32 Convergence of Types έχουμε ότι

$$F^k \sim F$$

□

Το θεώρημα αυτό, επιβεβαιώνει ότι οι max-stable κατανομές συμπεριφέρονται αντίστοιχα με τις ευσταθείς κατανομές, αφού μας δίνει ένα χαρακτηρισμό των max-stable κατανομών που είναι παρόμοιος με τον χαρακτηρισμό των ευσταθών κατανομών που είδαμε στο θεώρημα 3.33.

5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.39. *Έστω $0 < a < 2$ και X τυχαία μεταβλητή με κατανομή συμμετρική, ευσταθή με δείκτη a.*
Τότε αν $r > 0$, ισχύει

$$E(\mid X \mid^r) < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad r < a.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της X είναι

$$\phi(t) = e^{-c|t|^a},\ \forall t \in \mathbb{R},\ c > 0.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι πραγματική και άρα

$$\phi(t) = E(\cos(tX)),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Έστω ότι $r \in (0, 2)$.
Έχουμε δει στην απόδειξη της πρότασης 3.8 ότι $\forall a \in (0, 2)$,

$$\int_0^{+\infty} (1 - \cos(ty))y^{-(a+1)}dy = c_a \mid t \mid^a,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

όπου

$$c_a = \int_0^{+\infty} (1 - \cos w)w^{-(a+1)}dw > 0$$

Συνεπώς, επειδή $r \in (0, 2)$, υπάρχει $s_r > 0$ έτσι ώστε

$$\mid t \mid^r = s_r \int_0^{+\infty} (1 - \cos(ty))y^{-(r+1)}dy,\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ισχύει

$$E(\mid X \mid^r) = \int_\Omega \mid X \mid^r dp \overset{(1)}{=} s_r \int_\Omega \int_0^{+\infty} (1 - \cos(yX))y^{-(r+1)}dydp$$

Από το Θεώρημα Tonelli, επειδή έχουμε ολοκλήρωση μη αρνητικής συνάρτησης, μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και άρα

$$E(\mid X \mid^r) = s_r \int_0^{+\infty} y^{-(r+1)} \left(\int_\Omega (1 - \cos(yX))dp \right) dy$$

$$= s_r \int_0^{+\infty} y^{-(r+1)}(1 - \phi(y))dy = s_r \int_0^{+\infty} y^{-(r+1)}(1 - e^{-cy^a})dy \tag{2}$$

Έχουμε ότι

$$\lim_{y\to 0} \frac{(1 - e^{-cy^a})y^{-r-1}}{y^{a-r-1}} = \lim_{y\to 0} \frac{1 - e^{-cy^a}}{y^a} = \frac{0}{0}$$

οπότε με εφαρμογή του κανόνα de l'Hospital,

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1-e^{-cy^a})y^{-r-1}}{y^{a-r-1}}=\lim_{y\to 0}\frac{cay^{a-1}e^{-cy^a}}{ay^{a-1}}=c \tag{3}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 y^p dy$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p>-1$, δηλαδή το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 y^{a-r-1}dy \tag{4}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $a>r$.

Από γνωστό κριτήριο σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων, λόγω των (3) και (4) έχουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} y^{-(r+1)}(1-e^{-cy^a})dy<+\infty \quad\Longleftrightarrow\quad a>r. \tag{5}$$

Επειδή,

$$\int_1^{+\infty}(1-e^{-cy^a})y^{-(r+1)}dy=\int_1^{+\infty}\mid 1-e^{-cy^a}y^{-(r+1)}\mid dy\le 2\int_1^{+\infty}y^{-(r+1)}dy$$

και το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty}y^{-(r+1)}dy$ υπάρχει γιατί $r>0$, έχουμε ότι

$$\int_1^{+\infty}(1-e^{-cy^a})y^{-(r+1)}dy<+\infty \tag{6}$$

Άρα από (5) και (6),

$$\int_0^{+\infty}(1-e^{-cy^a})y^{-(r+1)}dy<+\infty \quad\Longleftrightarrow\quad r<a. \tag{7}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
Αν $r<a<2$, τότε από (2) και (7) έχουμε ότι

$$E(\mid X\mid^r)<+\infty \tag{a}$$

Αν $2>r\ge a$, τότε από (2) και (7) έχουμε ότι

$$E(\mid X\mid^r)=+\infty \tag{b}$$

Αν $r\ge 2$. Υπάρχει r_0 τέτοιο ώστε $r\ge 2>r_0\ge\max\{a,1\}$ και άρα από (b) ισχύει $E(\mid X\mid^{r_0})=+\infty$.
Επίσης γνωρίζουμε ότι

$$L^r(\Omega,p)\subseteq L^{r_0}(\Omega,p)$$

γιατί $r>r_0\ge 1$.
Συνεπώς, επειδή $E(\mid X\mid^{r_0})=+\infty$ έχουμε ότι

$$E(\mid X\mid^r)=+\infty \tag{c}$$

Από $(a),(b),(c)$ έχουμε ότι

$$E(\mid X\mid^r)<+\infty \quad\Longleftrightarrow\quad r<a.$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.40. *Αν* $0 < r < a < 2$, *τότε*

$$\ell^a \hookrightarrow L^r([0,1],\lambda)$$

ισομετρικά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον $L^r([0,1],\lambda)$, τέτοια ώστε για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}_{n=1}^k$, $k\in\mathbb{N}$, ισχύει ότι

$$||\sum_{n=1}^k a_n X_n||_{L^r} = \left(\sum_{n=1}^k \mid a_n \mid^a\right)^{\frac{1}{a}} \tag{$\star$}$$

Για να δείξουμε την $(\star)$, αρκεί να υποθέσουμε ότι

$$\sum_{n=1}^k \mid a_n \mid^a = 1$$

και να δείξουμε ότι

$$||\sum_{n=1}^k a_n X_n||_{L^r} = 1$$

Πράγματι, αν το ξείξουμε αυτό, αν

$$\sum_{n=1}^k \mid a_n \mid^a = s > 0,$$

τότε

$$\sum_{n=1}^k \mid \frac{a_n}{s^{\frac{1}{a}}} \mid^a = 1$$

και άρα

$$||\sum_{n=1}^k \frac{a_n}{s^{\frac{1}{a}}} X_n||_{L^r} = 1$$

συνεπώς

$$||\sum_{n=1}^k a_n X_n||_{L^r} = s^{\frac{1}{a}} = \left(\sum_{n=1}^k \mid a_n \mid^a\right)^{\frac{1}{a}}$$

που είναι το ζητούμενο από $(\star)$.

Από την πρόταση 3.8, υπάρχει κατανομή μ, συμμετρική ευσταθής με δείκτη a.
Από το θεώρημα 1.11 υπάρχει ακολουθία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών στο χώρο $([0,1],\mathcal{B}[0,1],\lambda)$, που έχουν κατανομή μ.
Ισχύει

$$E(\mid X_n \mid^r) = \theta > 0,\ \forall n\in\mathbb{N},$$

από την προηγούμενη πρόταση, αφού $r < a$.
Θέτουμε

$$Y_n = \frac{X_n}{\theta^{\frac{1}{r}}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Τότε η (Y_n) είναι ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία και ισχύει

$$E(\mid Y_n \mid^r) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $\{a_n\}_{n=1}^k \subseteq \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{k} \mid a_n \mid^a = 1$$

Λόγω ανεξαρτησίας των $Y_n, \ n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\phi_{\sum_{n=1}^k a_n Y_n}(t) = \prod_{n=1}^{k} \phi_{a_n Y_n}(t) = \prod_{n=1}^{k} \phi_{\frac{a_n}{\theta^{\frac{1}{r}}} X_n}(t) = \prod_{n=1}^{k} \phi_{X_n}(\frac{a_n t}{\theta^{\frac{1}{r}}}), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

όπου, επειδή οι X_n έχουν κατανομή συμμετρική ευσταθή με δείκτη a, υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε

$$\phi_{X_n}(t) = e^{-c|t|^a}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$\phi_{\sum_{n=1}^k a_n Y_n}(t) = \prod_{n=1}^{k} \exp\left(-c.\theta^{-\frac{a}{r}} \mid a_n \mid^a \mid t \mid^a\right)$$

$$= \exp\left(-c.\theta^{-\frac{a}{r}} (\sum_{n=1}^{k} \mid a_n \mid^a) \mid t \mid^a\right) = \exp\left(-c.\theta^{-\frac{a}{r}} \mid t \mid^a\right), \ \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Επίσης

$$\phi_{Y_n}(t) = \phi_{\theta^{-\frac{1}{r}} X_n}(t) = \phi_{X_n}(\theta^{-\frac{1}{r}} t)$$
$$= \exp\left(-c.\theta^{-\frac{1}{r}} \mid t \mid^a\right), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Από (1) και (2) και το πόρισμα 1.28, έχουμε ότι η

$$\sum_{n=1}^{k} a_n Y_n$$

και η Y_1 έχουν την ίδια κατανομή.

Συνεπώς

$$E(\mid \sum_{n=1}^{k} a_n Y_n \mid^r) = E(\mid Y_1 \mid^r) = 1$$

και άρα

$$||\sum_{n=1}^{k} a_n Y_n||_{L^r} = 1$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΠΕΡΙΟΡΙΣΤΑ ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

1. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ POISSON

Λημμα 4.1. *Έστω* $z_1, ..., z_n \quad w_1, ..., w_m$ *μιγαδικοί αριθμοί μέτρου* $\leq \theta$. *Τότε*

$$| \prod_{m=1}^{n} z_m - \prod_{m=1}^{n} w_m | \leq \theta^{n-1} \sum_{m=1}^{n} | z_m - w_m | \,. \tag{1}$$

Αποδειξη. Για $n = 1$

$$| z_1 - w_1 | \leq \theta^{1-1} | z_1 - w_1 |,$$

δηλαδή ισχύει η (1).
Έστω ότι η (1) ισχύει για $n = k$. Θα δείξω ότι ισχύει για $n = k + 1$. Πράγματι,

$$| \prod_{m=1}^{k+1} z_m - \prod_{m=1}^{k+1} w_m | = | \prod_{m=1}^{k+1} z_m - z_{k+1} \prod_{m=1}^{k} w_m + z_{k+1} \prod_{m=1}^{k} w_m - \prod_{m=1}^{k+1} w_m |$$

$$\leq | z_{k+1} \prod_{m=1}^{k} z_m - z_{k+1} \prod_{m=1}^{k} w_m | + | z_{k+1} \prod_{m=1}^{k} w_m - w_{k+1} \prod_{m=1}^{k} w_m |$$

$$= | z_{k+1} | \,.\, | \prod_{m=1}^{k} z_m - \prod_{m=1}^{k} w_m | + | \prod_{m=1}^{k} w_m | \,.\, | z_{k+1} - w_{k+1} |$$

$$\leq \theta \, | \prod_{m=1}^{k} z_m - \prod_{m=1}^{k} w_m | + \theta^k \, | z_{k+1} - w_{k+1} | \,.$$

Επειδή από την επαγωγική υπόθεση για $n = k$ έχουμε

$$| \prod_{m=1}^{k} z_m - \prod_{m=1}^{k} w_m | \leq \theta^{k-1} \sum_{m=1}^{k} | z_m - w_m |,$$

συνεπάγεται ότι

$$| \prod_{m=1}^{k+1} z_m - \prod_{m=1}^{k+1} w_m | \leq \theta \, | \prod_{m=1}^{k} z_m - \prod_{m=1}^{k} w_m | + \theta^k \, | z_{k+1} - w_{k+1} |$$

$$\leq \theta . \theta^{k-1} \sum_{m=1}^{k} | z_m - w_m | + \theta^k \, | z_{k+1} - w_{k+1} | = \theta^k \sum_{m=1}^{k+1} | z_m - w_m | \,.$$

Άρα η (1) ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Λημμα 4.2. *Αν* $b \in \mathbb{C}$, *με* $| b | \leq 1$, *τότε*

$$| e^b - (1+b) | \leq | b |^2.$$

Αποδειξη.

$$e^b - (1+b) = (1 + b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + ...) - 1 - b = \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + ...$$

Αν $| b | \leq 1$, τότε $| b |^n \leq | b |^2$, $\forall n \geq 2$ και έχουμε

$$| e^b - (1+b) | = | \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + ... | \leq \frac{| b |^2}{2!} + \frac{| b |^3}{3!} + ...$$

$$\leq \frac{| b |^2}{2}(1 + \frac{2}{3!} + \frac{2}{4!} + ...) \leq \frac{| b |^2}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...) = | b |^2.$$

□

Λημμα 4.3. *Η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί κατανομή Poisson(λ) είναι*

$$\phi_X(t) = \exp[\lambda(e^{it} - 1)], \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Αποδειξη. Για κάθε ακέραιο $k > 0$ έχουμε

$$P[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

γιατί η X έχει κατανομή Poisson(λ).
Άρα,

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k e^{itk}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

Θεωρημα 4.4 (Θεώρημα Σύγκλισης Poisson). *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *έστω* $X_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, *ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με*

$$P[X_{n,m} = 1] = p_{n,m}, \quad P[X_{n,m} = 0] = 1 - p_{n,m}, \quad p_{n,m} \in [0,1] \ \forall n, m.$$

Έστω επίσης ότι

$$\sum_{m=1}^{n} p_{n,m} \xrightarrow{n} \lambda, \quad \lambda > 0 \qquad (a)$$

$$\text{και} \quad \max_{1 \leq m \leq n} p_{n,m} \xrightarrow{n} 0. \qquad (b)$$

Αν $S_n = X_{n,1} + ... + X_{n,n}$, *τότε*

$$S_n \Rightarrow Z,$$

όπου η Z *έχει κατανομή Poisson*(λ), *δηλαδή είναι διακριτή και*

$$P[Z = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \ k = 0, 1, 2, ...$$

Αποδειξη. Οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των $X_{n,m}$ είναι,

$$\phi_{X_{n,m}}(t) = E[e^{itX_{n,m}}] = p_{n,m}e^{it} + (1 - p_{n,m}),\ \forall t \in \mathbb{R},$$

συνεπώς, επειδή για σταθερό $n \in \mathbb{N}$, οι $X_{n,m} \quad 1 \le m \le n$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, έχουμε ότι η χαρακτηριστική της S_n είναι

$$\phi_{S_n}(t) = \phi_{X_{n1}+\ldots+X_{nn}}(t) = \prod_{m=1}^{n} \phi_{n,m}(t) = \prod_{m=1}^{n}(1+p_{n,m}(e^{it}-1)),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ισχύει ότι $Re[e^{it} - 1] = Re[\cos t + i \sin t - 1] = cost - 1$ και άρα

$$Re[e^{it} - 1] \in [-2, 0],\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Έστω $0 \le p \le 1$. Τότε

$$\mid e^{p(e^{it}-1)} \mid = e^{Re[p(e^{it}-1)]} = e^{pRe[e^{it}-1]} \overset{(2)}{\le} 1,\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

και επίσης

$$\mid 1 + p(e^{it} - 1) \mid \le 1,\ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

γιατί

$$\mid 1 + p(e^{it} - 1) \mid = \mid (1 - p) + pe^{it} \mid \le \mid 1 - p \mid + \mid pe^{it} \mid = 1 - p + p = 1.$$

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.1 για $\theta = 1$ και για τους μιγαδίκους

$$z_m = \exp(p_{n,m}(e^{it} - 1)),\ w_m = 1 + p_{n,m}(e^{it} - 1),\ m = 1, ..., n$$

οι οποίοι από (3),(4) έχουν μέτρο ≤ 1 και έχουμε ότι

$$\mid \prod_{m=1}^{n} \exp(p_{n,m}(e^{it}-1)) - \phi_{S_n}(t) \mid = \mid \prod_{m=1}^{n} \exp(p_{n,m}(e^{it}-1)) - \prod_{m=1}^{n}(1+p_{n,m}(e^{it}-1)) \mid$$

$$\le 1^{n-1} \sum_{m=1}^{n} \mid \exp(p_{n,m}(e^{it} - 1)) - (1 + p_{n,m}(e^{it} - 1)) \mid . \tag{5}$$

Έστω $b_{n,m} = p_{n,m}(e^{it} - 1)$. Από την υπόθεση (b) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall n \ge n_0, \quad p_{n,m} \le \frac{1}{2}, \quad \forall 1 \le m \le n$$

και άρα

$$\mid b_{n,m} \mid = \mid p_{n,m}(e^{it} - 1) \mid = \mid p_{n,m} \mid \mid e^{it} - 1 \mid \le 1, \quad \forall n \ge n_0,\ \forall 1 \le m \le n.$$

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.2 για τα $b_{n,m}$ και έχουμε ότι $\forall n \ge n_0$,

$$\sum_{m=1}^{n} \mid \exp(p_{n,m}(e^{it} - 1)) - (1 + p_{n,m}(e^{it} - 1)) \mid \le \sum_{m=1}^{n} {p_{n,m}}^2 \mid e^{it} - 1 \mid^2$$

$$\le 4 \sum_{m=1}^{n} p_{n,m}^2 \le 4 \max_{1 \le m \le n} p_{n,m} \sum_{m=1}^{n} p_{n,m} \xrightarrow{n} 0, \quad \text{λόγω των υποθέσεων (a),(b).}$$

Άρα, από την (5) έχουμε ότι

$$\mid \prod_{m=1}^{n} \exp(p_{n,m}(e^{it}-1)) - \phi_{S_n}(t) \mid \xrightarrow{n} 0, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή,

$$\phi_{S_n}(t) \quad \text{και} \quad \prod_{m=1}^{n} \exp(p_{n,m}(e^{it}-1)),$$

έχουν το ίδιο όριο $\forall t \in \mathbb{R}$.
Από την υπόθεση (a) και λόγω συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης, έχουμε ότι $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\prod_{m=1}^{n} \exp(p_{n,m}(e^{it}-1)) = \exp(\sum_{m=1}^{n} p_{n,m}(e^{it}-1)) \xrightarrow{n} \exp(\lambda(e^{it}-1)).$$

Συνεπώς,

$$\phi_{S_n}(t) \to e^{\lambda(e^{it}-1)}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

όπου $e^{\lambda(e^{it}-1)}$, από το Λήμμα 4.3, είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής Z που έχει κατανομή Poisson(λ) και άρα από το Θεώρημα Συνέχειας των Χαρακτηριστικών Συναρτήσεων έχουμε το ζητούμενο.

□

Το Θεώρημα Σύγκλισης Poisson, ονομάζεται και Ασθενής Νόμος των Μικρών Αριθμών ή Νόμος των Σπανίων Ενδεχομένων, γιατί η κατανομή Poisson εμφανίζεται ως όριο αθροισμάτων ενδεχομένων με μικρές πιθανότητες.

2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ Α.Δ. ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Έστω $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{ni}, \ i = 1, 2, ..., n$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.
Δηλαδή έχουμε,

$$\begin{aligned}
&X_{11} \\
&X_{21}, X_{22} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&X_{n1}, X_{n2} ..., X_{nn} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές που βρίσκονται σε κάθε σειρά, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισόνομες.

Θέτουμε το ερώτημα, αν

$$P[X_{n1} + ... + X_{nn} \leq x] \Rightarrow F(x), \tag{1}$$

ποιες συναρτήσεις κατανομής F μπορούν να εμφανιστούν σαν όριο. Θα δούμε ότι οι συναρτήσεις κατανομής που προκύπτουν ως όριο αυτής της μορφής, είναι ακριβώς οι απεριόριστα διαιρετές συναρτήσεις κατανομής που θα ορίσουμε αμέσως μετά.

i. Το ερώτημα συμπεριλαμβάνει και την περίπτωση των μερικών αθροισμάτων ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, ...$, της μορφής που μελετήσαμε στις Ευσταθείς Κατανομές, γιατι μπορούμε να πάρουμε $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$X_{ni} = \frac{X_i - \frac{a_n}{n}}{b_n},\ i = 1, ..., n,$$
δηλαδή
$$X_{n1} + ... + X_{nn} = \frac{X_1 + ... + X_n - a_n}{b_n},\ a_n \in \mathbb{R}, b_n > 0$$
Αυτό δεν είναι αντίφαση, γιατί θα δούμε ότι οι ευσταθείς κατανομές είναι απεριόριστα διαιρετές.

ii. Η κατανομή Poisson μπορεί να προκύψει ως όριο της πιο πάνω μορφής, αφού αν $\mu > 0$ και πάρουμε $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i = 1, ..., n$
$$X_{ni} = 1 \text{ ή } 0 \quad \text{με πιθανότητες} \quad \frac{\mu}{n},\ 1 - \frac{\mu}{n}, \quad \text{αντίστοιχα,}$$
τότε από το Θεώρημα Σύγκλισης Poisson, έχουμε σύγκλιση της μορφής (1), όπου η οριακή κατανομή είναι Poisson παραμέτρου μ.

Ορισμος 4.5. Μια συνάρτηση κατανομής F καλείται **απεριόριστα διαιρετή**, όταν
$$\forall k \in \mathbb{N},\ k > 1,\ \exists G_k \text{ συνάρτηση κατανομής, τ.ω. } F = {G_k}^{*k}.$$

Ο ορισμός 4.5, από την πρόταση 1.39 είναι ισοδύναμος με τον πιο κάτω ορισμό:

Ορισμος 4.6. Μια συνάρτηση κατανομής F καλείται απεριόριστα διαιρετή, όταν $\forall k \in \mathbb{N},\ k > 1,\ \exists\, G_k$ συνάρτηση κατανομής,
τέτοια ώστε για τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις ϕ_F, ϕ_{G_k}, να ισχύει,
$$\phi_F = {\phi_{G_k}}^k.$$

Συνεπώς, μπορούμε να περάσουμε στον απευθείας ορισμό απεριόριστα διαιρετών χαρακατηριστικών συναρτήσεων:

Ορισμος 4.7. Μια χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ καλείται απεριόριστα διαιρετή, όταν
$$\forall k \in \mathbb{N},\ k > 1,\ \exists\, \phi_k \text{ χαρακτηριστική συνάρτηση, τ.ω. } \phi = {\phi_k}^k.$$

Από τους δύο τελευταίους ορισμούς, μια συνάρτηση κατανομής είναι απεριόριστα διαιρετή αν και μόνο αν η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι απεριόριστα διαιρετή.

Παραδειγμα 4.8. Μια κατανομή μ που έχει όλη τη μάζα της συγκεντρωμένη σε ένα σημείο $a \in \mathbb{R}$, είναι απεριόριστα διαιρετή.

Πράγματι, η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι ίση με

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x) = e^{ita}, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

και άρα $\forall k \in \mathbb{N}, k > 1$

$$\phi(t) = e^{ita} = (e^{it\frac{a}{k}})^k = (\phi_k(t))^k, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

όπου ϕ_k είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας κατανομής που έχει όλη τη μάζα της συγκεντρωμένη στο σημείο $\frac{a}{k}$.

Δηλαδή οι σταθερές τυχαίες μεταβλητές είναι απεριόριστα διαιρετές.

Παραδειγμα 4.9. Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή Poisson(λ), $\lambda > 0$,

$$P[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \ k = 0, 1, 2, ...$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της X από το λήμμα 4.3, είναι

$$\phi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Η κατανομή Poisson(λ) είναι απεριόριστα διαιρετή γιατί,

$$\phi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} = (e^{\frac{\lambda}{k}(e^{it}-1)})^k, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ k > 1,$$

δηλαδή, $\forall k \in \mathbb{N}, k > 1, \ \phi = {\phi_k}^k$, όπου ϕ_k είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής Poisson$(\frac{\lambda}{k})$.

Η κατανομή Poisson(λ) δεν είναι ευσταθής.
Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι είναι ευσταθής.
Τότε από τον ορισμό 3.2 για $n = 2$, υπάρχουν $b_2 \in \mathbb{R}$, $a_2 > 0$, τέτοια ώστε

$$\phi(t)^2 = \phi(a_2 t).e^{ib_2 t}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή,

$$e^{2\lambda(e^{it}-1)} = e^{ib_2 t}.e^{\lambda(e^{ia_2 t}-1)} = \exp[\lambda(i\frac{b_2}{\lambda}t + e^{ia_2 t} - 1)].$$

Συνεπώς,

$$2\lambda(e^{it} - 1) = \lambda(i\frac{b_2}{\lambda}t + e^{ia_2 t} - 1)$$

$$\Rightarrow 2e^{it} - 2 = i\frac{b_2}{\lambda}t + e^{ia_2 t} - 1, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Από την (1) έχουμε ότι

$$\mid i\frac{b_2}{\lambda}t \mid = \mid 2e^{it} - e^{ia_2 t} - 1 \mid \leq 4, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

και άρα $b_2 = 0$, γιατί αν όχι τότε

$$\mid i\frac{b_2}{\lambda}t \mid \to +\infty, \text{ για } t \to +\infty, \quad \text{άτοπο.}$$

Δηλαδή η (1) γίνεται,

$$2e^{it} = e^{ia_2 t} + 1, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

ή ισοδύναμα,

$$2\cos t + 2i\sin t = \cos a_2 t + i\sin a_2 t + 1, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Εξισώνοντας στη (2) τα φανταστικά μέρη, παίρνουμε

$$2\sin t = \sin a_2 t, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Τότε, για $t = \frac{\pi}{2}$, έχουμε

$$2 = \sin\frac{a_2\pi}{2}$$

που είναι άτοπο και συνεπώς η κατανομή Poisson(λ) δεν είναι ευσταθής.

Παράδειγμα 4.10. Έστω $X_1, X_2, ...,$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ.
Έστω επίσης τυχαία μεταβλητή N, που ακολουθεί κατανομή Poisson(λ), $\lambda > 0$ και είναι ανεξάρτητη από τις X_i.
Τότε, η κατανομή της $S \overset{\text{ορ}}{=} X_1 + ... + X_N$, λέγεται Compound Poisson και είναι απεριόριστα διαιρετή.

Σημειώνουμε εδώ, ότι το πλήθος των προσθετέων στη S, διαφέρει για κάθε $\omega \in \Omega$, αναλόγως της τιμής $N(\omega)$.

Θα βρούμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση της S, ϕ_S:

$$\phi_S(t) = E[e^{itS}] = \int_\Omega e^{itS}dp = \int_{\bigcup_{l=0}^\infty [N=l]} e^{itS}dp$$

$$= \sum_{l=0}^\infty \int_{[N=l]} e^{it(X_1+...+X_l)}dp = \sum_{l=0}^\infty \int_\Omega e^{it(X_1+...+X_l)} I_{[N=l]}dp, \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

και επειδή N ανεξάρτητη από τις $X_i, \ i \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{l=0}^\infty \int_\Omega e^{it(X_1+...+X_l)} I_{[N=l]}dp = \sum_{l=0}^\infty (\int_\Omega I_{[N=l]}dp \, . \int_\Omega e^{it(X_1+...+X_l)}dp)$$

$$= \sum_{l=0}^\infty P[N=l].E[e^{it(X_1+...+X_l)}] = \sum_{l=0}^\infty P[N=l].\phi(t)^l, \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

όπου η τελευταία ισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι οι $X_i, \ i \in \mathbb{N}$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.

Από (1) και (2) και επειδή η N ακολουθεί κατανομή Poisson(λ), έχουμε ότι

$$\phi_S(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^l}{l!}\phi(t)^l = e^{-\lambda}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\lambda\phi(t))^l}{l!} = e^{-\lambda}e^{\lambda\phi(t)},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή η χαρακτηριστική συνάρτηση της S είναι:

$$\phi_S(t) = e^{\lambda(\phi(t)-1)},\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Έστω $k > 1$.
Αν πάρουμε την ίδια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, ...$ με πιο πάνω και τυχαία μεταβλητή N_k που είναι ανεξάρτητη με τις X_i και ακολουθεί Poisson($\frac{\lambda}{k}$), από τα προηγούμενα, έχουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της $S_k \overset{\text{ορ}}{=} X_1 + ... + X_{N_k}$ είναι:

$$\phi_{S_k}(t) = e^{\frac{\lambda}{k}(\phi(t)-1)},\ \forall t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή ισχύει

$$\phi_S = \phi_{S_k}^k$$

και συνεπώς η κατανομή της S είναι απεριόριστα διαιρετή.

Πρόταση 4.11. *Κάθε ευσταθής νόμος είναι απεριόριστα διαιρετός.*

Απόδειξη. Έστω F ευσταθής συνάρτηση κατανομής και έστω $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.
Τότε από την πρόταση 3.4,

$$\exists\, a_k > 0, b_k \in \mathbb{R} \quad \text{τ.ω.} \quad F^{*k}(x) = F(\frac{x - b_k}{a_k}),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

και άρα

$$F(x) = F^{*k}(a_k x + b_k),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Αν $X_1, ..., X_k$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής F, τότε η (1) μας δίνει ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει,

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X_1 + ... + X_k \leq a_k x + b_k) \\ &= P\left(\frac{X_1 - \frac{b_k}{k}}{a_k} + ... + \frac{X_k - \frac{b_k}{k}}{a_k} \leq x\right) \end{aligned} \tag{2}$$

όπου $\frac{X_i - \frac{b_k}{k}}{a_k}, i = 1, ..., k$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με συνάρτηση κατανομής

$$P\left(\frac{X_i - \frac{b_k}{k}}{a_k} \leq x\right) = P\left(X_i \leq a_k x + \frac{b_k}{k}\right) = F(a_k x + \frac{b_k}{k}),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η (2) γίνεται

$$F(t) = F(a_k x + \frac{b_k}{k})^{*k}(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

και άρα η συνάρτηση κατανομής F είναι απεριόριστα διαιρετή, γιατί για το τυχαίο $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, υπάρχει συνάρτηση κατανομής $G_k \overset{\text{ορ}}{=} F(a_k x + \frac{b_k}{k})$, τέτοια ώστε $F = G_k^{*k}$. □

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ Α.Δ. ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Πρόταση 4.12. *Έστω F συνάρτηση κατανομής απεριόριστα διαιρετή. Τότε αν G συνάρτηση κατανομής του ίδιου τύπου με την F, $G \sim F$, η G είναι επίσης απεριόριστα διαιρετή.*

Απόδειξη. Επειδή $G \sim F$, υπάρχουν $a > 0, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$G(x) = F(ax + b), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Έστω $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Επειδή F απεριόριστα διαιρετή, υπάρχει F_k συνάρτηση κατανομής τέτοια ώστε

$$F(x) = {F_k}^{*k}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι,

$$G(x) = {F_k}^{*k}(ax + b), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή αν $X_1, ..., X_k$, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής F_k, ισχύει

$$G(x) = {F_k}^{*k}(ax + b) = P[X_1 + ... + X_k \leq ax + b], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$G(x) = P\left(\frac{X_1 - \frac{b}{k}}{a} + ... + \frac{X_k - \frac{b}{k}}{a} \leq x\right), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

όπου $\frac{X_i - \frac{b}{k}}{a}, i = 1, ..., k.$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής

$$G_k(x) = P\left(\frac{X_i - \frac{b}{k}}{a} \leq x\right) = P\left(X_i \leq ax + \frac{b}{k}\right) = F_k(ax + \frac{b}{k}), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

και άρα

$$G(x) = {G_k}^{*k}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή για το τυχαίο $k \in \mathbb{N}, k > 1$, υπάρχει συνάρτηση κατανομής G_k τέτοια ώστε $G = G^{*k}$, συνεπώς η G είναι απεριόριστα διαιρετή.

□

Δηλαδή η απεριόριστη διαιρετότητα, είναι ιδιότητα των κλάσεων ισοδυναμίας συναρτήσεων κατανομής (ως προς τη σχέση ισοδυναμίας " $\sim$ ")

Θεωρημα 4.13. *Έστω F συνάρτηση κατανομής. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

i. *Η F είναι απεριόριστα διαιρετή.*
ii. *Υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές X_{nm}, $1 \leq m \leq n$, $n, m \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$, X_{nm}, $1 \leq m \leq n$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και αν $S_n = X_{n1} + ... + X_{nn}$, ισχύει*
$$P[S_n \leq x] \Rightarrow F(x). \tag{1}$$

Αποδειξη. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Έστω ότι η F είναι απεριόριστα διαιρετή συνάρτηση κατανομής.
Τότε $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$, $\exists\, G_n$ συνάρτηση κατανομής, τέτοια ώστε
$$F = {G_n}^{*n}.$$
Αν X_{nm}, $m = 1, ..., n$, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής G_n, ισχύει
$$F(x) = P[X_{n1} + ... + X_{nn} \leq x] = P[S_n \leq x],\ \forall x \in \mathbb{R}.$$
Δηλαδή υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές X_{nm}, $1 \leq m \leq n$, $n, m \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$, X_{nm}, $1 \leq m \leq n$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με συνάρτηση κατανομής G_n και ισχύει
$$P[S_n \leq x] = F(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > 1$$
και άρα
$$P[S_n \leq x] \Rightarrow F(x).$$
"$(ii) \Rightarrow (i)$" Έστω ότι ισχύει η (ii). Θα δείξουμε ότι η F έχει k-ρίζα ως προς τη συνέλιξη, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.
Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.
Θεωρούμε την υπακολουθία $n' = l.k, l = 1, 2, ...$
Συμβολισμός
$$X_{nm} \overset{\text{ορ}}{=} X_m^n.$$
Έστω $Y_m^l = X_{l(m-1)+1}^{lk} + ... + X_{lm}^{lk}$, $m = 1, ..., k$, δηλαδή,
$$Y_1^l = X_1^{lk} + ... + X_l^{lk}$$
$$Y_2^l = X_{l+1}^{lk} + ... + X_{2l}^{lk}$$
$$................................$$
$$Y_k^l = X_{l(k-1)+1}^{lk} + ... + X_{lk}^{lk}$$
Τότε
$$S_{lk} = X_1^{lk} + ... + X_{lk}^{lk} = Y_1^l + ... + Y_k^l \tag{2}$$
όπου Y_m^l είναι ανεξαρτητές και ισονομές με κοινή συνάρτηση κατανομής
$$F_{lk}(x) = P[Y_m^l \leq x],\ \forall x \in \mathbb{R},\ m = 1, ..., k.$$
Αν δείξουμε ότι $F_{lk} \Rightarrow G_k$, όπου G_k συνάρτηση κατανομής, έστω και για υπακολουθία l' της $(l)_{l \in \mathbb{N}}$,
επειδή από τη (2) έχουμε ότι
$$P[S_{l'k} \leq x] = F_{l'k}^{*k}(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

από την (1) της υπόθεσης έχουμε ότι

$$P[S_{l'k} \leq x] \Rightarrow F(x)$$

και από το λήμμα 3.26

$$F_{l'k}^{*k} \Rightarrow G_k^{*k},$$

λόγω μοναδικότητας του ασθενούς ορίου, θα έχουμε ότι

$$F = G_k^{*k}$$

δηλαδή η F είναι απεριόριστα διαιρετή.

Άρα από το θεώρημα 1.15 αρκεί να δείξουμε ότι η οικογένεια των κατανομών των Y_1^l, $l = 1, 2, ...,$ $\mathcal{M} = \{\mu_{Y_1^l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ είναι tight οικογένεια μέτρων πιθανότητας.

Έστω προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $\mathcal{M}$ δεν είναι *tight*.
Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$, τέτοιο ώστε $\forall J$ φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$,
$\exists\, \mu \in \mathcal{M}$, με

$$\mu(J) \leq 1 - \epsilon$$

Έστω J φραγμένο διάστημα στο $\mathbb{R}$.
Τότε η οικογένεια $\mathcal{M}'$ των μέτρων $\mu \in \mathcal{M}$ για τα οποία ισχύει

$$\mu(J) \leq 1 - \epsilon$$

δεν μπορεί να είναι πεπερασμένη.
Πράγματι, αν είναι πεπερασμένη, επειδή κάθε πεπερασμένη οικογένεια μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ είναι *tight*, μπορώ να βρω J' φραγμένο διάστημα τέτοιο ώστε

$$\forall \mu \in \mathcal{M}',\ \mu(J') > 1 - \epsilon$$

Τότε όμως μπορώ να βρω J'' φραγμένο διάστημα, που να είναι υπερσύνολο των J, J' και άρα $\forall \mu \in \mathcal{M}$,
αν $\mu \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}'$,

$$\mu(J'') \geq \mu(J) > 1 - \epsilon$$

ενώ αν $\mu \in \mathcal{M}'$,

$$\mu(J'') \geq \mu(J') > 1 - \epsilon$$

Δηλαδή,

$$\forall \mu \in \mathcal{M}, \quad \mu(J'') > 1 - \epsilon$$

και άρα η $\mathcal{M}$ είναι *tight*, που είναι άτοπο, αφού υπέθεσα ότι $\mathcal{M}$ δεν είναι *tight*.
Άρα αν $\mathcal{M}$ δεν είναι *tight*, $\exists \epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\forall J$ φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$, υπάρχουν άπειρα $\mu \in \mathcal{M}$ με

$$\mu(J) \leq 1 - 2\epsilon$$

Έστω $M > 0$, τέτοιο ώστε $kM, -kM$, είναι σημεία συνέχειας της F.
Από τα προηγούμενα, υπάρχει υπακολουθία l' της $(l)_{l \in \mathbb{N}}$, τέτοια ώστε

$$\forall l',\ \mu_{Y_1^{l'}}[-M, M] \leq 1 - 2\epsilon$$

ή ισοδύναμα

$$\forall l', \quad P[\mid Y_1^{l'} \mid > M] = \mu_{Y_1^{l'}}[(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)] \geq 2\epsilon > \epsilon$$

Τότε υπάρχει l'' υπακολουθία της l', τέτοια ώστε

$$\text{ή} \quad P[Y_1^{l''} > M] > \frac{\epsilon}{2}, \ \forall l'', \qquad (a)$$

$$\text{ή} \quad P[Y_1^{l''} < -M] > \frac{\epsilon}{2}, \ \forall l''. \qquad (b)$$

Στην περίπτωση (a) επειδή για σταθερό l'', οι $Y_m^{l''}$, $m = 1, ..., k$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, έχουμε

$$P[Y_1^{l''} + ... + Y_k^{l''} > kM] \geq P[(Y_1^{l''} > M) \cap ... \cap (Y_k^{l''} > M)]$$

$$= \prod_{m=1}^{k} P[Y_m^{l''} > M] \overset{(a)}{>} (\frac{\epsilon}{2})^k, \quad \forall l''$$

και άρα

$$P[S_{l''k} \leq kM] = P[Y_1^{l''} + ... + Y_k^{l''} \leq kM] < 1 - (\frac{\epsilon}{2})^k, \ \forall l''. \qquad (3)$$

Από την (1) της υπόθεσης, επειδή kM σημείο συνέχειας της F, ισχύει

$$P[S_{l''k} \leq kM] \to F(kM), \ \text{για} \quad l'' \to +\infty$$

και από την (3) έπεται ότι

$$F(kM) \leq 1 - (\frac{\epsilon}{2})^k \qquad (4)$$

Παρόμοια, στην περίπτωση (b) έχουμε

$$P[S_{l''k} \leq -kM] = P[Y_1^{l''} + ... + Y_k^{l''} \leq -kM] \geq P[(Y_1^{l''} < -M) \cap ... \cap (Y_k^{l''} < -M)]$$

$$= P[Y_1^{l''} < -M]^k > (\frac{\epsilon}{2})^k, \quad \forall l''. \qquad (5)$$

Από την (1) της υπόθεσης, επειδή $-kM$ σημείο συνέχειας της F, ισχύει

$$P[S_{l''k} \leq -kM] \to F(-kM), \ \text{για} \quad l'' \to +\infty$$

και από την (5) έπεται ότι

$$F(-kM) \geq (\frac{\epsilon}{2})^k \qquad (6)$$

Επειδή η F είναι συνάρτηση κατανομής και άρα έχει αριθμήσιμα σημεία ασυνέχειας, μπορώ να επιλέξω $M_n, n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$, kM_n, $-kM_n$ είναι σημεία συνέχειας της F και $M_n \xrightarrow{n} +\infty$.
Τότε από $(a), (b)$, (4) και (6) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει
ή

$$F(kM_n) \leq 1 - (\frac{\epsilon}{2})^k$$

ή

$$F(-kM_n) \geq (\frac{\epsilon}{2})^k$$

και άρα υπάρχει υπακολουθία (n') με $M_{n'} \xrightarrow{n'} +\infty$, τέτοια ώστε
ή

$$F(kM_{n'}) \leq 1 - (\frac{\epsilon}{2})^k,\ \forall n'$$

ή

$$F(-kM_{n'}) \geq (\frac{\epsilon}{2})^k,\ \forall n'.$$

Άρα η F δεν είναι συνάρτηση κατανομής γιατί ή για $x \to +\infty$ δεν τείνει στο 1, ή για $x \to -\infty$ δεν τείνει στο 0.
Αυτό όμως είναι άτοπο, συνεπώς $\mathcal{M}$ είναι *tight*. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.14. *Η κατανομή του αθροίσματος πεπερασμένων, ανεξάρτητων, απεριόριστα διαιρετών τυχαίων μεταβλητών, είναι απεριόριστα διαιρετή.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να το δείξουμε για το άθροισμα 2 ανεξάρτητων, απεριόριστα διαιρετών τυχαίων μεταβλητών.
Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F, G αντίστοιχα, που είναι απεριόριστα διαιρετές.
Έστω $\phi_{X_1} = \phi_F$ και $\phi_{X_2} = \phi_G$, οι χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις.
Επειδή F, G απεριόριστα διαιρετές, $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 1$, υπάρχουν συναρτήσεις κατανομής F_n, G_n τέτοιες ώστε

$$\phi_F = (\phi_{F_n})^n \quad \text{και} \quad \phi_G = (\phi_{G_n})^n \tag{1}$$

Τότε, αν $\phi_{X_1+X_2}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής $X_1 + X_2$, λόγω ανεξαρτησίας έχουμε ότι

$$\phi_{X_1+X_2} = \phi_{X_1}.\phi_{X_2} = \phi_F.\phi_G$$

Από την (1) έχουμε, $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 1$,

$$\phi_{X_1+X_2} = (\phi_{F_n})^n.(\phi_{G_n})^n = (\phi_{F_n}.\phi_{G_n})^n = (\phi_{F_n * G_n})^n,$$

και συνεπώς η χαρακτηριστική συνάρτηση της $X_1 + X_2$ είναι απεριόριστα διαιρετή και άρα ισοδύναμα, η κατανομή της $X_1 + X_2$ είναι απεριόριστα διαιρετή. □

Να σημειώσουμε ότι εν γένει η κατανομή του αθροίσματος πεπερασμένων, ανεξάρτητων, μη ισόνομων, ευσταθών κατανομών, δεν είναι ευσταθής.
Για παράδειγμα, έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες με κατανομή συμμετρική ευσταθή.
Τότε οι χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις είναι

$$\phi_{X_1}(t) = e^{-c_1|t|^{a_1}},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \text{όπου}\ \ c_1 > 0,\ a_1 \in (0, 2],$$

και

$$\phi_{X_2}(t) = e^{-c_2|t|^{a_2}},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \text{όπου}\ \ c_2 > 0,\ a_2 \in (0, 2].$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της $X_1 + X_2$ είναι λόγω ανεξαρτησίας,

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \phi_{X_1}(t).\phi_{X_2}(t) = e^{-(c_1|t|^{a_1}+c_2|t|^{a_2})},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Η $\phi_{X_1+X_2}$ είναι πραγματική και άρα η κατανομή της $X_1 + X_2$ είναι συμμετρική, αλλά εν γένει, δεν είναι χαρακτηριστική συνάρτηση συμμετρικής ευσταθούς κατανομής, αφού αν $a_1 \neq a_2$ δεν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\phi(t) = e^{-c|t|^a},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \text{όπου } c > 0,\ a \in (0, 2]$$

που είδαμε στο θεώρημα 3.19 ότι είναι η γενική μορφή των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των συμμετρικών ευσταθών κατανομών.

Πρόταση 4.15. *Αν η κατανομή μ είναι το ασθενές όριο μιας ακολουθίας από απεριόριστα διαιρετές κατανομές, τότε μ είναι επίσης απεριόριστα διαιρετή.*

Απόδειξη. Έστω $\mu_n \Rightarrow \mu$, όπου $(\mu_n)_n$ είναι ακολουθία απεριόριστα διαιρετών κατανομών.
Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε, επειδή μ_n είναι απεριόριστα διαιρετή κατανομή, αν F_n η συνάρτηση κατανομής της μ_n, υπάρχει συνάρτηση κατανομής G_n, τέτοια ώστε

$$F_n = G_n^{*n} \tag{1}$$

Θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $X_i^n,\ 1 \leq i \leq n$, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με συνάρτηση κατανομής G_n, δηλαδή τη n-οστή ρίζα της F_n, ως προς τη συνέλιξη.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$P[X_1^n + ... + X_n^n \leq x] = G_n^{*n}(x) \overset{(1)}{=} F_n(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Από την υπόθεση $\mu_n \Rightarrow \mu$ και άρα αν F η συνάρτηση κατανομής της μ, ισχύει

$$F_n \Rightarrow F \tag{3}$$

Από (2) και (3) έχουμε ότι,

$$P[X_1^n + ... + X_n^n \leq x] \Rightarrow F(x)$$

και συνεπώς, από το θεώρημα 4.13, αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
$X_i^n,\ 1 \leq i \leq n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, έχουμε ότι η F είναι απεριόριστα διαιρετή. □

Λήμμα 4.16. *Αν ψ, πραγματική χαρακτηριστική συνάρτηση, ισχύει η ανισότητα*

$$1 - \psi(2t) \leq 4(1 - \psi(t)),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{$\star$}$$

Απόδειξη. Έστω μ η (συμμετρική) κατανομή που αντιστοιχεί στη χαρακτηριστική συνάρτηση ψ.
Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$1 - \psi(2t) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2tx)\, d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos(2tx))\, d\mu(x)$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(tx)\, d\mu(x) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} (1-\cos^2(tx))\, d\mu(x)$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} (1-\cos(tx))(1+\cos(tx))\, d\mu(x) \leq 4\int_{-\infty}^{+\infty} (1-\cos(tx))\, d\mu(x)$$

$$= 4(1-\psi(t))$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.17. *Η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας απεριόριστα διαιρετής κατανομής, δε μηδενίζεται πουθενά.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ϕ, η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας απεριόριστα διαιρετής κατανομής, δηλαδή ϕ απεριόριστα διαιρετή χαρακτηριστική συνάρτηση.
Τότε η $|\ \phi\ |^2$, είναι επίσης απεριόριστα διαιρετή.
Πράγματι, επειδή ϕ απεριόριστα διαιρετή, για κάθε $k \in \mathbb{N},\ k > 1$ υπάρχει συνάρτηση κατανομής G_k, τέτοια ώστε

$$\phi = \phi_{G_k}^k$$

Έστω $k \in \mathbb{N},\ k > 1$. Τότε,

$$|\ \phi\ |^2 = |\ \phi_{G_k}^k\ |^2 = (|\ \phi_{G_k}\ |^2)^k, \tag{1}$$

όπου η $|\ \phi_{G_k}\ |^2$, από την πρόταση 3.30, είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της συνέλιξης $G_k * G_k^-$.

Άρα πράγματι, η $|\ \phi\ |^2$ είναι απεριόριστα διαιρετή χαρακτηριστική συνάρτηση και παρατηρούμε ότι μηδενίζεται στα ίδια ακριβώς σημεία με τη ϕ.

Θέτουμε

$$\psi = |\ \phi\ |^2$$

και

$$\psi_k = |\ \phi_{G_k}\ |^2$$

Από την (1), η ψ_k είναι η k-ρίζα της ψ.

Επειδή $\psi(0) = 1$, και ψ συνεχής, ως χαρακτηριστική συνάρτηση,

$$\exists \epsilon > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \psi(t) > 0,\ \forall t \in [-\epsilon, \epsilon]$$

Επειδή $\forall k \in \mathbb{N},\ k > 1$, ισχύει

$$\psi_k(t)^k = \psi(t) > 0,\ \forall t \in [-\epsilon, \epsilon], \tag{2}$$

έχουμε ότι

$$\psi_k(t) \xrightarrow{k} 1,\ \forall t \in [-\epsilon, \epsilon]. \tag{3}$$

Πράγματι, έστω προς απαγωγή σε άτοπο, ότι δεν ισχύει η (3).
Τότε υπάρχει $t_0 \in [-\epsilon, \epsilon]$ και υπακολουθία k', τέτοια ώστε

$$\psi_{k'}(t_0) \xrightarrow{k'} c,\ c \neq 1$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}, k > 1$, η ψ_k είναι εξορισμού μη αρνητική συνάρτηση και είναι άνω φραγμένη από το 1, ως χαρακτηριστική συνάρτηση, άρα $c \in [0,1)$. Τότε όμως $\psi_{k'}(t_0)^{k'} \to 0$, που είναι άτοπο από τη (2).

Επίσης, ψ_k είναι πραγματική χαρακτηριστική συνάρτηση και άρα ικανοποιεί την ανισότητα $(\star)$ του προηγούμενου λήμματος.
Συνεπώς, έχουμε

$$0 \le 1 - \psi_k(2t) \overset{(\star)}{\le} 4(1-\psi_k(t)) \overset{(3)}{\to} 0, \ \forall t \in [-\epsilon, \epsilon]$$
$$\Rightarrow \psi_k(2t) \xrightarrow{k} 1, \ t \in [-\epsilon, \epsilon]$$
$$\Rightarrow \psi_k(t) \xrightarrow{k} 1, \ t \in [-2\epsilon, 2\epsilon]$$

και επειδή αυτή η διαδικασία του διπλασιασμού του διαστήματος σύγκλισης, μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές θέλουμε, τελικά έχουμε ότι

$$\psi_k(t) \xrightarrow{k} 1, \ t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Έστω ότι υπάρχει $t_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\phi(t_0) = 0$.
Τότε

$$\psi(t_0) = \mid \phi(t_0) \mid^2 = 0$$

επομένως από την (1)

$$\psi_k(t_0)^k = \psi(t_0) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}, k > 1$$
$$\Rightarrow \psi_k(t_0) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}, k > 1$$

που είναι άτοπο, γιατί από (4)

$$\psi_k(t_0) \xrightarrow{k} 1$$

□

Θεωρημα 4.18. *Μια κατανομή μ είναι απεριόριστα διαιρετή, αν και μόνο αν, μ είναι το ασθενές όριο ακολουθίας από Compound Poisson κατανομές.*

Αποδειξη. " $\Rightarrow$ " Έστω μ είναι μια απεριόριστα διαιρετή κατανομή και έστω ϕ η χαρακτηριστική της συνάρτηση.
Τότε εξ ορισμού $\forall k \in \mathbb{N}, \ k > 1$, υπάρχει συνάρτηση κατανομής G_k τέτοια ώστε

$$\phi_{G_k}^k = \phi \tag{1}$$

Επειδή ϕ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση απεριόριστα διαιρετής κατανομής, από την πρόταση 4.17, η ϕ δεν μηδενίζεται πουθενά και άρα ορίζεται ο μιγαδικός της λογάριθμός,

$$\log \phi(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$k(\phi_{G_k}(t) - 1) \xrightarrow{k} \log \phi(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$k(\phi_{G_k}(t)-1) \overset{(1)}{=} k(\phi(t)^{\frac{1}{k}}-1) = k(e^{\frac{1}{k}\log\phi(t)}-1)$$

$$= k\left(1+\frac{1}{k}\log\phi(t)+\frac{1}{k^2}\frac{\log^2\phi(t)}{2!}+\frac{1}{k^3}\frac{\log^3\phi(t)}{3!}+...-1\right)$$

$$= \log\phi(t)+\frac{1}{k}\frac{\log^2\phi(t)}{2!}+\frac{1}{k^2}\frac{\log^3\phi(t)}{3!}+... \tag{2}$$

Επειδή $\forall t \in \mathbb{R}$, υπάρχει $M_t > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mid \frac{\log^m\phi(t)}{m!} \mid \leq M_t,\ \forall m \in \mathbb{N},\ m>1,$$

έχουμε ότι $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$0 \ \leq \mid \frac{1}{k}\frac{\log^2\phi(t)}{2!}+\frac{1}{k^2}\frac{\log^3\phi(t)}{3!}+... \mid$$

$$\leq \mid \frac{1}{k}\frac{\log^2\phi(t)}{2!} \mid + \mid \frac{1}{k^2}\frac{\log^3\phi(t)}{3!} \mid +...$$

$$\leq \ M_t(\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+...) = M_t\frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{k}} = \frac{M_t}{k-1} \xrightarrow{k} 0$$

και συνεπώς,

$$\frac{1}{k}\frac{\log^2\phi(t)}{2!}+\frac{1}{k^2}\frac{\log^3\phi(t)}{3!}+... \xrightarrow{k} 0,\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Από (2) και (3) έχουμε ότι πράγματι

$$k(\phi_{G_k}(t)-1) \xrightarrow{k} \log\phi(t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Λόγω της συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης, η (4) μας δίνει ότι

$$\phi(t) = \lim_{k\to\infty} e^{k(\phi_{G_k}(t)-1)},\ \forall t \in \mathbb{R},$$

όπου, όπως είδαμε στο παράδειγμα 4.10, $e^{k(\phi_{G_k}(t)-1)}$, είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της Compound Poisson κατανομής που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή

$$S_k = X_1+...+X_N,$$

όπου $X_1, X_2, ...$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που έχουν συνάρτηση κατανομής G_k και N τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Poisson(k). Συνεπώς, από το Θεώρημα Συνέχειας των Χαρακτηριστικών Συναρτήσεων, μ είναι το ασθενές όριο Compound Poisson κατανομών.

" $\Leftarrow$ " Έχουμε δει στο παράδειγμα 4.10 ότι οι Compound Poisson κατανομές, είναι απεριόριστα διαιρετές.
Αν μ είναι το ασθενές όριο Compound Poisson κατανομών, τότε μ είναι το ασθενές όριο απεριόριστα διαιρετών κατανομών και άρα από την πρόταση 4.15 είναι απεριόριστα διαιρετή κατανομή. □

4. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ Α.Δ. ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.19. Μια συνάρτηση F, ονομάζεται συνάρτηση κατανομής πεπερασμένου μέτρου, αν είναι άυξουσα, δεξιά συνεχής και ισχύει

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = M, \ M > 0.$$

Όπως και στην περίπτωση των μέτρων πιθανότητας, κάθε συνάρτηση κατανομής πεπερασμένου μέτρου, αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό πεπερασμένο μέτρο στο $\mathbb{R}$.
Αν μ πεπερασμένο μέτρο στο $\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση κατανομής του, F, δίνεται από τη σχέση

$$F(x) = \mu(-\infty, x], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Αντίστροφα, αν F συνάρτηση κατανομής ενός πεπερασμένου μέτρου μ, τότε το μέτρο μ δίνεται από τη σχέση

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a), \ \forall a < b \in \mathbb{R}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.20. Έστω $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συναρτήσεων κατανομής πεπερασμένου μέτρου και F συνάρτηση κατανομής πεπερασμένου μέτρου. Θα λέμε ότι η F_n **συγκλίνει ασθενώς** στην F και θα συμβολίζουμε

$$F_n \Rightarrow F$$

όταν

$$F_n(x) \xrightarrow{n} F(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ σημείο συνέχειας της } F.$$

Αποδεικνύεται ότι ο τελευταίος ορισμός είναι ισοδύναμος με τον εξής ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.21. Έστω $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συναρτήσεων κατανομής πεπερασμένου μέτρου και F συνάρτηση κατανομής πεπερασμένου μέτρου. Θα λέμε ότι η F_n συγκλίνει ασθενώς στην F και θα συμβολίζουμε

$$F_n \Rightarrow F$$

όταν

$$\int_{\mathbb{R}} f\, dF_n(x) \xrightarrow{n} \int_{\mathbb{R}} f\, dF(x), \text{ για κάθε } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ συνεχή και φραγμένη.}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.22. *Έστω $(G_n)_n$ ακολουθία συναρτήσεων κατανομής πεπερασμένων μέτρων, τέτοια ώστε:*

(i) $\exists M > 0$, *τέτοιο ώστε*

$$\lim_{x\to+\infty} G_n(x) < M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii)

$$\lim_{x\to-\infty} G_n(x) = 0, \text{ ομοιόμορφα ως προς } n.$$

Τότε υπάρχει G, συνάρτηση κατανομής πεπερασμένου μέτρου και υπακολουθία $(G_{n_k})_k$ της $(G_n)_n$, τέτοια ώστε

$$G_{n_k} \Rightarrow G$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση (i), έχουμε ότι

$$\forall n \in \mathbb{N},\ G_n : \mathbb{R} \to [0, M]$$

και επίσης γνωρίζουμε ότι οι G_n είναι άυξουσες $\forall n \in \mathbb{N}$, αφού είναι συναρτήσεις κατανομής.
Συνεπώς, από το Θεώρημα Helly, έχουμε ότι υπάρχει

$$G : \mathbb{R} \to [0, M]$$

αύξουσα και δεξιά συνεχής και υπακολουθία $(G_{n_k})_k$ τέτοια ώστε

$$G_{n_k}(x) \xrightarrow{k} G(x),\ \forall x \text{ σημείο συνέχειας της } G. \tag{1}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι η G είναι συνάρτηση κατανομής πεπερασμένου μέτρου.
Ήδη γνωρίζουμε ότι η G είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής.
Επειδή η G είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το M, έχουμε ότι υπάρχει $0 \leq M' \leq M$, τέτοιο ώστε

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = M'$$

Άρα μένει να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to -\infty} G(x) = 0$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε από την υπόθεση (ii), υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$G_{n_k}(x_0) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall x < x_0,\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Έστω $x < x_0$, σημείο συνέχειας της G. Τότε από (1) και (2)

$$G(x) \overset{(1)}{=} \lim_k G_{n_k}(x) \overset{(2)}{\leq} \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

επομένως

$$G(x) < \epsilon, \quad \forall x < x_0 \text{ σημείο συνέχειας της } G. \tag{3}$$

Τότε, επειδή η G είναι αύξουσα, η (3) συνεπάγεται ότι

$$G(x) < \epsilon,\ \forall x < x_0.$$

Πράγματι, έστω $x_1 < x_0$ τέτοιο ώστε $G(x_1) \geq \epsilon$.
Επειδή η G είναι αύξουσα, τα σημεία συνέχειας της είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$ και άρα υπάρχει x_2 σημείο συνέχειας της G, τέτοιο ώστε $x_1 < x_2 < x_0$.
Τότε,

$$\epsilon \leq G(x_1) \leq G(x_2) \leq G(x_0)$$

Δηλαδή,

$$G(x_2) \geq \epsilon$$

που είναι άτοπο από (3). □

Λημμα 4.23. *Για κάθε* $|u| < 1$, *ισχύει*

$$f(u) \overset{\text{ορ}}{=} \frac{1-\cos u}{u^2} > \frac{1}{3}$$

όπου στο $u = 0$ *θεωρούμε ότι*

$$f(0) = \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$$

Αποδειξη. Επειδή f άρτια, αρκεί να δείξουμε την ανισότητα για $u \in [0,1]$.
Δείχνουμε πρώτα ότι στο $[0,1]$ η f είναι φθίνουσα.
Πράγματι,

$$f(u) = \frac{1-\cos u}{u^2} = \frac{1-1+\frac{u^2}{2!}-\frac{u^4}{4!}+\frac{u^6}{6!}-...}{u^2}$$
$$= \frac{1}{2!} - \frac{u^2}{4!} + \frac{u^4}{6!} - \frac{u^6}{8!} + ...,\ \forall u \in [0,1].$$

Παραγωγίζουμε ως προς u και έχουμε

$$f'(u) = -\frac{2u}{4!} + \frac{4u^3}{6!} - \frac{6u^5}{8!} + \frac{8u^7}{10!} - ...,\ \forall u \in [0.1] \qquad (1)$$

Επειδή

$$\frac{4u^3}{6!} + \frac{8u^7}{10!} + \frac{12u^{11}}{14!} + ... \le (\frac{4}{6!} + \frac{8}{10!} + \frac{12}{14!} + ...)u,\ \forall u \in [0,1]$$

και επίσης

$$\frac{k}{(k+2)!} \le \frac{1}{2^k},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

έχουμε ότι

$$\frac{4u^3}{6!} + \frac{8u^7}{10!} + \frac{12u^{11}}{14!} + ... \le (\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} + ...)u$$
$$= \frac{\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2^4}}u = \frac{u}{15},\ \forall u \in [0,1] \qquad (2)$$

Συνεπώς, από (1) και (2) έχουμε ότι

$$f'(u) \le (-\frac{2u}{4!} - \frac{6u^5}{8!} - \frac{10u^9}{12!} - ...) + \frac{u}{15} \le -\frac{2u}{4!} + \frac{u}{15} = u(\frac{1}{15} - \frac{1}{12}) \le 0,\ \forall u \in [0,1]$$

και άρα f είναι φθίνουσα στο $[0,1]$.

Επειδή $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 1 - \cos 1 > \frac{1}{3}$ και η f είναι φθίνουσα στο $[0,1]$, έχουμε ότι

$$\forall u \in [0,1], \quad f(0) = \frac{1}{2} \ge \frac{1-\cos u}{u^2} \ge f(1) > \frac{1}{3}$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.24 (Lévy-Khinchin Formula). *Μια συνάρτηση* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας απεριόριστα διαιρετής κατανομής, αν και μόνο αν,*

$$\log \phi(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} dG(u),\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

όπου $\gamma \in \mathbb{R}$, G *άυξουσα και φραγμένη και η προς ολοκλήρωση ποσότητα στο* $u = 0$ *είναι*

$$[(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2})\frac{i+u^2}{u^2}]_{u=0} = \frac{-t^2}{2},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. " $\Rightarrow$ " Έστω F απεριόριστα διαιρετή συνάρτηση κατανομής και ϕ η χαρακτηριστική της συνάρτηση.
Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$, υπάρχει συνάρτηση κατανομής F_n, τέτοια ώστε για τη χαρακτηριστική της συνάρτηση, ϕ_n, ισχύει

$$\phi = \phi_n^n$$

Από την πρόταση 4.17, $\phi(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$ και άρα ορίζεται ο μιγαδικός λογάριθμος $\log \phi(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$.
Επίσης, έχουμε δει στην απόδειξη του θεωρήματος 4.18, ότι

$$n(\phi_n(t) - 1) \xrightarrow{n} \log \phi(t),\ \forall t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή

$$n \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1) dF_n(x) \xrightarrow{n} \log \phi(t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Έστω μ_n οι κατανομές που αντιστοιχούν στις F_n.
Θέτουμε,

$$\nu_n(A) = n \int_A \frac{x^2}{1+x^2} d\mu_n(x),\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (3)$$

Η $\frac{nx^2}{1+x^2}$ είναι συνεχής και άρα μετρήσιμη στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Επίσης είναι ολοκληρώσιμη αφού

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{nx^2}{1+x^2} d\mu_n(x) \leq \int_{\mathbb{R}} n\, d\mu_n(x) = n$$

και μη αρνητική, άρα $\forall n \in \mathbb{N}$, το ν_n είναι πεπερασμένο μέτρο στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, με πυκνότητα $\frac{nx^2}{1+x^2}$ ως προς το μ_n.
Αν G_n οι συναρτήσεις κατανομής των ν_n, ισχύει

$$G_n(u) = n \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2} dF_n(x),\ \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3')$$

Οι G_n είναι συναρτήσεις κατανομής και άρα είναι δεξιά συνεχείς παντού.
Θα δείξουμε οτί οι G_n είναι συνεχείς στο 0, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Πράγματι έστω $n \in \mathbb{N}$. Αρκεί να δείξουμε ότι G_n είναι αριστερά συνεχής στο 0.

Έστω $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $u_k \nearrow 0$.
Τότε

$$| G_n(0) - G_n(u_k) | = | n\int_{(-\infty,0]} \frac{x^2}{1+x^2} dF_n(x) - n\int_{(-\infty,u_k]} \frac{x^2}{1+x^2} dF_n(x) |$$

$$= | n\int_{(u_k,0]} \frac{x^2}{1+x^2} dF_n(x) |, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Έστω $1 > \epsilon > 0$. Τότε επειδή $u_k \nearrow 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$| u_k | < \frac{\epsilon}{2n} < 1, \ \forall k \geq k_0.$$

Έστω $k \geq k_0$. Τότε $\forall x \in (u_k, 0]$ έχουμε

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leq x^2 \leq | x | < | u_k | < \frac{\epsilon}{2n}$$

και άρα

$$0 \leq n\int_{(u_k,0]} \frac{x^2}{1+x^2} dF_n(x) \leq n.\frac{\epsilon}{2n}.\int_{(u_k,0]} dF_n(x) = \frac{\epsilon}{2}.\mu_n(u_k,0] \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Δηλαδή $\forall k \geq k_0$

$$| G_n(0) - G_n(u_k) | = | n\int_{(u_k,0]} \frac{x^2}{1+x^2} dF_n(x) | < \epsilon$$

συνεπώς

$$\lim_{u_k \nearrow 0} G_n(u_k) = G_n(0)$$

και επειδή (u_k) τυχαία, G_n συνεχής στο 0.

Θέτουμε

$$I_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itu} - 1)\frac{1+u^2}{u^2} dG_n(u), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Από το θεώρημα 1.18 ισχύει

$$I_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itu} - 1)\frac{1+u^2}{u^2}\frac{nu^2}{1+u^2} dF_n(u) = n\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itu} - 1) dF_n(u), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

συνεπώς, από τη (2) έχουμε

$$I_n(t) \to \log\phi(t), \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Παρατηρούμε ότι

$$Re[\log\phi(t)] = Re[\log(| \phi(t) | .e^{iArg\phi(t)})]$$

$$= Re[\log| \phi(t) | + iArg\phi(t)] = \log| \phi(t) |, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Άρα, από την (5) έχουμε ότι

$$Re[I_n(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos ut - 1)\frac{1+u^2}{u^2} dG_n(u) \xrightarrow{n} \log| \phi(t) |, \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{6}$$

και συνεπώς

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\cos ut)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u) \xrightarrow{n} -\log|\,\phi(t)\,|,\ \forall t\in\mathbb{R}. \qquad (6')$$

Στο $u=0$, επειδή η G_n είναι συνεχής στο 0, μπορούμε να θέσουμε την προς ολοκλήρωση συνάρτηση να είναι ίση με το όριο της στο 0, χωρίς να αλλάξει η τιμή του ολοκληρώματος. Έτσι της δίνουμε την τιμή

$$(1-\cos ut)\frac{1+u^2}{u^2}\,|_{u=0}=\lim_{u\to 0}(1-\cos ut)\frac{1+u^2}{u^2}=\frac{t^2}{2},\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

(i) Θα δείξουμε ότι $\exists M>0$, τέτοιο ώστε

$$\lim_{x\to+\infty}G_n(x)<M,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Θεωρούμε $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$A_n=\int_{|u|\le 1}dG_n(u),\qquad B_n=\int_{|u|>1}dG_n(u)$$

και

$$C_n=A_n+B_n=\int_{\mathbb{R}}dG_n(u)=\lim_{x\to+\infty}G_n(x)$$

Έστω $\epsilon>0$. Τότε από την (6′), υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n\ge n_0$,

$$-\log|\,\phi(t)\,|+\epsilon\ge\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\cos ut)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Επειδή $(1-\cos ut)\frac{1+u^2}{u^2}\ge 0,\ \forall u\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι $\forall n\ge n_0$,

$$-\log|\,\phi(t)\,|+\epsilon\ge\int_{|u|\le 1}(1-\cos ut)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u),\ \forall t\in\mathbb{R}, \qquad (a)$$

και

$$-\log|\,\phi(t)\,|+\epsilon\ge\int_{|u|>1}(1-\cos ut)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u),\ \forall t\in\mathbb{R}. \qquad (b)$$

Από το λήμμα 4.23,

$$\frac{1-\cos u}{u^2}>\frac{1}{3},\ \forall\,|\,u\,|\le 1, \qquad (7)$$

όπου θεωρούμε τη συνεχή εκδοχή της συνάρτησης $\frac{1-\cos u}{u^2}$, γιατί είχαμε θεωρήσει, πιο πίσω, τη συνεχή εκδοχή της $(1-\cos ut)\frac{1+u^2}{u^2}$ και τη διαιρέσαμε με τη συνεχή $1+u^2$.
Η (a) από την (7) μας δίνει

$$-\log|\,\phi(1)\,|+\epsilon\ge\frac{1}{3}\int_{|u|\ge 1}(1+u^2)dG_n(u)\ge\frac{1}{3}A_n,\ \forall n\ge n_0. \qquad (8)$$

Παίρνουμε για $0 \leq t \leq 2$ τους μέσους όρους των δύο μερών στη (b), οπότε έχουμε

$$-\frac{1}{2}\int_0^2 \log|\ \phi(t)\ |dt+\epsilon \geq \frac{1}{2}\int_0^2\int_{|u|>1}(1-\cos ut)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u)dt,\ \forall n \geq n_0.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Tonelli, αφού ολοκληρώνουμε μη αρνητική συνάρτηση, για να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, οπότε

$$-\frac{1}{2}\int_0^2 \log|\ \phi(t)\ |dt+\epsilon \geq \frac{1}{2}\int_{|u|>1}\int_0^2(1-\cos ut)\frac{1+u^2}{u^2}dt\,dG_n(u)$$

$$=\int_{|u|>1}(1-\frac{\sin 2u}{2u})\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u),\ \forall n \geq n_0.$$

Επειδή για $|\ u\ |> 1$ ισχύει $1-\frac{\sin 2u}{2u} \geq \frac{1}{2}$ και $\frac{1+u^2}{u^2} > 1$, έχουμε τελικά ότι

$$-\frac{1}{2}\int_0^2 \log|\ \phi(t)\ |dt+\epsilon \geq \int_{|u|>1}\frac{1}{2}dG_n(u)=\frac{1}{2}B_n,\ \forall n \geq n_0. \tag{9}$$

Ισχύει

$$0 \leq -\log|\ \phi(1)\ |+\epsilon < +\infty$$

και

$$0 \leq -\frac{1}{2}\int_0^2 \log|\ \phi(t)\ |dt+\epsilon < +\infty$$

γιατί ϕ συνεχής και δε μηδενίζεται ποτέ, με μέτρο μικρότερο από 1, επομένως $0 <|\ \phi\ |\leq 1$, συνεχής και άρα ολοκληρώνω τη μη αρνητική, συνεχή συνάρτηση $-\frac{1}{2}\log|\ \phi\ |$, στο συμπαγές διάστημα $[0,2]$, συνεπώς το ολοκλήρωμα είναι μη αρνητικός, πραγματικός αριθμός.

Άρα, από (8) και (9) έχουμε ότι υπάρχει $M_1 > 0$, τέτοιο ώστε

$$C_n = A_n + B_n < M_1,\ \forall n \geq n_0.$$

Για τα πεπερασμένα $n < n_0$, επειδή έχουμε πεπερασμένες θετικές ποσότητες $C_n,\ n < n_0$,

$$\exists M_2 > 0 \text{ τέτοιο ώστε } C_n < M_2,\ \forall n < n_0.$$

Συνεπώς, υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε

$$\lim_{x\to+\infty} G_n(x) = C_n < M,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} G_n(x) = 0,\ \text{ομοιόμορφα ως προς } n.$$

Για να το πετύχουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{|u|\geq T} dG_n(u) = 0,\ \text{ομοιόμορφα ως προς } n.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε από τη (b) και επειδή για $\mid u \mid > 1$, ισχύει $\frac{1+u^2}{u^2} > 1$, έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$-\log \mid \phi(t) \mid + \epsilon \geq \int_{|u|>1} (1 - \cos ut) \frac{1+u^2}{u^2} dG_n(u)$$

$$\geq \int_{|u|>1} (1 - \cos ut) dG_n(u), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall n \geq n_0. \tag{10}$$

Έστω $T > 1$. Από (10)

$$-\log \mid \phi(t) \mid + \epsilon \geq \int_{|u|>1} (1 - \cos ut) dG_n(u)$$

$$\geq \int_{|u|\geq T} (1 - \cos ut) dG_n(u), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall n \geq n_0. \tag{10$'$}$$

Παίρνουμε το μέσο όρο για $0 \leq t \leq \frac{2}{T}$, στη $(10')$ και έχουμε

$$-\frac{T}{2} \int_0^{\frac{2}{T}} \log \mid \phi(t) \mid dt + \epsilon \geq \frac{T}{2} \int_0^{\frac{2}{T}} \int_{|u|\geq T} (1 - \cos ut) dG_n(u) \, dt, \ \forall n \geq n_0.$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Tonelli, αφού ολοκληρώνουμε μη αρνητική συνάρτηση, για να εναλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, οπότε

$$-\frac{T}{2} \int_0^{\frac{2}{T}} \log \mid \phi(t) \mid dt + \epsilon \geq \frac{T}{2} \int_{|u|\geq T} \int_0^{\frac{2}{T}} (1 - \cos tu) dt \, dG_n(u)$$

$$= \int_{|u|\geq T} \left(1 - \frac{\sin \frac{2u}{T}}{\frac{2u}{T}}\right) dG_n(u), \ \forall n \geq n_0. \tag{11}$$

Για $\mid u \mid \geq T$, ισχύει

$$1 - \frac{\sin \frac{2u}{T}}{\frac{2u}{T}} \geq \frac{1}{2},$$

γιατί

$$\left| \frac{\sin \frac{2u}{T}}{\frac{2u}{T}} \right| \leq \frac{1}{\frac{2|u|}{T}} = \frac{T}{2 \mid u \mid} \leq \frac{1}{2}$$

οπότε, από την (11) έχουμε

$$-\frac{T}{2} \int_0^{\frac{2}{T}} \log \mid \phi(t) \mid dt + \epsilon \geq \frac{1}{2} \int_{|u|\geq T} dG_n(u), \ \forall n \geq n_0. \tag{12}$$

Ισχύει

$$\left| \frac{T}{2} \int_0^{\frac{2}{T}} \log \mid \phi(t) \mid dt \right| \leq \frac{T}{2} . \frac{2}{T} \max_{0 \leq t \leq \frac{2}{T}} \mid \log \mid \phi(t) \mid \mid$$

$$= \max_{0 \leq t \leq \frac{2}{T}} \mid \log \mid \phi(t) \mid \mid \tag{13}$$

Επειδή $\log \mid \phi(0) \mid = \log 1 = 0$, λόγω συνέχειας, υπάρχει $T_0 > 1$, τέτοιο ώστε

$$\forall t \in (-\frac{2}{T_0}, \frac{2}{T_0}), \quad \mid \log \mid \phi(t) \mid \mid < \epsilon$$

Άρα, για $T \geq T_0$, η (13) δίνει

$$-\frac{T}{2} \int_0^{\frac{2}{T}} \log \mid \phi(t) \mid dt \leq \mid \frac{T}{2} \int_0^{\frac{2}{T}} \log \mid \phi(t) \mid dt \mid$$
$$\leq \max_{0 \leq t \leq \frac{2}{T}} \mid \log \mid \phi(t) \mid \mid < \epsilon$$

και επομένως από τη (12) έχουμε ότι

$$\frac{1}{2} \int_{|u| \geq T} dG_n(u) \leq -\frac{T}{2} \int_0^{\frac{2}{T}} \log \mid \phi(t) \mid dt + \epsilon < 2\epsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Συνεπώς, για $T \geq T_0 > 1$,

$$0 \leq \int_{|u| \geq T} dG_n(u) \leq 4\epsilon, \ \forall n \geq n_0. \tag{14}$$

Έστω $n < n_0$. Τότε για $T > 0$,

$$\int_{|u| \geq T} dG_n(u) = \nu_n(\mid u \mid \geq T) = \nu_n(\mathbb{R}) - \nu_n(\mid u \mid < T) \to 0, \text{ για } T \to +\infty.$$

Άρα για $n < n_0$, υπάρχει $T_n > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 \leq \int_{|u| \geq T_n} dG_n(u) < 4\epsilon \tag{15}$$

Από (14),(15), έχουμε ότι για $T > \max\{T_0, T_1, ..., T_{n_0-1}\} > 0$, ισχύει

$$\int_{|u| \geq T} dG_n(u) \leq 4\epsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

δηλαδή δείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $T > 0$, τέτοιο ώστε

$$\int_{|u| \geq T} dG_n(u) \leq 4\epsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

και συνεπώς

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{|u| \geq T} dG_n(u) = 0, \text{ ομοιόμορφα ως προς } n.$$

Οι (i) και (ii) μας λένε ότι η $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία συναρτήσεων κατανομής πεπερασμένου μέτρου, τέτοια ώστε

$$\lim_{x \to +\infty} G_n(x) < M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

και

$$\lim_{x \to -\infty} G_n(x) = 0, \quad \text{ομοιόμορφα ως προς } n$$

και άρα από την πρόταση 4.22 υπάρχει υπακολουθία $(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ και G συνάρτηση κατανομής πεπερασμένου μέτρου, έτσι ώστε

$$G_{n_k} \Rightarrow G$$

Θέτουμε

$$\gamma_{n_k} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{u} dG_{n_k}(u) = n_k \int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{1+u^2}\frac{1}{u} dF_{n_k}(u)$$

$$= n_k \int_{\mathbb{R}} \frac{u}{1+u^2} dF_{n_k}(u),\ \forall n_k \in \mathbb{N}.$$

Ισχύει $\gamma_{n_k} \in \mathbb{R},\ \forall n_k \in \mathbb{N}$, γιατί

$$\mid \frac{u}{1+u^2} \mid \leq 1,\ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Τότε από (4),

$$I_{n_k}(t) = \int_{\mathbb{R}} (e^{itu}-1)\frac{1+u^2}{u^2} dG_{n_k}(u)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} dG_{n_k}(u) + \int_{\mathbb{R}} \frac{it}{u} dG_{n_k}(u)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} dG_{n_k}(u) + it\gamma_{n_k},\ \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση

$$f_t(u) = (e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2}$$

είναι συνεχής παντού ως προς u, εχτός από το $u = 0$ που δεν ορίζεται. Επειδή με εφαρμογή του κανόνα de l'Hospital, βρίσκουμε ότι

$$\lim_{u\to 0}(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} = -\frac{t^2}{2},\ \forall t \in \mathbb{R}$$

και επειδή G_{n_k} είναι συνεχής στο 0, μπορούμε να την ορίσουμε στο 0 να είναι ίση με το όριο της και άρα να είναι συνεχής παντού, χωρίς να αλλάξει η τιμή του ολοκληρώματος. Συνεπώς θέτουμε

$$(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} \mid_{u=0} = -\frac{t^2}{2},\ \forall t \in \mathbb{R}$$

και έτσι ολοκληρώνουμε συνεχή συνάρτηση.

Επίσης $\forall t \in \mathbb{R}$, η $(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2}$ είναι φραγμένη ως προς u. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε επειδή θεωρούμε τη συνεχή εκδοχή της f_t, στο $[-1,1]$ είναι φραγμένη, αφού είναι συνεχής συνάρτηση σε συμπαγές διάστημα.

Για $\mid u \mid > 1$

$$\mid (e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} \mid = \mid \frac{(e^{itu}-1)(1+u^2)}{u^2} - \frac{it}{u} \mid$$

$$\leq \frac{\mid e^{itu}-1 \mid}{u^2} + \mid e^{itu}-1 \mid + \frac{\mid t \mid}{\mid u \mid}$$

$$\leq \frac{| tu |}{u^2} + 2 + \frac{| t |}{| u |} = 2\frac{| t |}{| u |} + 2 < 2 \mid t \mid +2$$

και άρα f_t φραγμένη ως προς u.
Άρα, επειδή έχουμε ασθενή σύγκλιση $G_{n_k} \Rightarrow G$ και $\forall t \in \mathbb{R}$ η f_t είναι συνεχής και φραγμένη, από τον ορισμό 4.21, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} dG_{n_k}(u)$$

$$\xrightarrow{n} \int_{\mathbb{R}} (e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} dG(u),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Επειδή από (5)

$$I_{n_k}(t) \to \log \phi(t),\ \forall t \in \mathbb{R},$$

από τις (16),(17) έχουμε ότι $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\gamma_{n_k} \xrightarrow{k} \gamma \tag{18}$$

Συνεπώς από (16),(17),(18)

$$I_{n_k}(t) \xrightarrow{k} i\gamma t + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} dG(u),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

και λόγω της μοναδικότητας του ορίου

$$\log \phi(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} dG(u),\ \forall t \in \mathbb{R},$$

που είναι το ζητούμενο.

" $\Leftarrow$ " Έστω X τυχαία μεταβλητής της οποίας η χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ είναι τέτοια ώστε,

$$\log \phi(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} dG(u),\ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

όπου $\gamma \in \mathbb{R}$, G αύξουσα και φραγμένη και η προς ολοκλήρωση ποσότητα στο $u = 0$ είναι

$$[(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2}]_{u=0} = \frac{-t^2}{2},\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Stieltjes, το δεξιό μέλος της (1) είναι το όριο των αθροισμάτων Stieltjes,

$$\sum_{i=1}^{m_k} (e^{itc_{ki}} - 1 - \frac{itc_{ki}}{1+c_{ki}^2})\frac{1+c_{ki}^2}{c_{ki}^2}[G(c_{ki}) - G(c_{k(i-1)})]$$

$$\xrightarrow{k} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} dG(u) \tag{2}$$

όπου επιλέγουμε τα $c_{ki},\ 0 \leq i \leq m_k,\ k \in \mathbb{N}$ να είναι μη μηδενικά.

Αν θέσουμε

$$\lambda_{ki} = \frac{1+c_{ki}^2}{c_{ki}^2}[G(c_{ki}) - G(c_{k(i-1)})]$$

και

$$a_{ki} = -\frac{\lambda_{ki}c_{ki}}{1+c_{ki}^2}, \quad 1 \le i \le m_k,\ k \in \mathbb{N}$$

τότε

$$(e^{itc_{ki}} - 1 - \frac{itc_{ki}}{1+c_{ki}^2})\frac{1+c_{ki}^2}{c_{ki}^2}[G(c_{ki}) - G(c_{k(i-1)})] = (e^{itc_{ki}} - 1)\lambda_{ki} + ita_{ki}$$

$1 \le i \le m_k,\ k \in \mathbb{N}$
που είναι το άθροισμα του λογάριθμου της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας Compound Poisson κατανομής για $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, που είναι σταθερές ίσες με c_{ki} και N που ακολουθεί Poisson(λ_{ki}) και του λογάριθμου της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας κατανομής που έχει όλη τη μάζα της στο a_{ki}.
Δηλαδή είναι το άθροισμα των λογαρίθμων δύο απεριόριστα διαιρετών χαρακτηριστικών συναρτήσεων.
Συνεπώς κάθε όρος των αθροισμάτων Stieltjes, είναι λογάριθμός του γινομένου δύο απεριόριστα διαιρετών χαρακτηριστικών συναρτήσεων και άρα αν Z, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με χαρακτηριστικές συναρτήσεις αυτές τις δύο αντίστοιχα, κάθε όρος είναι λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης του αθροίσματος δύο απεριόριστα διαιρετών, ανεξάρτητων, τυχαίων μεταβλητών και άρα από την πρόταση 4.14 είναι λογάριθμος απεριόριστα διαιρετής συνάρτησης.
Όμοια, το συνολικό άθροισμα είναι λογάριθμος απεριόριστα διαιρετής χαρακτηριστικής συνάρτησης.
Η (2), δηλαδή, από το θεώρημα συνέχειας των χαρακτηριστικών συναρτήσεων μας λέει ότι έχουμε ασθενή σύγκλιση απεριόριστα διαιρετών κατανομών σε μια κατανομή μ και άρα από την πρόταση 4.15 η μ είναι απεριόριστα διαιρετή.
Αν X_1 έχει κατανομή μ και X_2 είναι ανεξάρτητη με τη X_1 και έχει κατανομή της οποίας η μάζα είναι όλη συγκεντρωμένη στο γ, τότε επειδή X_1, X_2 είναι απεριόριστα διαιρετές, από την πρόταση 4.14 η τυχαία μεταβλητή $X_1 + X_2$ είναι απεριόριστα διαιρετή.
Η (1) μας λέει ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της $X_1 + X_2$ είναι η ϕ και άρα η ϕ είναι απεριόριστα διαιρετή χαρακτηριστική συνάρτηση.
Συνεπώς η X είναι απεριόριστα διαιρετή τυχαία μεταβλητή.

□

Αποδεικνύεται ότι η αναπαράσταση του λογαρίθμου μιας απεριόριστα διαιρετής χαρακτηριστικής συνάρησης από τον τύπο (1), είναι μοναδική.

Βιβλιογραφία

[1] John W. Lamperti, *Probability: A Survey of the Mathematical Theory, 1st Edition*, W.A.Benjamin, 1966.

[2] John W. Lamperti, *Probability: A Survey of the Mathematical Theory, 2nd Edition*, Wiley-Interscience, 1996.

[3] Patrick Billingsley, *Probability and Measure, 3rd Edition*, Wiley-Interscience, 1995.

[4] B.V.Gnedenko and A.N.Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables, 2nd Edition*, Addison-Wesley, 1968.

[5] Rick Durrett, *Probability: Theory and Examples, 3rd Edition*, Brooks/Cole-Thomson, 2005.

[6] Kai Lai Chung, *A Course in Probability Theory, 3rd Edition*, Academic Press, 2001.

[7] V.V.Uchaikin and V.M.Zolotarev, *Chance and Stability, Stable Distributions and their Applications, 1st Edition*, Wiley-Interscience, 1999.

[8] V.V.Petrov, *Sums of Independent Random Variables, 2nd Edition*, Springer-Verlag, 1975.

[9] Leo Breiman, *Probability, 2nd Edition*, SIAM, 1992.

[10] William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications Vol.2, 2nd Edition*, Wiley, 1970.

[11] Christopher G.Small, *Functional Equations and How to Solve Them, 1st Edition*, Springer, 2007.

[12] Νικόλαος Δ. Παπαδάτος, *Θεωρία Πιθανοτήτων*, 1η Έκδοση, Εκδόσεις ΕΚΠΑ, 2006.

[13] Γ.Κοκολάκης και Ι.Σπηλιώτης, *Εισαγωγή στις Πιθανότητες*, 1η Έκδοση, Εκδόσεις Συμεών, 2002.

[14] Γ.Κουμουλλής και Σ.Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, 3η Έκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.

Τα 4 γραφήματα που περιέχονται σε αυτή την εργασία, είναι παρμένα από την ανοιχτή διαδικτυακή εγκυκλοπαίδεια "Wikipedia", στην οποία διατίθενται ελεύθερα προς χρήση.