Εισαγωγή στη

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Γιώργος Γεωργίου

Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Λευκωσία
Ιανουάριος 1999

Εισαγωγή στη

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Γεώργιος Γεωργίου

Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Λευκωσία
Ιανουάριος 1999

© Οι σημειώσεις αυτές, τόσο στο σύνολό τους όσο και τμηματικά, δεν μπορούν να αναπαραχθούν με οποιοδήποτε τρόπο ούτε να χρησιμοποιηθούν για οποιοδήποτε λόγο χωρίς την γραπτή άδεια του συγγραφέα.

Ελάχιστοι μας διαβάζουν,
ελάχιστοι ξέρουν τη γλώσσα μας,
μένουμε αδικαίωτοι κι αχειροκρότητοι
σ' αυτή τη μακρινή γωνιά,
όμως αντισταθμίζει που γράφουμε Ελληνικά.

Κώστας Μόντης, 1962

Στους φοιτητές του ΜΑΣ 121

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι ανά χείρας σημειώσεις γράφτηκαν για τους φοιτητές που παρακολουθούν το μάθημα της *Γραμμικής Αλγεβρας I* (ΜΑΣ 121). Σ' αυτούς άλλωστε είναι αφιερωμένες. Στην παρούσα τους μορφή θεωρούνται πρόχειρες και ο αναγνώστης πρέπει να προστρέξει στην προτεινόμενη βιβλιογραφία για να συμπληρώσει τη μελέτη του.

Θα ήθελα από τη θέση αυτή να ευχαριστήσω τους φοιτητές μου τόσο για τον εντοπισμό παροραμάτων και άλλων λαθών όσο και για τις απορίες τους που συνέβαλαν σημαντικά στη βελτίωση και τη μερική ολοκλήρωση των σημειώσεων.

Λευκωσία
Ιανουάριος 1999

Γιώργος Γεωργίου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^n$

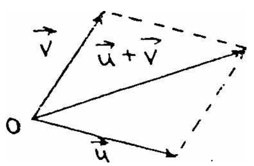
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ως γνωστό, σε διάφορες φυσικές εφαρμογές εμφανίζονται συγκεκριμένες οντότητες που χαρακτηρίζονται μόνο από το μέγεθός (μέτρο) τους (π.χ. η θερμοκρασία). Αυτές οι ποσότητες καλούνται βαθμωτές (scalars) και μπορούν να οριστούν με πραγματικούς αριθμούς. Γνωρίζουμε επίσης ότι στους συνήθεις χώρους των δύο ή τριών διαστάσεων εμφανίζονται γεωμετρικές οντότητες που μπορούν να οριστούν ως προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα και έχουν έτσι ως χαρακτηριστικά το μέγεθος, τη διεύθυνση και τη φορά. Οι οντότητες αυτές καλούνται διανύσματα (vectors) και μπορούν να παρασταθούν με βέλη ορισμένου μήκους, διεύθυνσης και φοράς.

Σ' αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε τις ιδιότητες των διανυσμάτων. Εχουμε τις ακόλουθες πράξεις:

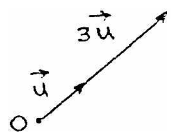
(i) Πρόσθεση διανυσμάτων

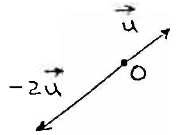
Το άθροισμα $\vec{u}+\vec{v}$ δυο διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι το διάνυσμα που προκύπτει με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου, δηλ. είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$:



(ii) Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Εστω ένα διάνυσμα $\vec{u}$ και ένας πραγματικός αριθμός λ. Το γινόμενο $\lambda\vec{u}$ είναι ένα διάνυσμα με ίδια διεύθυνση, ίδια (αν $\lambda>0$) ή αντίθετη (αν $\lambda<0$) φορά και μέτρο ίσο με το μέτρο του $\vec{u}$ πολλαπλασιασμένο με $|\lambda|$:





(iii) Ισότητα

Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι ίσα,

$$\vec{u}=\vec{v}$$

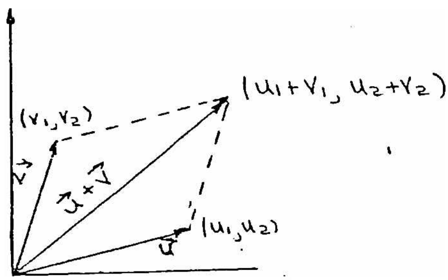
εάν έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά: μέγεθος, διεύθυνση, φορά.

Σημειώνουμε ότι τα διανύσματα θεωρούνται συνήθως <u>ελεύθερα</u>, μπορούν δηλ. να μετατοπιστούν παράλληλα προς τον εαυτό τους. Εάν τώρα εισαγάγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy και θεωρήσουμε ότι τα διανύσματα έχουν ως αρχή την αρχή των αξόνων O, τότε κάθε διάνυσμα χαρακτηρίζεται πλήρως από ένα σημείο του επιπέδου, δηλ. από τις συντεταγμένες του πέρατος του διανύσματος. Εξετάζουμε στη συνέχεια τη σχέση μεταξύ των πράξεων που αναφέραμε προηγουμένως και των συντεταγμένων των περάτων των διανυσμάτων.

<u>(i) Πρόσθεση διανυσμάτων</u>

Αν (u_1, u_2) και (v_1, v_2) είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, αντίστοιχα, τότε:

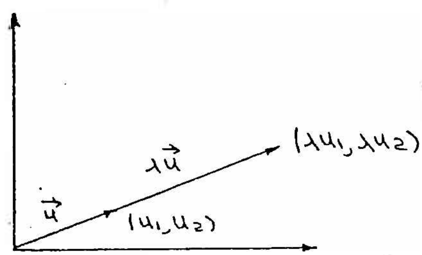
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2)$$



<u>(ii) Βαθμωτός πολλαπλασιασμός</u>

Αν (u_1, u_2) είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{u}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε το πέρας του διανύσματος $\lambda\vec{u}$ είναι το $(\lambda u_1, \lambda u_2)$:

$$\lambda\vec{u} = \lambda(u_1, u_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2)$$



<u>(iii) Ισότητα διανυσμάτων</u>

Αν (u_1, u_2) και (v_1, v_2) είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, αντίστοιχα, τότε:

$$\vec{u} = \vec{v} \iff u_1 = v_1 \text{ και } u_2 = v_2 .$$

Μαθηματικά, ορίζουμε ένα διάνυσμα με το πέρας του. Ετσι καλούμε το διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (u_1, u_2) διάνυσμα. Η έννοια αυτή μπορεί να επεκταθεί στις τρείς ή περισσότερες διαστάσεις.

Ορισμός

Καλούμε χώρο $\mathbb{R}^n$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων νιάδων $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ όπου τα a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ονομάζεται διάνυσμα στο χώρο $\mathbb{R}^n$ και οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι οι συνιστώσες (ή συντεταγμένες) του διανύσματος $\vec{a}$.

Είναι γνωστό ότι στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ισότητα με την ισοδυναμία

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \iff u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ \ldots,\ u_n = v_n .$$

Επιπλέον στο $\mathbb{R}^n$ ορίζονται οι παρακάτω γνωστές πράξεις συνθέσεως:

Πρόσθεση: Αν $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ και $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ είναι δυο στοιχεία του $\mathbb{R}^n$, τότε το στοιχείο $\vec{w}$ του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{w} = (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)$$

ονομάζεται άθροισμα των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ και συμβολίζεται με

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} .$$

Η πράξη + ονομάζεται πρόσθεση στο $\mathbb{R}^n$. Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι η πράξη της προσθέσεως είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

Επίσης είναι φανερό ότι το στοιχείο

$$\mathbb{O} = (0, 0, \ldots, 0)$$

είναι το ουδέτερο στοιχείο της προσθέσεως. Πράγματι

$$\vec{u} + \mathbb{O} = (u_1+0, u_2+0, \ldots, u_n+0) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = \vec{u}$$

Το στοιχείο $\mathbb{O}$ καλείται μηδενικό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$.

Το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{u}$ ορίζεται ως

$$-\vec{u} = -1\,\vec{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$$

<u>Βαθμωτός πολλαπλασιασμός</u> Εστω ότι $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\lambda\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ και μάλιστα

$$\lambda\vec{u} = \lambda(u_1,u_2,\dots,u_n) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n).$$

<u>Πρόταση</u>

Εστω $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(i) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u} + (\vec{v}+\vec{w})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

(ii) $\vec{u} + \mathbb{O} = \vec{u}$

(iii) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \mathbb{O}$

(iv) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

(v) $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

(vi) $(\lambda+\kappa)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \kappa\vec{u}$

(vii) $(\lambda\kappa)\vec{u} = \lambda(\kappa\vec{u})$

(viii) $1\vec{u} = \vec{u}$.

Η απόδειξη της πρότασης στηρίζεται στους ορισμούς των πράξεων και στις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

<u>Παραδείγματα</u>

(1) Να υπολογιστούν τα εξής:

(i) $(3,-4,5) + (1,1,-2)$

(ii) $(1,2,-3) + (4,-5)$

(iii) $-3(4,-5,-6)$

(iv) $-(-6,7,-8)$

<u>Λύση</u>

(i) Προσθέτουμε τις αντίστοιχες συνιστώσες των δυο διανυσμάτων

$$(3,-4,5)+(1,1,-2) = (3+1, -4+1, 5-2) = (4,-3,3)$$

(ii) Το άθροισμα <u>δεν ορίζεται</u> γιατί τα διανύσματα έχουν διαφορετικό πλήθος συνιστωσών.

(iii) Πολλαπλασιάζουμε κάθε συνιστώσα με -3

$$-3(4,-5,-6) = (-12, 15, 18)$$

(iv) $-(-6,7,-8) = (6,-7,8)$

12) Δίνονται τα διανύσματα :

$$\vec{u} = (2, -7, 1)$$
$$\vec{v} = (-3, 0, 4)$$
$$\vec{w} = (0, 5, -8)$$

Να βρεθούν τα εξής : (i) $3\vec{u} - 4\vec{v}$
(ii) $2\vec{u} + 3\vec{v} - 5\vec{w}$

Λύση

(i) $3\vec{u} - 4\vec{v} = 3(2, -7, 1) - 4(-3, 0, 4)$
$= (6, -21, 3) - (-12, 0, 16)$
$= (18, -21, -13)$

(ii) $2\vec{u} + 3\vec{v} - 5\vec{w} = 2(2, -7, 1) + 3(-3, 0, 4) - 5(0, 5, -8)$
$= (4, -14, 2) + (-9, 0, 12) + (0, -25, 40)$
$= (4 - 9 + 0, -14 + 0 - 25, 2 + 12 + 40)$
$= (-5, -39, 54)$

---

13) Να βρεθούν τα x και y αν
$$(x, 3) = (2, x + y)$$

Λύση

Επειδή τα δυο διανύσματα είναι ίσα , και οι αντίστοιχες συνιστώσες είναι ίσες :

$$\left.\begin{matrix} x = 2 \\ 3 = x + y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = 1. \end{matrix}$$

---

14) Να βρεθούν τα x και y αν
$$(4, y) = x(2, 3)$$

Λύση

Εκτελώντας τις πράξεις έχουμε : $(4, y) = (2x, 3x)$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 4 = 2x \\ y = 3x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = 3x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = 6 \end{matrix}$$

1.2 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Εστω δύο διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ στον $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{και} \quad \vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Τότε ως <u>εσωτερικό γινόμενο</u> (inner product) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ορίζεται το άθροισμα

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Σημειώνουμε ότι αντί του συμβόλου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ για το εσωτερικό γινόμενο μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε και το $\bullet$:

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n}$$

Γι' αυτό το λόγο, στην αγγλική χρησιμοποιείται και ο όρος dot product (αντί του inner product). Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε και τους δύο συμβολισμούς.

Δυο στοιχεία $\vec{u}, \vec{v}$ του $\mathbb{R}^n$ θα λέμε ότι είναι <u>ορθογώνια</u> (orthogonal) ή <u>κάθετα</u> (perpendicular) όταν το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με μηδέν:

$$\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0} \quad , \quad [\text{ή} \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = 0]$$

<u>Θεώρημα</u>

Εστω ότι $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(Ι) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$

(ΙΙ) $(\lambda \vec{u}) \bullet \vec{v} = \lambda (\vec{u} \bullet \vec{v})$

(ΙΙΙ) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$

(ΙV) $\vec{u} \bullet \vec{u} \geqslant 0$

$$\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \mathbb{O}$$

<u>Παρατήρηση</u>

Οπως θα δούμε στη συνέχεια ο χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων, του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και του εσωτερικού γινομένου καλείται <u>Ευκλείδειος χώρος n διαστάσεων</u>.

Παραδείγματα

(1) Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο $<\vec{u},\vec{v}>$ όταν

(α) $\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{v} = (0,1,0)$

(β) $\vec{u} = (1,0,-2)$, $\vec{v} = (-3,1,2)$

(γ) $\vec{u} = (1,2,-1,2)$, $\vec{v} = (0,1,-1)$

(δ) $\vec{u} = (1,-1,1,-1)$, $\vec{v} = (1,2,2,1)$

Λύση

1α) $<\vec{u},\vec{v}> = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0$ (τα δυο διανύσματα είναι ορθογώνια)

(β) $<\vec{u},\vec{v}> = 1(-3) + 0\cdot 1 - 2(2) = -3-4 = -7$

(γ) Το εσωτερικό γινόμενο δεν ορίζεται γιατί τα δυο διανύσματα έχουν διαφορετικό πλήθος συνιστωσών.

(δ) $<\vec{u},\vec{v}> = 1(1) - 1(2) + 1(2) - 1(1) = 1-2+2-1 = 0$
(τα δυο διανύσματα είναι ορθογώνια).

---

(2) Να βρεθεί το κ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = (2,\kappa,-1)$ και $\vec{v} = (\kappa,-1,2)$ να είναι ορθογώνια

Λύση

Για να είναι τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ορθογώνια πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να ισούται με μηδέν:

$<\vec{u},\vec{v}> = 2\kappa - \kappa - 2 = 0 \Rightarrow \kappa - 2 = 0 \Rightarrow \kappa = 2$

---

(3) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$ και $\vec{e_3} = (0,0,1)$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Λύση

Για να είναι τα διανύσματα $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ και $\vec{e_3}$ ορθογώνια μεταξύ τους πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$<\vec{e_1},\vec{e_2}> = 0$, $<\vec{e_2},\vec{e_3}> = 0$ και $<\vec{e_3},\vec{e_1}> = 0$.

Πράγματι:

$<\vec{e_1},\vec{e_2}> = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0$

$<\vec{e_2},\vec{e_3}> = 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$

$<\vec{e_3},\vec{e_1}> = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 = 0$

1.3 ΜΗΚΟΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^n$

Ορισμοί

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ του $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Η <u>απόσταση</u> μεταξύ των σημείων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{d = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + \dots + (u_n-v_n)^2}} \quad (1)$$

Το <u>μήκος</u> (length) ή <u>νόρμα</u> (norm) του διανύσματος $\vec{u}$ συμβολίζεται με $\|\vec{u}\|$ και ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}} \quad (2)$$

Παρατηρήσεις

(1) Για τη νόρμα συναντούμε στην ελληνική βιβλιογραφία και άλλες εναλλακτικές ονομασίες, όπως <u>μέτρο</u> και <u>νόρμ</u>.

(2) Για την απόσταση μεταξύ των σημείων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$\boxed{d = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + \dots + (u_n-v_n)^2}} \quad (3)$$

Παραδείγματα

(1) Αν $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ είναι δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, τότε η απόσταση των $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι:

$$d = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|(x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3)\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$$

που συμπίπτει με τη γνωστή από την Αναλυτική Γεωμετρία απόσταση δύο σημείων του $\mathbb{R}^3$.

(2) Να βρεθεί η απόσταση των $\vec{u} = (1, -2, 4, 1)$ και $\vec{v} = (3, 1, -5, 0)$.

Λύση

$$d = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-1)^2 + (4+5)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{95}$$

(3) Αν $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$, τότε η νόρμα $\|\vec{x}\|$ είναι:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

που συμπίπτει με το μήκος του διανύσματος $\vec{x}$ (που έχει ως αρχή την αρχή των αξόνων).

(4) Να βρεθεί η νόρμα του $\vec{V} = (3, 1, -5, 0)$.

Λύση

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2} = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-5)^2 + 0^2} = \sqrt{35}.$$

Ενα διάνυσμα $\vec{u}$ του $\mathbb{R}^n$ καλείται μοναδιαίο (unit vector) αν ισχύει:

$$\|\vec{u}\| = 1 \qquad (4)$$

Συνήθως, για τα μοναδιαία διανύσματα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\vec{e}$. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{u}$ μπορεί να κανονικοποιηθεί ως εξής:

$$\vec{e_u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

Το $\vec{e_u}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει ίδια διεύθυνση και φορά με το $\vec{u} \neq 0$.

Παραδείγματα

(1) Να εξετάσετε αν τα ακόλουθα διανύσματα είναι μοναδιαία:

(α) $(1, 1, 1)$ (γ) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(β) $(1, 0, 0)$ (δ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, 0\right)$

Λύση

(α) $\|(1,1,1)\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \neq 1$ Δεν είναι μοναδιαίο

(β) $\|(1,0,0)\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$. Είναι μοναδιαίο

(γ) $\left\|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = 1$. Είναι μοναδιαίο

(δ) $\left\|\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, 0\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{\frac{1}{3}+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 1$.

Δεν είναι μοναδιαίο.

(ε) Να κανονικοποιηθούν τα διανύσματα

(α) $\vec{u} = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$

(β) $\vec{u} = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$

(γ) $\vec{u} = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$

(δ) $\vec{u} = (1, -2, 0) \in \mathbb{R}^3$

Λύση

(α) Η νόρμα του $\vec{u}$ είναι

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(β) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1 + (-2)^2} = \sqrt{5}$. Το κανονικοποιημένο διάνυσμα θα είναι:

$$\vec{e_u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) \quad \text{ή} \quad \vec{e_u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

(γ) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$$\vec{e_u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \quad \text{ή} \quad \vec{e_u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(δ) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

$$\vec{e_u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0) \quad \text{ή} \quad \vec{e_u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

Θεώρημα (Ανισότητα Cauchy - Schwartz)

Για τυχόντα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\boxed{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \qquad (5)$$

Ορισμός

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ καλείται ο αριθμός θ που δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}} \qquad (6)$$

Παρατηρήσεις

(1) Ο αριθμός θ ορίζεται σε ακτίνια, $\theta \in [0, \pi]$

(2) Εάν $\cos\theta = 0$, εάν δηλ. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ τότε $\theta = \frac{\pi}{2}$ και τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα (ορθογώνια)

Παραδείγματα

(1) Δίνονται τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} = (-1,-2,0) \quad \text{και} \quad \vec{v} = (2,0,3)$$

Να επαληθευτεί η ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$|\langle \vec{u},\vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$$

Λύση

Υπολογίζουμε τα $|\langle \vec{u},\vec{v}\rangle|$, $\|\vec{u}\|$ και $\|\vec{v}\|$

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = (-1)2 + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 3 = -2 \Rightarrow |\langle \vec{u},\vec{v}\rangle| = 2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{5} \\ \|\vec{v}\| = \sqrt{2^2+0^2+3^2} = \sqrt{13} \end{array}\right\} \Rightarrow \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| = \sqrt{65}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$2 \leq \sqrt{65}$$

άρα η ανισότητα Cauchy-Schwartz ισχύει:

$$|\langle \vec{u},\vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

(2) Αν $\vec{a} = (1,0)$ και $\vec{b} = (-3,\sqrt{3})$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^2$, να βρεθεί η γωνία τους.

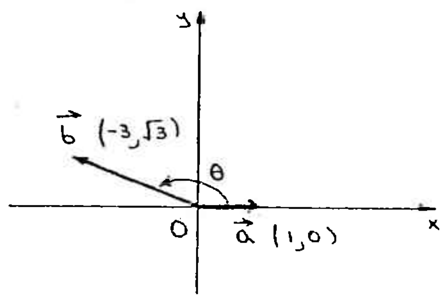
Λύση.

Εχουμε:

$$\langle \vec{a},\vec{b} \rangle = 1(-3) + 0\cdot\sqrt{3} = -3$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



Από τον ορισμό έχουμε

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{a},\vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|} = \frac{-3}{1\cdot 2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

δηλ. $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.

1. Να υπολογιστούν τα εξής:

α) (1, -2, 0)+(-2,3,4)
β) (1, -2, 0, 3)+(4, -3, -2, 0)
γ) (1, -1)+(-1,1)
δ) (1, -1, 2)+(1,0,1,0)
ε) (1, -2,3)-2(1,-1,-2)
στ) -3(1, -2,1,0)
ζ) 3(1,-1, 2)-(1, -2, 1)

2. Να βρεθούν τα x και y αν (x, 5)=(y-x,y)

3. Να βρεθούν τα x,y και z αν

(2, -3,4)=x(1,1,1)+y(1,1,0)+z(1,0,0)

4. Να δείξετε ότι 0 $\vec{u}=\vec{0}$ ($\vec{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα)

5. Αν $\vec{u}$ είναι ένα διάνυσμα στο R^n και $\vec{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα στο R^n να δείξετε ότι το $\vec{0}$ είναι ορθογώνιο στο $\vec{u}$.

6. Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ όταν:
α) $\vec{u}=(2,-3,6)$, $\vec{v}=(8,2,-3)$
β) $\vec{u}=(1,-8,0,5)$, $\vec{v}=(3,6)$
γ) $\vec{u}=(3,-5,2,1)$, $\vec{v}=(4,1,-2,5)$

7. Να βρεθεί η τιμή του κ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ να είναι ορθογώνια:
α) $\vec{u}=(1,k,-3)$ και $\vec{v}=(2,-5,4)$
β) $\vec{u}=(2,3k,-4,1,5)$ και $\vec{v}=(6,-1,3,7,2k)$

8. Να βρεθεί η απόσταση d μεταξύ των διανυσμάτων όπου:

α) $\vec{u}=(1,7)$, $\vec{v}=(6,-5)$
β) $\vec{u}=(3,-5,4)$, $\vec{v}=(6,2,-1)$

9. Να βρεθεί η τιμή του k έτσι ώστε η απόσταση των διανυσμάτων $\vec{u}=(2,k,1,-4)$ και $\vec{v}=(3,-1,6,-3)$ να είναι 6.

10. Να βρεθεί η νόρμα $||\vec{u}||$ του διανύσματος $\vec{u}$ εάν

α) $\vec{u}=(2,-7)$ β) $\vec{u}=(3,-12,-4)$

11. Να βρεθεί η τιμή του k έτσι ώστε να είναι $||\vec{u}||=\sqrt{39}$ όπου $\vec{u}=(1,k,-2,5)$

12. Ποιά από τα παρακάτω διανύσματα ειναι μοναδιαία;
α) $\vec{u}=(1,0,-\frac{1}{2})$
β) $\vec{u}=(0,-1,0)$
γ) $\vec{u}=(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$
δ) $\vec{u}=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

13. Να κανονικοποιηθούν τα διανύσματα
   α) $\vec{u}=(-3,4)$
   β) $\vec{v}=(1,-2,0,2)$

14. Να επαληθευτεί η ανισότητα Cauchy-Schwartz στις ακόλουθες περιπτώσεις:
   α) $\vec{u}=(1,-1)$, $\vec{v}=(0,1)$
   β) $\vec{u}=(1,0,-1)$, $\vec{v}=(1,-1,0)$
   γ) $\vec{u}=(1,0,0,-1)$, $\vec{v}=(2,1,0,0)$

15. Να υπολογιστεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων του R^4
   $\vec{u}=(-3,0,6,2)$ και $\vec{v}=(1,-2,0,2)$

2 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εισαγάγαμε, ως προέκταση των γεωμετρικών χώρων δύο και τριών διαστάσεων, το χώρο $\mathbb{R}^n$ καθώς και τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού για τα στοιχεία (ή διανύσματα) του $\mathbb{R}^n$. Αναφέραμε επίσης ορισμένες ιδιότητες που ισχύουν για τις πράξεις αυτές.

Αντίθετα, στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με αφηρημένους χώρους, εφοδιασμένους με αντίστοιχες, όπως στον $\mathbb{R}^n$, πράξεις των οποίων οι ιδιότητες δεν αποδεικνύονται αλλά <u>εισάγονται αξιωματικά</u>.

Οπως θα διαπιστώσουμε στον ορισμό, η ιδιότητα ενός συνόλου V ως διανυσματικού χώρου είναι άρρηκτα συνυφασμένη μέ ένα άλλο σύνολο, ένα σώμα K, όπως:

— το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$,

— το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$, ή

— το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$.

Ο αναγνώστης μπορεί να βρεί μια καλή και σύντομη εισαγωγή για τις Ομάδες και τα Σώματα στο βιβλίο: L. Brand, "Μαθηματική Ανάλυση", Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 1984.

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ.

Ορισμός 2.1.1

Εστω V ένα μη κενό σύνολο και K ένα σώμα, για τα οποία δεχόμαστε τα κάτωθι αξιώματα:

I Σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος u, v με $u, v \in V$ ισχύει η πράξη της πρόσθεσης που συμβολίζεται με $+$:

$$u+v \quad \text{όπου} \quad u, v \in V.$$

Το $u+v$ είναι μοναδικό και καλείται άθροισμα των u και v. Το V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, δηλ.

$$\text{αν} \quad u, v \in V \quad \text{τότε} \quad u+v \in V.$$

II Σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος λ, u με $\lambda \in K$ και $u \in V$ ισχύει η (εξωτερική) πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού που συμβολίζεται με $\cdot$:

$$\lambda \cdot u \quad \text{όπου} \quad \lambda \in K \quad \text{και} \quad u \in V.$$

(Χάριν απλότητας η τελεία συνήθως παραλείπεται). Το λu είναι μοναδικό και καλείται βαθμωτό πολλαπλάσιο (scalar multiple) του u επί το λ. Το V είναι κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό, δηλ.

$$\text{αν} \quad \lambda \in K \quad \text{και} \quad u \in V \quad \text{τότε} \quad \lambda u \in V.$$

Το σύνολο V, εφοδιασμένο με τις πιο πάνω πράξεις, καλείται διανυσματικός ή γραμμικός χώρος (vector or linear space) πάνω στο K, αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(A1) $(u+v)+w = u+(v+w) \quad \forall u, v, w \in V$
(προσεταιριστική ιδιότητα).

(A2) Υπάρχει ένα στοιχείο του V που το συμβολίζουμε με $\mathbb{O}$ και το καλούμε μηδενικό διάνυσμα ή μηδενικό στοιχείο του V, τέτοιο ώστε:

$$u+\mathbb{O} = u \quad \forall u \in V.$$

(A3) Για κάθε στοιχείο u του V υπάρχει ένα στοιχείο του V που το καλούμε αντίθετο στοιχείο του u και το συμβολίζουμε με $-u$, τέτοιο ώστε:

$$u+(-u) = \mathbb{O}, \quad u, -u \in V$$

(A4) $u+v = v+u \quad \forall u,v \in V$.
(αντιμεταθετική ιδιότητα)

(B1) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall \lambda \in K$ και $u,v \in V$
(επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση).

(B2) $(\lambda+\mu)\cdot u = \lambda u + \mu u \quad \forall \lambda,\mu \in K$ και $u \in V$
(επιμεριστική ιδιότητα ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό).

(B3) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u) \quad \forall \lambda,\mu \in K$ και $u \in V$

(B4) Αν 1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο του K, τότε
$1\,u = u \quad \forall u \in V$

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου θα τα λέμε επίσης <u>διανύσματα</u> ή <u>σημεία</u>.

<u>Παρατήρηση 1.</u>

Από τη θεωρία των αλγεβρικών δομών είναι γνωστό ότι ένα σύνολο G, εφοδιασμένο με μια πράξη πρόσθεσης με τις ιδιότητες A1, A2 και A3 ονομάζεται <u>(προσθετική) ομάδα</u>.

Εάν, επιπλέον, η πράξη αυτή έχει και την ιδιότητα A4, τότε το σύνολο G ονομάζεται <u>μεταθετική ή αβελιανή ομάδα</u> (commutative or abelian group).

Από την άλλη πλευρά, τα υπόλοιπα τέσσερα αξιώματα (B1-B4) αφορούν τη "δράση" του σώματος K στο V. Η διαφορετική τους αρίθμηση δείχνει ακριβώς αυτή τη διαφορά.

Εχοντας την ορολογία αυτή υπόψη, μπορούμε να ορίσουμε, συνοπτικότερα, ένα σύνολο V ως διανυσματικό χώρο αν αυτό είναι μια μεταθετική ομάδα ως προς την πρόσθεση και έχει μια εξωτερική πράξη, τον (βαθμωτό) πολλπλασιασμό, σε σχέση με ένα σώμα K, που έχει τις ιδιότητες $B1, B2, B3$ και $B4$.

Παρατήρηση 2

Αν $K=\mathbb{R}$, τότε ο V καλείται πραγματικός διανυσματικός χώρος. Αν $K=\mathbb{C}$, ο V καλείται μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Στα επόμενα, θα ασχοληθούμε κυρίως με πραγματικούς διανυσματικούς χώρους.

Παράδειγμα 1.

Το ίδιο το σώμα K είναι διανυσματικός χώρος πάνω στον εαυτό του αν ως πρόσθεση ορίσουμε την πρόσθεση στο K και ως βαθμωτό πολλαπλασιασμό, τον πολλαπλασιασμό στο K.

Ετσι για παράδειγμα, το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι διανυσματικός χώρος στον εαυτό του, το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι διανυσματικός χώρος πάνω στον εαυτό του, το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι διανυσματικός χώρος πάνω στον εαυτό του κ.λ.π.

Παράδειγμα 2

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού όπως ορίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι διανυσματικός χώρος.

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να δείξει ότι όλα τα αξιώματα $A1-A4$ και $B1-B4$ ισχύουν.

Παράδειγμα 3

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών

$$\mathbb{C}=\{\, a+ib \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2=-1 \,\}$$

με πράξεις τη συνήθη πρόσθεση μιγαδικών αριθμών και το συνήθη πολλαπλασιασμό επί πραγματικό αριθμό, δηλ.

$$(a_1+i b_1)+(a_2+i b_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$$

και

$$\lambda(a_1+i b_1)=\lambda a_1+i\lambda b_1$$

για κάθε $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο πάνω στο $\mathbb{R}$.

Το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{C}$ είναι το

$$\mathbb{O}=0+i0=0.$$

Το αντίθετο στοιχείο του $u=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$ είναι το $-u=-(a+ib)=(-a)+i(-b)$.

Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει ότι όλα τα αξιώματα A1-A4 και B1-B4 ισχύουν.

Παράδειγμα 4.

Το σύνολο P_n των πολυωνύμων του x με πραγματικούς συντελεστές και με βαθμό $\leq n$ όπου $n\in\mathbb{N}_0$, εφοδιασμένο με τη γνωστή πρόσθεση:

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)=$$
$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n$$

και με βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

$$\lambda(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=(\lambda a_0)+(\lambda a_1)x+\cdots+(\lambda a_n)x^n,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.

Επαληθεύουμε στη συνέχεια όλες τις ιδιότητες του Ορισμού 2.1.1.

(A1) Θεωρούμε τρία τυχόντα πολυώνυμα $p(x), q(x), r(x)\in P_n$:

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n.$$
$$q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$
$$r(x)=\gamma_0+\gamma_1x+\cdots+\gamma_nx^n$$

$$(p(x)+q(x))+r(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+$$
$$+\gamma_0+\gamma_1x+\cdots+\gamma_nx^n$$
$$=(a_0+b_0+\gamma_0)+(a_1+b_1+\gamma_1)x+\cdots+(a_n+b_n+\gamma_n)x^n=$$

$= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + (\beta_0+\gamma_0) + (\beta_1+\gamma_1)x + \cdots + (\beta_n+\gamma_n)x^n$
$= p(x) + \big(q(x) + r(x) \big)$

(A2) Το μηδενικό στοιχείο του P_n είναι το

$$\mathbb{O}(x) = 0 + 0\cdot x + \cdots + 0\cdot x^n = 0. \quad \left[p(x) + \mathbb{O}(x) = p(x) \right].$$

(A3) Για κάθε πολυώνυμο

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

υπάρχει το αντίθετο πολυώνυμο.

$$-p(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n.$$

$$\left[p(x) + (-p(x)) = \mathbb{O} \right].$$

(A4) $p(x) + q(x) = (a_0+\beta_0) + (a_1+\beta_1)x + \cdots + (a_n+\beta_n)x^n$
$= (\beta_0+a_0) + (\beta_1+a_1)x + \cdots + (\beta_n+a_n)x^n$
$= q(x) + p(x).$

(B1) $\lambda\big(p(x)+q(x)\big) = \lambda\left[(a_0+\beta_0) + (a_1+\beta_1)x + \cdots + (a_n+\beta_n)x^n \right]$

$= (\lambda a_0 + \lambda\beta_0) + (\lambda a_1 + \lambda\beta_1)x + \cdots + (\lambda a_n + \lambda\beta_n)x^n$
$= (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + \cdots + (\lambda a_n)x^n + (\lambda\beta_0) + (\lambda\beta_1)x + \cdots + (\lambda\beta_n)x^n$
$= \lambda(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + \lambda(\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n)$
$= \lambda p(x) + \lambda q(x).$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}.$

(B2) Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$(\lambda+\mu)p(x) = (\lambda+\mu)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)$
$= (\lambda+\mu)a_0 + (\lambda+\mu)a_1 x + \cdots + (\lambda+\mu)a_n x^n$
$= (\lambda a_0 + \mu a_0) + (\lambda a_1 + \mu a_1)x + \cdots + (\lambda a_n + \mu a_n)x^n$
$= (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + \cdots + (\lambda a_n)x^n + (\mu a_0) + (\mu a_1)x + \cdots + (\mu a_n)x^n$
$= \lambda(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + \mu(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)$
$= \lambda p(x) + \mu p(x)$

(B3) Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
(\lambda\mu)\, p(x) &= (\lambda\mu)\,(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\
&= (\lambda\mu a_0) + (\lambda\mu a_1) x + \cdots + (\lambda\mu a_n) x^n \\
&= \mu\,\big((\lambda a_0) + (\lambda a_1) x + \cdots + (\lambda a_n) x^n \big) \\
&= \mu\,(\lambda p(x))
\end{aligned}
$$

(B4) Για τη μονάδα 1 (μοναδιαίο στοιχείο του $\mathbb{R}$) και για κάθε στοιχείο $p(x) \in P_n$ έχουμε.

$$
\begin{aligned}
1\, p(x) &= 1\,(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\
&= (1 a_0) + (1 a_1) x + \cdots + (1 a_n) x^n \\
&= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = p(x)
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 5.

Εστω $C[a,b]$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$. Είναι γνωστό ότι το άθροισμα

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

δυο συνεχών συναρτήσεων f και g είναι επίσης συνεχής συνάρτηση, δηλ. αν $f, g \in C[a,b]$ τότε $f+g \in C[a,b]$.

Επίσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in C[a,b]$ η συνάρτηση

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

είναι συνεχής στο $[a,b]$ ∴ $\lambda f \in C[a,b]$.

Το μηδενικό στοιχείο του $C[a,b]$ είναι η μηδενική συνάρτηση:

$$O(x) = 0 \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Η αντίθετη συνάρτηση της $f(x) \in C[a,b]$ είναι η

$$(-f)(x) = -f(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο $C[a,b]$ με τις πιο πάνω πράξεις είναι διανυσματικός χώρος. Σημειώνουμε ότι τα στοιχεία του $C[a,b]$ είναι συναρτήσεις $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ και όχι πραγματικοί αριθμοί.

Ενας διανυσματικός χώρος με στοιχεία συναρτήσεις ονομάζεται <u>χώρος συναρτήσεων</u> ή <u>συναρτησιακός χώρος</u> (functional space).

Παράδειγμα 6

Το σύνολο $M_{m\times n}$ των $m\times n$ πινάκων εφοδιασμένο με τη γνωστή πρόσθεση πινάκων και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό είναι διανυσματικός χώρος.

Ας πάρουμε για παράδειγμα το χώρο $M_{2\times 3}$. Αν είναι

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

δύο στοιχεία του $M_{2\times 3}$, τότε

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}$$

Για κάθε $\lambda \in K$ έχουμε

$$\lambda A=\lambda\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}$$

Το μηδενικό στοιχείο του $M_{2\times 3}$ είναι ο μηδενικός πίνακας

$$0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

και το αντίθετο στοιχείο του $A\in M_{2\times 3}$ είναι ο πίνακας

$$-A=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 7

Έστω A το σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών

$$\{a_n\}=(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$$

Αν ορίσουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

$$\{a_n\}+\{b_n\}=(a_1,a_2,\dots,a_n,\dots)+(b_1,b_2,\dots,b_n,\dots)$$
$$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\dots,a_n+b_n,\dots)$$
$$=\{a_n+b_n\}$$

και

$$\lambda\{a_n\}=\lambda\,(a_1,a_2,\dots,a_n,\dots)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\dots,\lambda a_n,\dots)$$
$$=\{\lambda a_n\}$$

όπου $\{a_n\},\{b_n\}\in A$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε το A γίνεται ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.

Το μηδενικό διάνυσμα του A είναι προφανώς η ακολουθία

$$\{0\}=(0,0,\dots,0,\dots)$$

ενώ το αντίθετο στοιχείο του $\{a_n\}\in A$ είναι η ακολουθία

$$\{-a_n\}=(-a_1,-a_2,\dots,-a_n,\dots).$$

2.1.1 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Οι στοιχειώδεις ιδιότητες των διανυσματικών χώρων συνοψίζονται στις προτάσεις που ακολουθούν.

Πρόταση 2.1.2

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K. Ισχύουν τα εξής:

(α) Το μηδενικό στοιχείο $\mathbb{O}$ του V είναι μοναδικό.

(β) Το αντίθετο στοιχείο $-u$ του $u \in V$ είναι μοναδικό.

(γ) Αν $u, v, w \in V$ και

$$u + w = v + w \quad \text{τότε} \quad u = v.$$

(νόμος της διαγραφής - cancellation law).

(δ) Αν $u \in V$ τότε $-(-u) = u$.

Απόδειξη

(α) Εξ ορισμού υπάρχει ένα μηδενικό στοιχείο $\mathbb{O}$ του V τέτοιο ώστε

$$u + \mathbb{O} = u \quad \forall u \in V \tag{1}$$

Εστω $\mathbb{O}'$ ένα άλλο μηδενικό στοιχείο του V, οπότε

$$u + \mathbb{O}' = u \quad \forall u \in V \tag{2}$$

Από την (2) και την ιδιότητα Α4 (αντιμεταθετικότητα) παίρνουμε:

$$u = u + \mathbb{O}' = \mathbb{O}' + u$$

Θέτοντας $u = \mathbb{O}$ βρίσκουμε ότι

$$\mathbb{O} = \mathbb{O}' + \mathbb{O} \tag{3}$$

Από τις (1) και (3) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{O} = \mathbb{O}'$$

Αρα το μηδενικό στοιχείο του V είναι μοναδικό.

(β) Εξ ορισμού υπάρχει το αντίθετο στοιχείο $-u$ του $u \in V$ τέτοιο ώστε

$$u + (-u) = (-u) + u = \mathbb{O} \tag{4}$$

Εστω u' ένα άλλο αντίθετο στοιχείο του u, οπότε

$$u + u' = u' + u = \mathbf{0} \qquad (5)$$

Για το u' έχουμε:

$$\begin{aligned} u' = u' + \mathbf{0} &= u' + (u + (-u)) \\ &= (u' + u) + (-u) \qquad [A1] \\ &= \mathbf{0} + (-u) = -u . \end{aligned}$$

Βρήκαμε ότι $u' = -u$. Άρα το αντίθετο στοιχείο του u είναι μοναδικό.

(γ) Έχουμε

$$\begin{aligned} u + w &= v + w \implies \\ (u + w) + (-w) &= (v + w) + (-w) \implies \\ u + (w + (-w)) &= v + (w + (-w)) \qquad [A1] \implies \\ u + \mathbf{0} &= v + \mathbf{0} \implies \\ u &= v . \end{aligned}$$

(δ) Για τα u και $-u$ έχουμε:

$$u + (-u) = (-u) + u = \mathbf{0} \qquad (6)$$

$$(-u) + (-(-u)) = \mathbf{0} \qquad (7)$$

Εξισώνοντας τις (6) και (7) βρίσκουμε:

$$(-u) + u = (-u) + (-(-u))$$

Από το (γ) (νόμος της απαλοιφής) βρίσκουμε τελικά ότι

$$-(-u) = u . \qquad ■$$

<u>Πρόταση 2.1.3</u>

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$. Ισχύουν τα εξής:

(α) $0 \cdot u = \mathbb{O} \quad \forall u \in V$

(β) Αν $a \in \mathbb{R}$ και $\mathbb{O} \in V$ τότε $a\mathbb{O} = \mathbb{O}$

(γ) Αν $au = \mathbb{O}$ όπου $a \in \mathbb{R}$ και $u \in V$, τότε

$$a = 0 \quad \text{ή} \quad u = \mathbb{O}$$

(δ) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $u \in V$ ισχύει

$$(-a)\,u = -(au)$$

Ειδικότερα,

$$(-1)\,u = -u$$

<u>Απόδειξη</u>

Αφήνεται ως άσκηση. Για το (δ) μπορούμε να αποδείξουμε πρώτα τις

$$-(au) = a(-u) \qquad (1)$$

$$a(-u) = (-a)\,u \qquad (2)$$

από τις οποίες προκύπτει αμέσως το ζητούμενο. $\square$

2.2 ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Σ' ένα γραμμικό χώρο V ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα υποσύνολα του που είναι κλειστά ως προς τις πράξεις της προσθέσεως και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του V.

Για παράδειγμα, ας πάρουμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ και τα κάτωθι υποσύνολά του:

$$S_1 = \{(x,y) \mid xy = 1 \, , \, x,y \in \mathbb{R}\}$$

και

$$S_2 = \{(x,y) \mid y = 2x \, , \, x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να διαπιστώσει ότι το S_1 δεν είναι κλειστό ως προς τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμου. Πράγματι, ενώ

$$(1,1) \in S_1 \quad \text{και} \quad \left(2,\tfrac{1}{2}\right) \in S_1 \, ,$$

το άθροισμά τους

$$(1,1) + \left(2,\tfrac{1}{2}\right) = \left(3,\tfrac{3}{2}\right) \notin S_1$$

αφού $3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \neq 1$.

Ανάλογα, ενώ

$$(-1,-1) \in S_1 \, ,$$

το

$$4(-1,-1) = (-4,-4) \notin S_1 \quad \text{αφού} \quad (-4)(-4) = 16 \neq 1.$$

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι το ότι το S_1 δεν περιέχει το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{O} = (0,0) \notin S_1 .$$

Σε αντίθεση με το S_1, το υποσύνολο S_2 είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, και μάλιστα περιέχει το μηδενικό στοιχείο $\mathbb{O} = (0,0)$ του $\mathbb{R}^2$.

Ας πάρουμε δύο (τυχαία) στοιχεία του S_2:

$$u = (a, 2a) \in S_2 \quad \text{και} \quad v = (b, 2b) \in S_2 .$$

Το άθροισμά τους είναι:

$$u+v = (a, 2a) + (b, 2b) = \big((a+b), 2(a+b) \big) \in S_2$$

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\lambda u = \lambda (a, 2a) = \big((\lambda a), 2(\lambda a) \big) \in S_2 \, .$$

Τέλος έχουμε:

$$(0, 2\cdot 0) = (0, 0) = \mathbb{O} \in S_2 \, .$$

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις μας οδηγούν στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.1

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο K. Ενα μη κενό υποσύνολο W του V καλείται (διανυσματικός) υπόχωρος (subspace) του V αν το W είναι επίσης διανυσματικός χώρος πάνω στο K με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του V.

Θεώρημα 2.2.2

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο K. Το υποσύνολο W του V είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:

(α) $\mathbb{O} \in W$ όπου $\mathbb{O}$ το μηδενικό στοιχείο του V.

(β) $u+v \in W \quad \forall u, v \in W$

(κλειστότητα ως προς την πρόσθεση).

(γ) $a u \in W \quad \forall u \in W$ και $a \in K$

(κλειστότητα ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό)

Ειδικότερα,

$$(-1) u = -u \in W \quad \forall u \in W \, .$$

Απόδειξη. Είναι απλή και βασίζεται στους ορισμούς 2.1.1 και 2.2.1. $\square$

<u>Σημείωση</u>: Η συνθήκη 2.2.2γ περιλαμβάνει τη 2.2.2α αν το W είναι μη κενό υποσύνολο του V.

Πράγματι, αν $u \in W$ θέτοντας $a=0$ παίρνουμε:

$$0 \cdot u \in W \Rightarrow \mathbb{O} \in W.$$

Μπορούμε επίσης εύκολα να αποδείξουμε το ακόλουθο λήμμα.

> <u>Λήμμα 2.2.3</u>
>
> Ενα μη κενό υποσύνολο W του V είναι ένας υπόχωρος του V αν και μόνο αν
>
> $$au + v \in W \quad \forall a \in K \text{ και } u, v \in W.$$

<u>Απόδειξη</u>.

<u>Ικανό</u>

Αν ο W είναι υπόχωρος του V, τότε.

$$au \in W \quad \forall a \in K \text{ και } u \in W$$

και

$$w + v \in W \quad \forall w, v \in W.$$

Αν θέσουμε $w = au$, τότε ισχύει

$$au + v \in W \quad \forall a \in K \text{ και } u, v \in W$$

<u>Αναγκαίο</u>.

Θα δείξουμε ότι αν ισχύει

$$au + v \in W \quad \forall a \in K \text{ και } u, v \in W \qquad (1)$$

και το W είναι μη κενό, τότε ικανοποιούνται και οι τρεις συνθήκες του Θ. 2.2.2.

(α) Εφόσον το W είναι μη κενό τότε υπάρχει τουλάχιστο ένα στοιχείο $u \in W$.
Θέτοντας $a=-1$ και $v=u$ παίρνουμε από την (1):

$$(-1)u + u = (-u) + u = \mathbb{O} \in W$$

(β) Θέτοντας $a=1$, παίρνουμε από την (1):

$$1 \cdot u + v = u + v \in W$$

(γ) Θέτοντας $v = \mathbb{0}$, παίρνουμε από την (1):

$$a u + \mathbb{0} = a u \in W$$

Οι συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2 ικανοποιούνται. Αρα ο W είναι υπόχωρος του V. ■

Παρατήρηση

Το υποσύνολο $\{\mathbb{0}\}$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι υπόχωρος του V και ονομάζεται μηδενικός υπόχωρος του V.

Επίσης ο V είναι υπόχωρος του εαυτού του.

Οι $\{\mathbb{0}\}$ και V καλούνται τετριμμένοι υπόχωροι του V.

Αν ο W είναι υπόχωρος του V και $W \neq V$, τότε ο W καλείται γνήσιος υπόχωρος (proper subspace) του V.

Παράδειγμα 1.

. Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$, το σύνολο

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax,\ a \in \mathbb{R} \text{ σταθερά}\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. Στο επίπεδο, το σύνολο W παριστάνει μια ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων.

Επαληθεύουμε στη συνέχεια τις συνθήκες (α) − (γ) του Θ. 2.2.2.

(α) Το $(0,0)$ είναι σημείο της ευθείας $y = ax \Rightarrow$
$\mathbb{O} = (0,0) \in W$

(β) Εστω $u = (x_1, y_1)$ και $v = (x_2, y_2)$ δύο σημεία του W οπότε

$$y_1 = a x_1 \quad \text{και} \quad y_2 = a x_2 .$$

Για το άθροισμα των u και v έχουμε:

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, a(x_1 + x_2)) \in W$$

(γ) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1) = (\lambda x_1, a(\lambda x_1)) \in W.$$

Παράδειγμα 2

Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$, το σύνολο

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + \gamma z = 0,\ a, b, \gamma \in \mathbb{R} \text{ σταθερές}\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Θα δείξουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες (α)−(γ) του Θ. 2.2.2.

(α) Το $\mathbb{O} = (0,0,0) \in Y$, καθόσον

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = 0$$

(β) Εστω $u = (x_1, y_1, z_1)$ και $v = (x_2, y_2, z_2)$ δύο σημεία του Y οπότε:

$$a x_1 + b y_1 + \gamma z_1 = 0 \quad \text{και} \quad a x_2 + b y_2 + \gamma z_2 = 0. \quad (1)$$

Για το άθροισμα των u και v έχουμε:

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in Y,$$

αφού από τις (1) ισχύει:

$$\alpha(x_1+x_2)+\beta(y_1+y_2)+\gamma(z_1+z_2)=0.$$

(γ) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in Y$$

αφού

$$\alpha(\lambda x_1)+\beta(\lambda y_1)+\gamma(\lambda z_1)=0.$$

Παράδειγμα 3.

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο των 2x2 πινάκων $M_{2\times2}(\mathbb{R})$. Θα εξετάσουμε αν τα κάτωθι υποσύνολα του $M_{2\times2}$ είναι υπόχωροι του $M_{2\times2}$.

I $W_1 = \left\{ A : A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}, \; a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$

II $W_2 = \left\{ A : A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \; a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{Z} \right\}$

III $W_3 = \left\{ A : A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; a_{12} \in \mathbb{R} \right\}.$

IV $W_4 = \left\{ A : A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \; a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}.$

Σε όλες τις περιπτώσεις θα ελέγξουμε αν ισχύουν οι τρείς συνθήκες του Θ. 2.2.2.

I Το W_1 είναι το υποσύνολο των 2x2 πινάκων με μηδενικά ~~διαγώντα~~ στοιχεία.

(α) $\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_1$

(β) Εστω

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

δύο στοιχεία του W_1.

$$A+B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & 0 \end{bmatrix} \in W_1$$

(γ) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$

$$aA = a\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & aa_{12} \\ aa_{21} & 0 \end{bmatrix} \in W_1$$

Οι συνθήκες (α)–(γ) του Θ. 2.2.2 ισχύουν. Άρα ο W_1 είναι υπόχωρος του $M_{2\times2}$.

II Το W_2 είναι το υποσύνολο των 2x2 πινάκων των οποίων τα στοιχεία είναι ακέραιοι.

(α) $\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_2$.

(β) Εστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

δύο στοιχεία του W_2.

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία του $A+B$ είναι ακέραιοι (ως αθροίσματα ακεραίων). Άρα

$$A+B \in W_2.$$

(γ) Εστω $a \in \mathbb{R}$.

$$aA = a\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_{11} & aa_{12} \\ aa_{21} & aa_{22} \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία του aA δεν είναι γενικά ακέραιοι, ως γινόμενα πραγματικού με ακέραιο. Άρα

$$aA \notin W_2.$$

Η συνθήκη (γ) του Θ. 2.2.2 δεν ισχύει πάντοτε. Άρα ο W_2 δεν είναι υπόχωρος του $M_{2\times2}$.

III Το W_3 είναι το υποσύνολο των 2x2 πινάκων με μηδενική τη δεύτερη γραμμή των οποίων το στοιχείο στη θέση (1,1) είναι ίσο με τη μονάδα.

(α) $\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin W_3$.

Δεν ισχύει η συνθήκη (α) του Θ. 2.2.2. Άρα ο W_3 δεν είναι υπόχωρος του $M_{2\times 2}$.
Σημείωση: Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει ότι ούτε οι συνθήκες (β)-(γ) του Θ. 2.2.2 ισχύουν.

IV Το W_4 είναι το υποσύνολο των 2x2 <u>άνω τριγωνικών πινάκων</u>.

(α) $\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_4$.

(β) Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}.$$

δύο στοιχεία του W_4.

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ 0 & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} \in W_4.$$

(γ) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

$$aA = \begin{bmatrix} a\,a_{11} & a\,a_{12} \\ 0 & a\,a_{22} \end{bmatrix} \in W_4.$$

Οι συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2 ικανοποιούνται. Άρα ο W_4 είναι υπόχωρος του $M_{2\times 2}$.

Παράδειγμα 4.

Εστω A ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών ακολουθιών. Συμβολίζουμε με B το υποσύνολο (του A) των συγκλινουσών ακολουθιών. Θα δείξουμε ότι το B είναι υπόχωρος του A.

(α) $\mathbb{O} = (0, 0, \dots, 0, \dots) \in B$

(Η ακολουθία της οποίας όλοι οι όροι είναι ίσοι με μηδέν συγκλίνει προφανώς στο 0).

(β) Εστω

$$\{a_n\} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in B.$$
$$\{b_n\} = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) \in B.$$

δύο συγκλίνουσες ακολουθίες. Εφόσον οι $\{a_n\}, \{b_n\}$ συγκλίνουν, τότε και το άθροισμά τους.

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n, \dots)$$

συγκλίνει $\Longrightarrow$

$$\{a_n\} + \{b_n\} \in B.$$

(γ) Αν η $\{a_n\}$ συγκλίνει, τότε και η

$$a\{a_n\} = \{a a_n\} = (a a_1, a a_2, \dots, a a_n, \dots), \ a \in \mathbb{R}$$

συγκλίνει $\Longrightarrow$

$$a\{a_n\} \in B$$

Οι συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2 ικανοποιούνται. Αρα το B είναι υπόχωρος του A.

<u>Σημείωση</u>: Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι το υποσύνολο Γ των μηδενικών ακολουθιών είναι υπόχωρος του B (και του A).

Παράδειγμα 5.

Εστω $C[a,b]$ ο διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$ και Y το υποσύνολο των συναρτήσεων του $C[a,b]$ που είναι παραγωγίσιμες στο $[a,b]$. Τότε το Y είναι ένας γνήσιος υπόχωρος του $C[\alpha,\beta]$. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 6.

Εστω F_2 ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών συναρτήσεων που είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. και W το υποσύνολο των συναρτήσεων του F_2 που είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$3y'' - 2y' + y = 0 \qquad (1).$$

Το W είναι υπόχωρος του F_2.

Ελέγχουμε ξανά αν ικανοποιούνται οι συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2.

(α) Η μηδενική συνάρτηση $O(x)=0$ είναι προφανώς λύση της (1) $\Rightarrow$ $O(x) \in W$.

(β) Εστω y_1 και y_2 δυο λύσεις της (1), οπότε

$$3y_1'' - 2y_1' + y_1 = 0 \quad \text{και} \quad 3y_2'' - 2y_2' + y_2 = 0$$

Το άθροισμα y_1+y_2 είναι λύση της (1) αφού

$$3(y_1+y_2)'' - 2(y_1+y_2)' + (y_1+y_2) =$$

$$= (3y_1''-2y_1'+y_1) + (3y_2''-2y_2'+y_2) = 0+0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_1+y_2 \in W.$$

(γ) Αν $a \in \mathbb{R}$, τότε η ay_1 είναι επίσης λύση της (1) αφού

$$3(ay_1)'' - 2(ay_1)' + (ay_1) =$$

$$= a(3y_1''-2y_1'+y_1) = a.0 = 0 \Rightarrow$$

$$ay_1 \in W$$

2.3 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΤΟΜΗ ΥΠΟΧΩΡΩΝ

Ορισμός 2.3.1

Εστω W_1 και W_2 δυο υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο K. Καλούμε άθροισμα (sum) των W_1 και W_2, και το συμβολίζουμε με W_1+W_2, το σύνολο:

$$W_1+W_2 = \{ w_1+w_2 \mid w_1 \in W_1 ,\ w_2 \in W_2 \}.$$

Θεώρημα 2.3.2

Εστω W_1 και W_2 δυο υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο K.

(i) Η τομή $W_1 \cap W_2$ των W_1 και W_2 είναι επίσης υπόχωρος του V.

(ii) Το ~~άθροισμα W_1+W_2 των W_1 και W_2~~ είναι επίσης υπόχωρος του V.

Απόδειξη

Θα δείξουμε και στις δύο περιπτώσεις ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2.

(i) (α) Οι W_1 και W_2 είναι υπόχωροι του V:

Συνεπώς $\mathbb{O} \in W_1$ και $\mathbb{O} \in W_2 \Rightarrow$

$\mathbb{O} \in W_1 \cap W_2$.

(β) Εστω δύο διανύσματα $u, v \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow$

$u, v \in W_1$ και $u, v \in W_2 \Rightarrow$

$u+v \in W_1$ και $u+v \in W_2$ (γιατί;) $\Rightarrow$

$u+v \in W_1 \cap W_2$.

(γ) Εστω $a \in K$ και $u \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow$

$u \in W_1$ και $u \in W_2 \Rightarrow$

$au \in W_1$ και $au \in W_2 \Rightarrow$

$au \in W_1 \cap W_2$.

(ii) (α) $\mathbb{O} \in W_1$ και $\mathbb{O} \in W_2 \Longrightarrow$

$\mathbb{O} + \mathbb{O} \in W_1 + W_2 \Longrightarrow$

$\mathbb{O} \in W_1 + W_2$

(β) Εστω δύο διανύσματα $u, v \in W_1 + W_2$. Αρα $\exists$ $u_1, v_1 \in W_1$ και $u_2, v_2 \in W_2$ τέτοια ώστε

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{και}$$
$$v = v_1 + v_2.$$

Για το άθροισμα των u και v έχουμε:

$$u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$$

Επειδή $u_1 + v_1 \in W_1$ και $u_2 + v_2 \in W_2 \Longrightarrow$

$u + v \in W_1 + W_2$.

(γ) Εστω ότι $u \in W_1 + W_2$. Αρα υπάρχουν $u_1 \in W_1$ και $u_2 \in W_2$ τέτοια ώστε:

$$u = u_1 + u_2 \Longrightarrow$$

$$au = au_1 + au_2 \quad \text{με } a \in K.$$

Επειδή

$au_1 \in W_1$ και $au_2 \in W_2$ (γιατί;) $\Longrightarrow$

$$au = au_1 + au_2 \in W_1 + W_2 \quad \blacksquare$$

Το Θεώρημα 2.3.2 γενικεύεται ως εξής:

<u>Θεώρημα 2.3.3</u>

Εστω $W_1, W_2, \ldots, W_k$ υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο K. Τότε τα υποσύνολα

(i) $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_k$ και

(ii) $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$

είναι επίσης υπόχωροι του V.

<u>Απόδειξη</u>.

Παρόμοια με αυτή του Θεωρ. 2.3.2. $\square$

Ορισμός 2.3.4

Εστω W_1 και W_2 δύο υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V πάνω στο K. Αν για κάθε στοιχείο $v \in V$ υπάρχουν μοναδικά στοιχεία $w_1 \in W_1$ και $w_2 \in W_2$ τέτοια ώστε

$$v = w_1 + w_2$$

τότε ο V καλείται ευθύ άθροισμα (direct sum) των W_1 και W_2, συμβολικά:

$$V = W_1 \oplus W_2 .$$

Λέμε τότε ότι οι W_1 και W_2 είναι συμπληρωματικοί στον V.

Θεώρημα 2.3.5

Εστω W_1 και W_2 δύο υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V πάνω στο K. Αν

$$W_1 + W_2 = V$$

και

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

τότε

$$V = W_1 \oplus W_2 .$$

Απόδειξη

Εστω $v \in V$. Εφόσον $W_1 + W_2 = V$, υπάρχουν στοιχεία $w_1 \in W_1$ και $w_2 \in W_2$ τέτοια ώστε

$$v = w_1 + w_2 \qquad (1).$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3.4 για να είναι

$$V = W_1 \oplus W_2$$

πρέπει τα στοιχεία w_1, w_2 να είναι μοναδικά.

Εστω λοιπόν ότι υπάρχουν δύο άλλα στοιχεία

$w_1' \in W_1$ και $w_2' \in W_2$ τέτοια ώστε:

$$v = w_1' + w_2' \qquad (2).$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

$$w_1 + w_2 = w_1' + w_2' \Rightarrow$$

$$w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \qquad (3)$$

Λόγω της κλειστότητας των W_1 και W_2 ως προς την πρόσθεση

$$w_1 - w_1' \in W_1 \quad \text{και} \quad w_2' - w_2 \in W_2 .$$

οπότε

$$w^* = w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2 .$$

Εφόσον $W_1 \cap W_2 = \{0\} \Rightarrow$

$$w^* = w_1 - w_1' = w_2' - w_2 = 0 \Rightarrow$$

$$w_1' = w_1 \quad \text{και} \quad w_2' = w_2 .$$

Αρα τα w_1 και w_2 είναι μοναδικά. ■

<u>Παρατήρηση</u>

Με διαφορετικά λόγια, το Θ. 2.3.5 μας λέει ότι οι W_1, W_2 είναι συμπληρωματικοί στον V αν συμβαίνουν δύο πράγματα:

(i) Κάθε στοιχείο $v \in V$ γράφεται ως άθροισμα δύο στοιχείων των W_1 και W_2, δηλ.

$$v = w_1 + w_2 \quad \text{με} \quad w_1 \in W_1 \quad \text{και} \quad w_2 \in W_2 .$$

(ii) Οι W_1, W_2 τέμνονται μόνο στο μηδενικό διάνυσμα ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$).

<u>Παράδειγμα 1</u>

Ο χώρος $\mathbb{R}^2$ είναι το ευθύ άθροισμα των υποχώρων του:

$$X = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} .$$

$$Y = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} .$$

Πράγματι, κάθε στοιχείο $v=(x,y)$ του $\mathbb{R}^2$ γράφεται ως άθροισμα δύο στοιχείων των X και Y:

$(x,y)=(x,0)+(0,y)$ όπου $(x,0)\in X$ και $(0,y)\in Y$.

Αρα $X+Y=\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$X\cap Y=\{(0,0)\}=\{\mathbb{O}\}$.

Σύμφωνα με το Θ. 2.3.5, $\mathbb{R}^2=X\oplus Y$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.

2.1 Να επαληθευτούν όλα τα παραδείγματα διανυσματικών χώρων της § 2.1.

2.2 Να αποδειχτεί το Θεώρημα 2.1.3

2.3 Εστω P ο διανυσματικός χώρος όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Ποια από τα κάτωθι υποσύνολα είναι υπόχωροι του P;

(α) $W_1 = \{ p(x) \mid 2p(0) = p(1) \}$

(β) $W_2 = \{ p(x) \mid p(x) = p(1-x) \}$

(γ) $W_3 = \{ p(x) \mid p(x) \geq 0 ,\ 1 \leq x \leq 2 \}$

(δ) $W_4 = \{ p(x) \mid p(1) = 0 \}$

2.4 Εστω $C[0,1]$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$. Ποια από τα κάτωθι υποσύνολα του $C[0,1]$ είναι υπόχωροί του;

(α) $W_1 = \{ f \in C[0,1] : f(1) = 0 \}$

(β) $W_2 = \{ f \in C[0,1] : f(1) = 1 \}$

(γ) $W_3 = \{ f \in C[0,1] : f(0) = f(1) \}$

(δ) $W_4 = \{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \}$

(ε) $W_5 = \{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(x)\,dx = 1 \}$

2.5 Εστω A το σύνολο των άρτιων συνεχών συναρτήσεων και Π το σύνολο των περιττών συνεχών συναρτήσεων. Να δειχθεί ότι:

$$C(\mathbb{R}) = A \oplus \Pi$$

2.6 Εστω P_2 ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού ≤ 2 με πραγματικούς συντελεστές.
Ποια από τα κάτωθι υποσύνολα του P_2 είναι υπόχωροί του;

(α) $W_1 = \{p(x) : p(x) = a_0 + a_2 x^2, \ a_0, a_2 \in \mathbb{R}\}$

(β) $W_2 = \{p(x) : p(x) = n_0 + n_1 x + n_2 x^2, \ n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$

(γ) $W_3 = \{p(x) : p(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2, \ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

2.7 Να δείξετε ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι το ευθύ άθροισμα των δύο υπόχωρών του

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$$

$$W_2 = \{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}.$$

2.8 Εαν a_1, a_2 είναι δύο δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί, η ακολουθία $\{a_n\}$ που ορίζεται με τον αναδρομικό τύπο

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n = 3, 4, \dots$$

λέγεται ακολουθία Fibonacci.

Να δείξετε ότι το σύνολο F των ακολουθιών Fibonacci είναι ένας υπόχωρος του συνόλου A όλων των πραγματικών ακολουθιών.

3 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

3.1 ΥΠΟΧΩΡΟΙ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΟΙ ΑΠΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ορισμός 3.1.1

Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω σ' ένα σώμα K. Ας είναι

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Καλούμε γραμμικό συνδυασμό (linear combination) των διανυσμάτων $u_1, u_2, \dots, u_m$ κάθε διάνυσμα της μορφής

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_m u_m, \quad \lambda_i \in K$$

Παρατήρηση: είναι προφανές ότι $u \in V$.

Παράδειγμα 1. Ας πάρουμε τα διανύσματα

$$u_1 = (1,1,1) \quad \text{και} \quad u_2 = (-1,0,1) \quad \text{του } \mathbb{R}^3.$$

Τα

$$u_1 - u_2 = (1,1,1) - (-1,0,1) = (2,1,0)$$

και

$$2u_1 + 3u_2 = 2(1,1,1) + 3(-1,0,1) = (-1,2,5)$$

είναι γραμμικοί συνδυασμοί των u_1 και u_2.

Παράδειγμα 2 Θεωρούμε τα διανύσματα

$$u_1 = (1,1,1) \quad \text{και} \quad u_2 = (1,0,1) \quad \text{του } \mathbb{R}^3.$$

Θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα

(i) $u = (1,2,1)$ και (ii) $u = (3,2,2)$

μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των u_1 και u_2.

(i) Αναζητούμε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \iff$$

$$(1,2,1) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,0,1) \Rightarrow$$

$$(\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1, \lambda_1+\lambda_2) = (1,2,1) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 \quad\quad\; = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{array}\right\}$$

Το σύστημα είναι συμβιβαστό και έχει τη (μοναδική) λύση: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Συνεπώς, το u εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2:

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 2(1,1,1) - (1,0,1).$$

(ii) Αναζητούμε πάλι $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$(3,2,2) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,0,1) \iff$$

$$(\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1, \lambda_1+\lambda_2) = (3,2,2) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 \quad\quad\; = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{array}\right\}$$

Το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό. Συνεπώς το u δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των u_1 και u_2.

Θεώρημα 3.1.2

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σ' ένα σώμα K και ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V:

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $u_1, u_2, \dots, u_m$:

$$L(S) = \left\{u \in V : u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \ \lambda_i \in K\right\}$$

είναι υπόχωρος του V.

Απόδειξη

Επαληθεύουμε τις συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2.

(α) Για $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ παίρνουμε:

$$0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_m = \mathbb{O} \in L(S)$$

(β) Εστω δυο γραμμικοί συνδυασμοί των $u_1, u_2, \ldots, u_m$:

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m \quad , \quad \lambda_i \in K.$$

$$v = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_m u_m \quad , \quad \mu_i \in K.$$

Εχουμε για το άθροισμα των u και v:

$$u + v = (\lambda_1 + \mu_1) u_1 + (\lambda_2 + \mu_2) u_2 + \cdots + (\lambda_m + \mu_m) u_m \in L(S)$$

(γ) Για $a \in K$ έχουμε

$$au = (a\lambda_1) u_1 + (a\lambda_2) u_2 + \cdots + (a\lambda_m) u_m \in L(S).$$

Σύμφωνα με το Θ. 2.2.2 ο $L(S)$ είναι υπόχωρος του V. $\blacksquare$

<u>Ορισμός 3.1.3</u>

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σ' ένα σώμα K και $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Το σύνολο $L(S)$ των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $u_1, u_2, \ldots, u_m$ είναι ο υπόχωρος του V που <u>παράγεται</u> (ή γεννιέται) από τα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Τα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_m$ λέμε ότι <u>παράγουν</u> (ή γεννούν) τον $L(S)$ και καλούνται <u>γεννήτορες</u> του $L(S)$

Για το $L(S)$ χρησιμοποιούνται επίσης οι εξής συμβολισμοί:

$$L(u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad [S] \quad , \quad [u_1, u_2, \ldots, u_m]$$

ή ακόμα

$$\text{span}[u_1, u_2, \ldots, u_n].$$

Το $L(S)$ καλείται <u>γραμμική θήκη</u> ή <u>περίβλημα</u> (linear span) των $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Τα διανύσματα

$$e_1=(1,0,0)\ ,\quad e_2=(0,1,0)\quad \text{και}\quad e_3=(0,0,1)$$

παράγουν τον $\mathbb{R}^3$.

Πράγματι, κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των e_1,e_2,e_3:

$$(x_1,x_2,x_3)=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Στο χώρο P_n των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και με βαθμό $\leq n$, το σύνολο

$$S=\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$$

είναι ένα σύνολο γεννητόρων για τον P_n, δηλ. ο P_n παράγεται από το S.

Πραγματικά, κάθε πολυώνυμο του P_n,

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει ο αναγνώστης ότι και το σύνολο

$$S'=\{1,x,1+x,x^2,\ldots,x^n\}$$

είναι επίσης ένα σύνολο γεννητόρων για τον P_n.

Παρατηρούμε ότι ένας διανυσματικός χώρος μπορεί να έχει περισσότερα από ένα σύνολα γεννητόρων.

Είναι ενδιαφέρον — και πολύ χρήσιμο για τις εφαρμογές — να σημειωθεί ότι ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα $u_1,u_2,\ldots,u_m$ δεν αλλάζει αν κάνουμε μια ή περισσότερες φορές τις επόμενες πράξεις:

(Π1): αλλάζουμε την τάξη των $u_1,u_2,\ldots,u_m$.

(Π2): πολλαπλασιάσουμε ένα από τα $u_1,u_2,\ldots,u_m$ με ένα μη μηδενικό στοιχείο του K.

(Π3): αντικαταστήσουμε ένα από τα $u_1, u_2, \dots, u_m$ με τον εαυτό του αυξημένο κατά ένα πολλαπλάσιο ενός άλλου απ' αυτά.

Η μαθηματική διατύπωση των (Π1)-(Π3) είναι η ακόλουθη:

(Π1): $L(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m) = L(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_m)$

(Π2): $L(u_1, \dots, u_i, \dots, u_m) = L(u_1, \dots, a u_i, \dots, u_m)$, $a \neq 0 \in K$.

(Π3): $L(u_1, \dots, u_i, \dots, u_m) = L(u_1, \dots, u_i + b u_j, \dots, u_m)$, $j \neq i$

<u>Απόδειξη:</u> Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του πρώτου μέλους είναι και γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του δεύτερου μέλους και αντίστροφα.

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Οι πράξεις (Π1)-(Π3) ονομάζονται <u>στοιχειώδεις πράξεις</u>.

<u>Παράδειγμα</u> Ας είναι V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$ και X_1, X_2, X_3 διανύσματά του τέτοια ώστε

$$3X_1 - 5X_2 + 2X_3 = \mathbb{O}$$

Θα δείξουμε ότι: $L(X_1, X_2) = L(X_2, X_3)$.

Εφαρμόζουμε διαδοχικά τις στοιχειώδεις πράξεις και παίρνουμε:

$$L(X_1, X_2) \overset{\Pi 2}{=} L(3X_1, X_2) \overset{\Pi 3}{=} L(3X_1 - 5X_2, X_2)$$
$$= L(-2X_3, X_2) \overset{\Pi 2}{=} L(X_3, X_2) \overset{\Pi 1}{=} L(X_2, X_3).$$

3.2 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Στην περίπτωση που ένας διανυσματικός χώρος παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων είναι βασικό να καθορίσουμε σύνολα γεννητόρων με το μικρότερο αριθμό στοιχείων. Για την επίτευξη του πιο πάνω στόχου είναι απαραίτητη η εισαγωγή της έννοιας της γραμμικής ανεξαρτησίας.

<u>Ορισμός 3.2.1</u>

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σ' ένα σώμα K και ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ του V. Τα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ θα λέμε ότι είναι <u>γραμμικώς εξαρτημένα</u> (linearly dependent) ή απλώς <u>εξαρτημένα</u> αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ που δεν είναι όλα μηδέν έτσι ώστε:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \mathbb{O}$$

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε επίσης ότι το πεπερασμένο σύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ είναι <u>γραμμικώς εξαρτημένο</u>.

Αν η πιο πάνω σχέση ισχύει μόνον όταν όλα τα λ_i είναι μηδέν, δηλ. αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \mathbb{O} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

θα λέμε ότι τα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι <u>γραμμικώς ανεξάρτητα</u> (linearly independent).

<u>Παράδειγμα</u> Τα διανύσματα

$u_1 = (2,-1,3,1)$, $u_2 = (0,3,-2,4)$ και $u_3 = (0,0,2,-3)$ του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι η σχέση

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \mathbb{O}$$

ισχύει μόνο όταν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Στο παράδειγμά μας η πιο πάνω σχέση γράφεται:

$\lambda_1(2,-1,3,1)+\lambda_2(0,3,-2,4)+\lambda_3(0,0,2,-3)=(0,0,0,0)$.

και οδηγεί στο ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ -\lambda_1+3\lambda_2 \qquad\quad &= 0 \\ 3\lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1+4\lambda_2-3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

που έχει μοναδική λύση τη $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Αν ο V είναι διανυσματικός χώρος πάνω σ' ένα σώμα K και S ένα μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του V, τότε από τον Ορισμό 3.2.1 αποδεικνύονται εύκολα οι ακόλουθες προτάσεις:

(A) Αν τα στοιχεία του S είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε κάθε μη κενό γνήσιο υποσύνολο του S αποτελείται από γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία.

<u>Απόδειξη</u>.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το υποσύνολο που περιέχει τα πρώτα m στοιχεία του S. $(m<n)$. Αν τα $u_1,u_2,\dots,u_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε σύμφωνα με τον ορισμό 3.2.1 υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\in K$ που δεν είναι όλα μηδέν έτσι ώστε

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\dots+\lambda_mu_m=\mathbb{O}$$

και

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\dots+\lambda_mu_m+0u_{m+1}+\dots+0u_n=\mathbb{O}$$

Υπάρχουν δηλ. $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ που δεν είναι όλα μηδέν έτσι ώστε:

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\dots+\lambda_nu_n=\mathbb{O}$$

Αυτό είναι άτοπο καθόσον τα $u_1,u_2,\dots,u_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Η αρχική μας υπόθεση δεν ισχύει, άρα τα $u_1,u_2,\dots,u_m$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα. ∎

(Β) Το στοιχείο $u \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αν και μόνο αν $u \neq \mathbb{O}$.

<u>Απόδειξη</u>: Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

(Γ) Αν μερικά στοιχεία του S είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε το S αποτελείται από γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία.

<u>Απόδειξη</u>: Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Ειδικότερα, αν $\mathbb{O} \in S$, τότε τα στοιχεία του S είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

<u>Απόδειξη</u>

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $u_1 = \mathbb{O}$. Τότε

$$\lambda_1 \mathbb{O} + 0\, u_2 + \cdots + 0 \cdot u_n = \mathbb{O} \quad \text{με } \lambda_1 \neq 0 .$$

Τα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι, συνεπώς, εξαρτημένα. $\blacksquare$

(Δ) Τα στοιχεία u_1, u_2 του V είναι γραμμικώς εξαρτημένα όταν και μόνο όταν ένα από αυτά είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου.

<u>Απόδειξη</u>: Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Η τελευταία πρόταση μπορεί να γενικευθεί και για οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου όπως φαίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρημα 3.2.2</u>

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος και $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V με περισσότερα από ένα στοιχεία. Τα στοιχεία του S είναι γραμμικώς εξαρτημένα όταν και μόνο όταν κάποιο στοιχείο είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων στοιχείων.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.2.1, θα υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ χωρίς να είναι όλοι μηδέν, με την ιδιότητα

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = \mathbb{O} .$$

Αν υποθέσουμε ότι $\lambda_k \neq 0$ τότε έχουμε

$$-\lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n .$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το $-1/\lambda_k$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$u_k = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right) u_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right) u_{k-1} + \left(-\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right) u_{k+1} + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right) u_n$$

Έτσι το u_k είναι γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων στοιχείων του S.

Αντίστροφα, αν το u_k είναι γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων στοιχείων του S, δηλ. αν

$$u_k = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n ,$$

τότε ισχύει η σχέση:

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + (-1) u_k + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n = \mathbb{O}$$

στην οποία το $\lambda_k = -1$ είναι $\neq 0$. Άρα τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. $\blacksquare$

3.3 ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Ορισμός 3.3.1

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σ' ένα σώμα K. Ενα πεπερασμένο υποσύνολο

$$A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

του V ονομάζεται (πεπερασμένη) βάση (basis) του V, αν

(i) τα $e_1, e_2, \dots, e_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και

(ii) το A παράγει το χώρο V.

Επειδή στα επόμενα θα ασχοληθούμε με διανυσματικούς χώρους που έχουν πεπερασμένη βάση, θα γράφουμε και απλά "βάση" αντί "πεπερασμένη βάση".

Η παρακάτω πρόταση είναι πολύ χρήσιμη, γιατί δίνει ένα χαρακτηρισμό της βάσεως.

Πρόταση 3.3.2

Εστω A ένα πεπερασμένο υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V. Τότε το A είναι μια βάση του V, όταν και μόνο όταν κάθε στοιχείο $u \in V$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A.

Απόδειξη

Αν το $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ είναι μια βάση του V, τότε κάθε στοιχείο u του V θα γράφεται στην μορφή

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

αφού το A παράγει το χώρο V.

Αν υποθέσουμε ότι το u γράφεται και στη μορφή: $u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n$,

τότε αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις βρισκουμε

$$(a_1-b_1)u_1+(a_2-b_2)u_2+\cdots+(a_n-b_n)u_n=\mathbb{O}.$$

Επειδή τα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, από την τελευταία σχέση έχουμε

$$a_1-b_1=a_2-b_2=\cdots=a_n-b_n=0, \text{ δηλ. } a_k=b_k \ \forall k.$$

Συνεπώς, κάθε στοιχείο u του V εκφράζεται κατά τρόπο μοναδικό ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, αρκεί να δείξουμε ότι τα στοιχεία $u_1, u_2, \ldots, u_n$ του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, αφού ισχύει

$$0u_1+0u_2+\cdots+0u_n=\mathbb{O}$$

και το $\mathbb{O}$ γράφεται, λόγω της υποθέσεως, κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, $u_2, \ldots, u_n$, τότε από κάθε σχέση της μορφής

$$a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n=\mathbb{O}$$

προκύπτει ότι $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$. Τα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι ως εκ τούτου γραμμικώς ανεξάρτητα. ∎

Αν $A=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ είναι μια βάση ενός διανυσματικού χώρου V, τότε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση κάθε στοιχείο u του V γράφεται μονοσήμαντα (κατά μοναδικό τρόπο) στη μορφή:

$$u=a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n$$

που σημαίνει ότι οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι πλήρως ορισμένοι από το u και τη βάση A.

Οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ονομάζονται <u>συντεταγμένες του u ως προς τη βάση A</u>.

Η νιάδα $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ονομάζεται <u>διάνυσμα συντεταγμένων του u ως προς τη βάση A</u> και συμβολίζεται με u_A, δηλ. $u_A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Τονίζουμε ότι το u_A είναι στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ και όχι του V.

Παράδειγμα 1

Θα δείξουμε ότι το υποσύνολο $A = \{e_1, e_2\}$ με $e_1 = (2,1)$ και $e_2 = (1,-1)$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$. Σύμφωνα με την Πρ. 3.3.2 αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ γράφεται μονοσήμαντα ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A.
Εστω λοιπόν ότι $u = a_1 e_1 + a_2 e_2 \Longrightarrow$

$$(u_1, u_2) = a_1(2,1) + a_2(1,-1).$$

Προκύπτει έτσι το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} 2a_1 + a_2 = u_1 \\ a_1 - a_2 = u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a_1 = u_1 + u_2 \\ 3a_2 = u_1 - 2u_2. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{u_1 + u_2}{3} \quad \text{και} \quad a_2 = \frac{u_1 - 2u_2}{3}.$$

Η λύση αυτή είναι μοναδική. Αρα το A είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα 2.

Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$, τα διανύσματα

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

αποτελούν μια βάση, τη συνήθη βάση. Πράγματι, επαληθεύονται εύκολα οι προϋποθέσεις του Ορ. 3.3.1.

(i) Τα $e_1, e_2, \dots, e_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, γιατί όταν

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = \mathbb{O} \Longleftrightarrow$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \mathbb{O} \Longrightarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

(ii) Τα $e_1, e_2, \dots, e_n$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$, αφού κάθε διάνυσμα $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους:

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n.$$

Παράδειγμα 3.

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $M_{2\times2}$ των 2×2 πινάκων. Θα δείξουμε ότι οι πίνακες

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

αποτελούν βάση του $M_{2\times2}$, επαληθεύοντας τις δύο προϋποθέσεις του Ορισμού 3.3.1

(ί) Θεωρούμε τη σχέση

$$\lambda_1 E_{11}+\lambda_2 E_{12}+\lambda_3 E_{21}+\lambda_4 E_{22}=\mathbb{O} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\lambda_2\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\\lambda_3&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&\lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\\lambda_3&\lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

απ' όπου παίρνουμε $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$ και άρα τα στοιχεία $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(ίί) Θεωρούμε τώρα ένα τυχόντα 2×2 πίνακα A. Θα έχουμε.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&a_{12}\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\a_{21}&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&a_{22}\end{bmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+a_{12}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+a_{21}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+a_{22}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$A=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22},$$

πράγμα που σημαίνει ότι τα $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ παράγουν τον $M_{2\times2}$.

Εύκολα γενικεύονται τα προηγούμενα, δηλ. μια βάση του χώρου $M_{m\times n}$ αποτελείται από τους $m\times n$ πίνακες E_{rs} που έχουν τη μονάδα στη θέση (r,s) και παντού αλλού μηδέν. Η βάση αυτή καλείται <u>συνήθης</u> (ή <u>κανονική</u>) βάση του $M_{m\times n}$.

Θα δώσουμε τώρα ένα θεώρημα, στο οποίο βασίζεται η έννοια της διαστάσεως ενός διανυσματικού χώρου.

Θεώρημα 3.3.3

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος και

$$y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$$

$(n+1)$ το πλήθος στοιχεία του V που κάθε ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των n το πλήθος στοιχείων

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

του V. Τότε τα στοιχεία $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη.

Θα ~~αποδείξουμε το θεώρημα με τη μέθοδο της~~ τέλειας επαγωγής.

Για $n=1$ το θεώρημα ισχύει. Πράγματι, αν

$$y_1 = \lambda x_1 \quad \text{και} \quad y_2 = \mu x_1$$

τότε $\mu y_1 - \lambda y_2 = \mu\lambda x_1 - \mu\lambda x_1 = 0$,

που σημαίνει ότι τα στοιχεία y_1, y_2 είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν οι λ και μ δεν είναι και οι δύο μηδέν.
Αν $\lambda = \mu = 0$ τότε $y_1 = 0$ και $y_2 = 0$ οπότε τα y_1 και y_2 είναι και σ' αυτή την περίπτωση γραμμικώς εξαρτημένα.

Υποθέτουμε τώρα ότι το θεώρημα ισχύει για $n=k-1$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k$, δηλ. θα δείξουμε ότι αν τα στοιχεία $y_1, y_2, \dots, y_{k+1}$ γράφονται στη μορφή

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j, \qquad i = 1, 2, \dots, k+1$$

τότε αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $a_{k+1,k} \neq 0$. Τότε τα k το πλήθος στοιχεία

$$y_i' = y_i - \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}} y_{k+1} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k$$
$$- \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}} \left(a_{k+1,1}x_1 + \cdots + a_{k+1,k}x_k \right)$$

ή

$$y_i' = y_i - \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}} y_{k+1} = \left(a_{i1} - \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}} a_{k+1,1} \right) x_1 + \cdots + \left(a_{i,k-1} - \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}} a_{k+1,k-1} \right) x_{k-1}$$
$$i = 1, 2, \ldots, k \qquad (1)$$

είναι, προφανώς, γραμμικοί συνδυασμοί των $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$. Σύμφωνα με την υπόθεση της τέλειας επαγωγής, τα στοιχεία $y_1', y_2', \ldots, y_k'$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα και άρα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ που δεν είναι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i y_i' = 0 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i y_i' = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \left(y_i - \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}} y_{k+1} \right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}} \right) y_{k+1} = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i y_i = 0 \quad \text{όπου} \quad \mu_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} \mu_i \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}}$$

Εφόσον τα μ_i δεν είναι όλα μηδέν, τα στοιχεία $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. ∎

Από προηγούμενα παραδείγματα, είδαμε ότι τα υποσύνολα $A=\{(2,-1),(1,-1)\}$ και $B=\{(1,0),(0,1)\}$ είναι βάσεις του $\mathbb{R}^2$.

Παρατηρούμε ότι οι δυο βάσεις έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι αυτό ισχύει πάντα.

<u>Θεώρημα 3.3.4</u>

Εστω $V\neq\{0\}$ ένας διανυσματικός χώρος που έχει μια πεπερασμένη βάση A. Τότε κάθε άλλη βάση του V έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων με τη βάση A.

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι η βάση A έχει n το πλήθος στοιχεία, $A=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$. Εστω B μια άλλη βάση του V με m στοιχεία, $B=\{y_1,y_2,\dots,y_m\}$. Θα δείξουμε ότι $m=n$.

Εστω ότι $m>n$. Επειδή το A παράγει το χώρο V, τα στοιχεία του B μπορούν να γραφούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων του A, οπότε σύμφωνα με το Θ. 3.3.3 αυτά πρέπει να είναι γραμμικώς εξαρτημένα, πού είναι άτοπο, γιατί το B είναι βάση του V.

Ομοια αποκλείεται η περίπτωση $m<n$.

Αρα $m=n$. ■

Το Θεώρημα 3.3.4 μας επιτρέπει να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

<u>Ορισμός 3.3.5</u>

Αν ο διανυσματικός χώρος $V\neq\{0\}$ έχει μια βάση από n στοιχεία, τότε ο αριθμός n ονομάζεται <u>διάσταση</u> (dimension) του V, συμβολικά

$$\dim V = n$$

Αν $V=\{0\}$, τότε θα λέμε ότι η διάσταση του V είναι 0 (μηδέν).

Τέλος θα λέμε ότι ένας διανυσματικός χώρος είναι <u>πεπερασμένης διαστάσεως</u>, αν έχει διάσταση $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Στην αντίθετη περίπτωση ο διανυσματικός χώρος είναι <u>απείρης διάστασης</u>.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Ο γραμμικός χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση n, γιατί το σύνολο $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ όπου

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

είναι μια βάση του. Όπως αναφέραμε προηγουμένως η βάση αυτή ονομάζεται <u>κανονική</u> ή <u>συνήθης βάση</u> του $\mathbb{R}^n$.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Ο διανυσματικός χώρος P_n όλων των πολυωνύμων του x με πραγματικούς συντελεστές και με βαθμό $\leq n$, έχει διάσταση $n+1$,

$$\dim P_n = n+1,$$

γιατί μια βάση του είναι το σύνολο

$$A = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\},$$

αφού κάθε πολυώνυμο $p(x) \in P_n$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A.

<u>Παράδειγμα 3</u>

Είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι τα στοιχεία

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

αποτελούν μια βάση του χώρου των 2x2 πινάκων $M_{2\times 2}$.

Άρα

$$\dim M_{2\times 2} = 2\cdot 2 = 4$$

Θεωρούμε τώρα το χώρο $M_{m\times n}$ των $m\times n$ πινάκων. Εστω E_{ij} ο $m\times n$ πίνακας με 1 στη θέση (i,j) και μηδέν σε όλες τις άλλες θέσεις. Τότε οι $m\cdot n$ το πλήθος πίνακες

$$E_{ij}\ ,\quad i=1,2,\dots,m,\quad j=1,2,\dots,n$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι (γιατί;) και παράγουν τον $M_{m\times n}$, εφόσον κάθε $m\times n$ πίνακας

$$A=(a_{ij})$$

μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των E_{ij}:

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}\ .$$

Ετσι το σύνολο των E_{ij} αποτελεί μια βάση του $M_{m\times n}$.

Άρα

$$\dim M_{m\times n} = mn\ .$$

Θεώρημα 3.3.6

Αν V είναι ένας πεπερασμένης διαστάσεως χώρος με $\dim V = n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε :

(i) Κάθε σύνολο από γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία, που δεν είναι βάση του V, μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του V.

(ii) Κάθε σύνολο που περιέχει n το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του V είναι μια βάση του V.

Απόδειξη

(i) Εστω $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ένα υποσύνολο του V, όπου τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $L(A) \neq V$. Αν $k > n$ τότε από το Θ. 3.3.3 εύκολα προκύπτει ότι τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα που είναι άτοπο. Αρα $k \leq n$.

Αν y_1 είναι ένα στοιχείο του V που δεν ανήκει στη γραμμική θήκη $L(A)$ του A, τότε τα στοιχεία του συνόλου

$$A_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1\}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, αν τα $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1$ ήταν γραμμικώς εξαρτημένα, θα υπήρχαν πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$, όχι όλοι μηδέν, ώστε να ισχύει

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i + a_{k+1} y_1 = \mathbb{O} \qquad (1)$$

Αν ήταν $a_{k+1} = 0$, τότε από την (1) θα βρίσκαμε

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k = \mathbb{O},$$

όπου τα a_i δεν είναι όλα μηδέν. Αυτό είναι άτοπο, αφού τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ετσι $a_{k+1} \neq 0$. Μπορούμε τότε να λύσουμε την (1) ως προς y_1 :

$$y_1 = -\frac{1}{a_{k+1}} \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$$

Το y_1 εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1, x_2, \dots, x_k$ και άρα $y_1 \in L(A)$ που είναι άτοπο. Άρα τα στοιχεία του συνόλου

$$A_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k, y_1\}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Αν συμβαίνει $L(A_1) = V$, τότε εξ ορισμού το A_1 είναι μια βάση του V.

Αν $L(A_1) \neq V$, τότε συνεχίζοντας την προηγούμενη διαδικασία μπορούμε μετά από $n-k$ βήματα να βρούμε ένα σύνολο

$$A_{n-k} = \{x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k}\}$$

που τα n το πλήθος στοιχεία του είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Για να είναι το A_{n-k} μια βάση του V, αρκεί να δείξουμε ότι $L(A_{n-k}) = V$.

Αν ήταν $L(A_{n-k}) \neq V$, τότε θα μπορούσαμε, όπως προηγουμένως, να βρούμε ένα σύνολο A_{n-k+1} με $n+1$ γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία, που είναι άτοπο λόγω του Θ. 3.3.3.

Άρα $L(A_{n-k}) = V$ και το A_{n-k} είναι μια βάση του V.

(ii) Έστω A ένα σύνολο με n το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του V. Σύμφωνα με την (i) το A μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση B του V. Σύμφωνα τώρα με το Θ. 3.3.4, το B περιέχει n στοιχεία, δηλ. $A = B$. (το A είναι βάση του V). $\blacksquare$

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.3.7

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος με $\dim V = n$, $n \in \mathbb{N}$, και Y ένας υπόχωρος του V. Τότε

$$\dim Y \leq \dim V = n.$$

Αν είναι $\dim Y = n$, τότε $Y = V$.

Απόδειξη

Εστω ότι $\dim Y = m$ και $S = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ μια βάση του Y. Εφόσον ο Y είναι υπόχωρος του V, το S είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του V. Από το Θ. 3.3.6 (ii) προκύπτει ότι το S μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του V, οπότε

$$\dim Y \leq \dim V = n.$$

Αν είναι $\dim Y = \dim V = n$, τότε από το Θ. 3.3.6 ii προκύπτει ότι η βάση S είναι επίσης βάση του V, δηλ. παράγει το χώρο V, οπότε $Y = V$. $\blacksquare$

Θεώρημα 3.3.8

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και V_1, V_2 δύο υπόχωροι του V. Τότε

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το Θ. 2.3.2 (i), ο $V_1 \cap V_2$ είναι υπόχωρος των V_1 και V_2.

Αν είναι

$$\dim V_1 = k, \quad \dim V_2 = \ell \quad \text{και} \quad \dim(V_1 \cap V_2) = m,$$

τότε σύμφωνα με την Πρ. 3.3.7

$$m \leq k \quad \text{και} \quad m \leq \ell.$$

Εστω τώρα μια βάση του $V_1 \cap V_2$:

$$A = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}.$$

Σύμφωνα με το Θ. 3.3.6 (i), το A μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση

$$A' = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_{k-m}\}$$

του V_1, και σε μια βάση

$$A'' = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, y_1, y_2, \ldots, y_{\ell-m}\}.$$

του V_2. Άρα η ένωση των A και A'',

$$B = A' \cup A'' = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_{k-m}, y_1, y_2, \ldots, y_{\ell-m}\},$$

παράγει το χώρο $V_1 + V_2$. Αν το B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο, τότε το B είναι μια βάση του $V_1 + V_2$, οπότε

$$\dim(V_1+V_2) = m + k - m + \ell - m = k + \ell - m$$

$\Leftrightarrow$

$$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι τα στοιχεία του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ή ισοδύναμα ότι αν

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{i=1}^{k-m} b_i x_i + \sum_{i=1}^{\ell-m} c_i y_i = \mathbb{O},$$

τότε

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = b_1 = b_2 = \ldots = b_{k-m} = c_1 = c_2 = \ldots = c_{\ell-m} = 0.$$

Θέτουμε

$$u = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{i=1}^{k-m} b_i x_i = -\sum_{i=1}^{\ell-m} c_i y_i \qquad (1)$$

και παρατηρούμε ότι

$$u \in V_1 \text{ και } u \in V_2 \text{ οπότε } u \in V_1 \cap V_2.$$

Εφόσον το A είναι μια βάση του $V_1 \cap V_2$, τότε υπάρχουν $d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ τέτοια ώστε

$$u = \sum_{i=1}^{m} d_i u_i \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m} d_i u_i + \sum_{i=1}^{\ell-m} c_i y_i = \mathbb{O} \qquad (3)$$

Επειδή η A'' είναι μια βάση του V_2, τα στοιχεία της είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα από την (3) συνεπάγεται ότι

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_m = c_1 = c_2 = \cdots = c_{\ell-m} = 0$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{i=1}^{k-m} b_i x_i = \mathbb{O}$$

Επειδή το A' είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (ως βάση του V_1) έχουμε:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = b_1 = b_2 = \cdots = b_{k-m} = 0 .$$

Πράγματι το B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. ∎

Πόρισμα 3.3.9

Εστω V_1, V_2 υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V. Αν ο V είναι πεπερασμένης διάστασης και $V = V_1 \oplus V_2$, τότε

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$$

Απόδειξη

Εφόσον $V = V_1 \oplus V_2$, σύμφωνα με το Θ. 2.3.5

$$V_1 \cap V_2 = \{\mathbb{O}\}$$

και έτσι

$$\dim V_1 \cap V_2 = \dim\{\mathbb{O}\} = 0 .$$

Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το Θ. 3.3.8. ∎

Θεώρημα 3.3.10 (Ύπαρξη συμπληρωματικού υπόχωρου). Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης. Για κάθε υπόχωρο V_1 του V υπάρχει ένας τουλάχιστο υπόχωρος V_2 τέτοιος ώστε

$$V = V_1 \oplus V_2 .$$

Απόδειξη. Αν $V_1 = \{0\}$, τότε θέτοντας $V_2 = V$ έχουμε $V = V_1 \oplus V_2$. Αν τώρα $V_1 \neq \{0\}$ και $\dim V_1 = m$ και $\dim V = n$, τότε σύμφωνα με την Πρ. 3.3.7 $m \leq n$. Έστω

$$A = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

μια βάση του V_1.

Σύμφωνα με το Θ. 3.3.6(i), το A μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση

$$A' = \{u_1, u_2, \dots, u_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}\} \qquad (1)$$

του V.

Θα δείξουμε ότι ο υπόχωρος που παράγεται από τα $x_1, x_2, \dots, x_{n-m}$,

$$V_2 = L(x_1, x_2, \dots, x_{n-m})$$

είναι συμπληρωματικός του V_1. Σύμφωνα με το Θ. 2.3.5 αρκεί να δείξουμε ότι

(i) $V_1 + V_2 = V$ και

(ii) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

Αφού η βάση A' παράγει τον V, κάθε διάνυσμα $u \in V$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της:

$$u = (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m) + (b_1 x_1 + \dots + b_{n-m} x_{n-m})$$

ή

$$u = w_1 + w_2$$

όπου

$$w_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m \in V_1, \quad \text{και}$$

$$w_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_{n-m} x_{n-m} \in V_2 .$$

Έτσι έχει δειχθεί η (i).

Παίρνουμε τώρα ένα διάνυσμα

$$u \in V_1 \cap V_2$$

οπότε

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m \quad \text{αφού } u \in V_1 \text{, και}$$
$$u = b_1 x_1 + \cdots + b_{n-m} x_{n-m} \quad \text{αφού } u \in V_2 .$$

Εξισώνοντας τις πιο πάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m + (-b_1) x_1 + \cdots + (-b_{n-m}) x_{n-m} = \mathbb{O}$$

και αφού το A' είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, ως βάση του V, θα έχουμε:

$$a_1 = \cdots = a_m = b_1 = \cdots = b_{n-m} = 0 .$$

Δηλ. $u = \mathbb{O}$ και άρα $V_1 \cap V_2 = \{\mathbb{O}\}$. ■

<u>Παρατήρηση</u>

Από την αποδεικτική διαδικασία του προηγούμενου θεωρήματος, συνάγεται ότι αν έχουμε ένα υπόχωρο V_1 ενός χώρου V, τότε υπάρχουν γενικά πολλοί υπόχωροι V_2 τέτοιοι ώστε $V_1 \oplus V_2 = V$, δηλ. ο συμπληρωματικός ενός υπόχωρου δεν είναι μοναδικός.

Για να το δούμε αυτό καλύτερα ας πάρουμε ένα απλό παράδειγμα. Ας είναι

$V = \mathbb{R}^2$ και $V_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Αν είναι

$$V_2 = \{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

και

$$V_3 = \{(x,2x) \mid x \in \mathbb{R}\} .$$
$$\vdots$$

Τότε είναι φανερό ότι

$$V = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_3 = \cdots$$

και οι $V_2, V_3, \cdots$ είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

3.1 Να δειχθεί ότι το σύνολο $A=\{e_1, e_2, e_3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$, όταν

(α) $e_1=(1,0,1)$, $e_2=(2,-1,1)$, $e_3=(4,1,1)$, και

(β) $e_1=(1,0,3)$, $e_2=(5,2,1)$, $e_3=(0,1,6)$.

3.2 (α) Να δειχθεί ότι το υποσύνολο

$$W=\left\{A\in M_{2\times 2} : A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, d=-2a+b-3c\right\}$$

είναι υπόχωρος του $M_{2\times 2}$.

(β) Να βρεθεί μια βάση του W και η $\dim W$.

3.3 Να δειχθεί ότι τα κάτωθι υποσύνολα του $M_{2\times 2}$ είναι υπόχωροι του $M_{2\times 2}$. Σε κάθε περίπτωση να βρεθεί μια βάση του W και η $\dim W$.

(α) $W=\left\{A\in M_{2\times 2} : A=\begin{bmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{bmatrix}\right\}$

(β) $W=\left\{A\in M_{2\times 2} : A=\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix}\right\}$

(γ) $W=\left\{A\in M_{2\times 2} : A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a+b+c+d=0\right\}$

3.4 Να δειχθεί ότι το υποσύνολο

$$W=\left\{p(x)\in P_2 : p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2, a_2=a_0-2a_1\right\}$$

είναι υπόχωρος του P_2. Να βρεθεί μια βάση του W και η $\dim W$.

3.5 Να δειχθεί ότι το υποσύνολο

$$W=\{p(x)\in P_3 : p(1)=p(-1),\ p(2)=p(-2)\}$$

είναι υπόχωρος του P_3. Να βρεθεί επίσης μια βάση του W και η $\dim W$.

3.6 Να βρεθεί μια βάση

(α) του χώρου των διαγώνιων 3Χ3 πινάκων, $\Delta_{3\times 3}$.

(β) του χώρου των άνω τριγωνικών 3Χ3 πινάκων, $A_{3\times 3}$.

3.7 Δίνονται τα υποσύνολα X και Y του $\mathbb{R}^4$ που ορίζονται ως εξής:

$$X=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : y-2z+w=0\} \quad \text{και}$$

$$Y=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x=w,\ y=2z\}$$

(α) Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα X και Y είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$.

(β) Να βρεθούν βάσεις των εξής χώρων:
(i) X (ii) Y (iii) $X\cap Y$ (iv) $X+Y$.

(γ) Να επαληθευτεί το θεώρημα 3.3.8.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.

1 Να δείξετε ότι τα διανύσματα
$\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(1,3,-1)$ και $\vec{w}=(5,3,-2)$
είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

2 Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{v}=(1,-2,5)$ ως γραμμικός συνδυασμός των
$e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,2,3)$ και $e_3=(2,-1,1)$

3 Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{u}=(2,-5,3)$ στο R^3 ως γραμμικός συνδυασμός των
$e_1=(1,-3,2)$, $e_2=(2,-4,-1)$ και $e_3=(1,-5,7)$

4 Για ποιά τιμή του κ, το διάνυσμα $u=(1,-2,\kappa)$ στο R^3 είναι γραμμικός συνδυασμός των

$v=(3,0,-2)$ και $w=(2,-1,-5)$;

5 Στο χώρο P_2 των πραγματικών πολυωνύμων μέχρι και 2ου βαθμού θεωρούμε τα διανύσματα
$u_1=x-1$
$u_2=x^2+2x$
$u_3=x^2+2$

Να εξεταστεί αν τα πολυώνυμα

α) $v=x^2-3x+5$ και
β) $w=x^2-2x-2$
μπορούν να γραφούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των u_1, u_2, u_3.

6 Να δείξετε ότι τα διανύσματα του P_2
$u_1=x-1$ $u_2=x^2+2$ $u_3=X^2+2x$
είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

7 Να εξεταστεί αν τα u και v είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή όχι:

α) $u=(3,4)$, $v=(1,-3)$
β) $u=(4,3,-2)$, $v=(2,-6,7)$
γ) $u=(2,-3)$, $v=(6,-9)$
δ) $u=(-4,6,-2)$, $v=(2,-3,1)$

8 Να εξεταστεί αν τα $u_1,u_2,u_3,u_4 \in R^3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή όχι:

α) $u_1=(1,-2,1)$, $u_2=(2,1,-1)$, $u_3=(7,-4,1)$
β) $u_1=(1,2,-3)$, $u_2=(1,-3,2)$, $u_3=(2,-1,5)$, $u_4=(1,1,1)$
γ) $u_1=(2,-3,7)$, $u_2=(0,0,0)$, $u_3=(3,-1,4)$

9 Εστω W ο υπόχωρος του R^4 που παράγεται από τα διανύσματα

$u_1=(2,-1,2,1)$
$u_2=(1,-2,0,3)$
$u_3=(3,1,0,-2)$

Να δείξετε ότι το $A=\{u_1,u_2,u_3\}$ είναι μια βάση του W. Ποιά είναι η διάσταση του W;

10 Να εξεταστεί αν τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων αποτελούν ή όχι βάσεις του R^3:

α) (1,1,1), (1,-1,5)
β) (1,1,1), (1,2,3), (2,-1,1)
γ) (1,2,3), (1,0,-1), (3,-1,0), (2,1,-2)
δ) (1,1,2), (1,2,5), (5,3,4)

11 Να βρεθεί η τιμή του k έτσι ώστε

α) Τα $\{(1,1)(-1,k)\}$ να αποτελούν μια βάση του R^2
β) Τα $\{(1,0,0),(1,1,1),(0,-1,k)\}$ να αποτελούν μια βάση του R^3.

12 Εστω W είναι α διανυσματικός χώρος που παράγεται από τις συναρτήσεις $f=sinx$ και $g=cosx$.

α) Να δειχθεί ότι $f_1=\sin(x+\theta)$ και $g_1=\cos(x+\theta)$. είναι διανύσματα του W για όλες τις τιμές του θ.

β) Να δειχθεί ότι οι f_1 και g_1 αποτελούν μια βάση του W.

13 Ποιοί από τους πιο κάτω πίνακες είναι γραμμικοί συνδυασμοί των

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0\\ -2 & -2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix} \quad \Gamma=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix} \quad ;$$

α) $\begin{bmatrix}6 & -8\\ -1 & -8\end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix}6 & 0\\ 3 & 8\end{bmatrix}$ δ) $\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 7 & 1\end{bmatrix}$

14 Να βρεθούν οι συντεταγμένες του A ως προς τη βάση $S=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A_1=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15 Να βρεθούν οι συντεταγμένες του p ως προς τη βάση $S=\{p_1, p_2, p_3\}$.

α) $p=4-3x+x^2$, $p_1=1, p_2=x, p_3=x^2$

β) $p=2-x+x^2, p_1=1+x, p_2=1+x^2, p_3=x+x^2$.

4 ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

4.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 4.1.1

Μια "τυπική ορθογώνια διάταξη" m.n το πλήθος στοιχείων ενός σώματος K :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

λέγεται πίνακας πάνω στο K ή απλώς πίνακας (matrix).

Οι m το πλήθος οριζόντιες "νιάδες" :

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

ή συνοπτικά οι

$$r_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

καλούνται γραμμές (rows) του πίνακα.

Οι n το πλήθος κατακόρυφες "μιάδες"

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

ή συνοπτικά οι

$$C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

καλούνται <u>στήλες</u> (columns) του πίνακα.

Ενας πίνακας με m γραμμές και n στήλες λέγεται <u>m×n πίνακας</u> ή <u>πίνακας τύπου m×n</u>.

Οι αριθμοί a_{ij} λέγονται <u>στοιχεία</u> του πίνακα και από τους δείκτες i, j ο πρώτος λέγεται <u>δείκτης γραμμής</u> και ο δεύτερος <u>δείκτης στήλης</u>.

Το στοιχείο a_{ij} βρίσκεται στην τομή της γραμμής i με τη στήλη j. Θα λέμε ότι το στοιχείο a_{ij} <u>βρίσκεται στη θέση (i,j)</u> ή εναλλακτικά θα το καλούμε <u>(i,j)-στοιχείο</u>.

Το a_{ij} λέγεται <u>γενικό στοιχείο</u> του πίνακα A.

Ο πίνακας A μπορεί να γραφεί σε συντετμημένη μορφή ως

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

ή ακόμα όταν ο τύπος του εννοείται

$$A = (a_{ij}).$$

Οταν τα στοιχεία του πίνακα είναι αριθμοί πραγματικοί, ο πίνακας λέγεται <u>πραγματικός</u>.

Οταν αυτά είναι καθαρώς φανταστικοί ή μιγαδικοί, ο πίνακας λέγεται <u>καθαρώς φανταστικός</u> ή <u>μιγαδικός</u>, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1

Ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

είναι ένας πραγματικός 3x4 πίνακας, με γραμμές τις:

$$r_1 = (2, 0, -1, 1),$$
$$r_2 = (3, 1, 4, 2), \quad \text{και}$$
$$r_3 = (1, -1, 6, 7)$$

και στήλες τις

$$C_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C_4=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Εχουμε επίσης $a_{11}=2$, $a_{14}=1$, $a_{23}=4$ κ.ο.κ.

Παράδειγμα 2

Εστω οι πίνακες

$$A=\begin{bmatrix} 2i & -3i \\ 3i & i \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 2-3i & 2+i \\ 4-5i & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο Α είναι καθαρώς φανταστικός 2x2 πίνακας, ενώ ο Β είναι μιγαδικός 3x2 πίνακας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1 Το γινόμενο mxn δεν εκτελείται, διαβάζεται "m επί n" και δηλώνει τον τύπο του πίνακα.

2 Στην ελληνική βιβλιογραφία χρησιμοποιείται επίσης ο όρος "πίνακας διαστάσεως mxn" αντί του "πίνακας τύπου mxn".

Συναντούμε επίσης τους όρους "μητρώο" και "μήτρα" αντί του "πίνακας".

3 Για τους πίνακες χρησιμοποιούμε είτε αγκύλες είτε παρενθέσεις, π.χ.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 8 & 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

4 Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του Ορ. 4.1.1 θα γράφουμε τον πίνακα A καταχρηστικώς και στις μορφές :

$$A=(a_{ij})=(c_1\ c_2 \cdots c_n)=\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_m\end{pmatrix}$$

όπου c_j, r_i οι στήλες και οι γραμμές του πίνακα, αντίστοιχα.

5 Στα επόμενα, θα συμβολίζουμε με $M_{m\times n}(K)$ το σύνολο των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα K.

<u>Ορισμός 4.1.2</u>

Οταν ένας πίνακας αποτελείται μόνο από μια γραμμή, είναι δηλαδή $1\times n$ πίνακας :

$$A=[a_1\ \ a_2\ \cdots a_n],$$

ονομάζεται <u>πίνακας γραμμής</u> (ή <u>διάνυσμα γραμμής τάξης n</u>).

Οταν ένας πίνακας αποτελείται μόνο από μια στήλη, είναι δηλαδή $m\times 1$ πίνακας :

$$B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix},$$

ονομάζεται <u>πίνακας στήλης</u> (ή <u>διάνυσμα στήλης τάξης m</u>).

Ορισμός 4.1.3

Ενας πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδέν λέγεται <u>μηδενικός</u> (zero or null matrix) και θα τον παριστάνουμε με το σύμβολο $\mathbb{O}$ ή O (όταν δεν υπάρχει κίνδυνος να γίνει σύγχυση):

$$\mathbb{O}_{m\times n} = (\mathbb{O}_{ij}) \ , \quad \mathbb{O}_{ij} = 0 \quad \text{για όλα τα } (i,j).$$

Παράδειγμα 1

Εστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & i \end{bmatrix} \ , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο A είναι πίνακας γραμμής ενώ οι B και Γ είναι πίνακες στήλης.

Παράδειγμα 2

Οι

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι όλοι μηδενικοί πίνακες διαφορετικού τύπου (3x1, 3x4 και 2x2 αντίστοιχα).

Ορισμός 4.1.4

Εάν το πλήθος των γραμμών ενός πίνακα A ισούται με το πλήθος των στηλών του, εάν δηλαδή αυτός είναι τύπου $n \times n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{τότε ο } A$$

λέγεται <u>τετραγωνικός πίνακας</u> (square matrix) τάξεως n.

Τα στοιχεία

$$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$$

λέμε ότι σχηματίζουν την <u>κύρια διαγώνιο</u> του πίνακα, και τα

$$a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$$

τη <u>δευτερεύουσα διαγώνιό</u> του.

Το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου λέγεται <u>ίχνος</u> (trace) του (τετραγωνικού) πίνακα και συμβολίζεται με $tr(A)$. Εχουμε δηλαδή:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Παράδειγμα

Οι πίνακες Hilbert είναι τετραγωνικοί πίνακες με γενικό στοιχείο το

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

και συμβολίζονται με H_n όπου n η τάξη του πίνακα.

Για τους H_2 και H_3 έχουμε:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \quad , \quad tr(H_2) = 1 + \frac{1}{3}$$

και

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \quad , \quad tr(H_3) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

Ορισμός 4.1.5

Ενας τετραγωνικός πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλ.

$$a_{ij} = 0 \quad , \quad i > j$$

λέγεται άνω τριγωνικός (upper triangular).

Ενας τετραγωνικός πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλ.

$$a_{ij} = 0 \quad , \quad i < j$$

λέγεται κάτω τριγωνικός (lower triangular).

Παράδειγμα

Οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3+2i & 1-i & 3 \\ 0 & 4i & 2+i \\ 0 & 0 & 7-3i \end{bmatrix}$$

είναι τετραγωνικοί 3x3 πίνακες. Ο A είναι κάτω τριγωνικός και ο B άνω τριγωνικός. Για τα ίχνη τους έχουμε:

$$tr(A) = 1 + 0 - 5 = -4$$

$$tr(B) = 3+2i + 4i + 7-3i = 10+3i$$

Ορισμός 4.1.6

Ενας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται διαγώνιος (diagonal) όταν

$$a_{ij} = 0 \,,\quad i \neq j \,,$$

όταν δηλ. όλα τα στοιχεία του εκτός της διαγωνίου είναι μηδέν:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ενας διαγώνιος πίνακας γράφεται σε συντετμημένη μορφή ως:

$$A = \operatorname{diag}(a_{11}\ a_{22} \cdots a_{nn}).$$

Οταν ειδικώς είναι

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = a \,,$$

δηλ.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(a\ a \cdots a) \,,\quad a \in K$$

ο πίνακας λέγεται βαθμωτός.

Οταν είναι επιπλέον $a = 1$, δηλ.

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1 \,,$$

ο πίνακας λέγεται μοναδιαίος ή ταυτοτικός (unit or identity matrix). Τους μοναδιαίους πίνακες θα τους παριστάνουμε με το σύμβολο I_n ή απλούστερα με I εφόσον ο τύπος τους συνάγεται από το κείμενο:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Για κάθε μοναδιαίο πίνακα μπορούμε να γράψουμε:

$$I = (\delta_{ij}) \;, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

όπου δ_{ij} το <u>δέλτα του Kronecker</u>:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \,, & i = j \\ 0 \,, & i \neq j \end{cases}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Εστω οι πραγματικοί πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο Α είναι διαγώνιος, ο Β βαθμωτός και ο Γ μοναδιαίος. Για τα ίχνη τους έχουμε:

$$tr(A) = 3 + 4 - 2 = 5$$

$$tr(B) = -4 - 4 - 4 = -12$$

$$tr(\Gamma) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Είναι προφανές ότι το ίχνος ενός βαθμωτού πίνακα

$$A_n = diag(a \; a \cdots a)$$

είναι

$$tr(A_n) = na$$

και ότι

$$tr(I_n) = n \,.$$

4.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ορισμός 4.2.1 (Ισότητα πινάκων)

Δύο πίνακες του ίδιου τύπου,

$$A=(a_{ij}),\quad B=(b_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$$

θα λέμε ότι είναι <u>ίσοι</u>, συμβολικά $A=B$, όταν τα ομοθέσιά τους στοιχεία είναι ίσα, δηλ.

$$A=B \quad \text{όταν} \quad a_{ij}=b_{ij} \quad \forall i,j .$$

Ορισμός 4.2.2

Εστω δύο πίνακες του ίδιου τύπου:

$$A=(a_{ij}),\quad B=(b_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$$

Θα λέμε ότι ο πίνακας A είναι <u>αντίθετος του B</u>, συμβολικά $A=-B$, όταν τα ομοθέσιά τους στοιχεία είναι αντίθετα, δηλ.

$$A=-B \quad \text{όταν} \quad a_{ij}=-b_{ij} \quad \forall i,j$$

Από τις ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών προκύπτει αμέσως ότι η ισότητα δύο πινάκων είναι μια <u>σχέση ισοδυναμίας</u> στο σύνολο $M_{m\times n}$, δηλ. ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. Ανακλαστική (reflexive): $A=A$
2. Συμμετρική (symmetric): $A=B \Longrightarrow B=A$
3. Μεταβατική (transitive):

$$A=B,\ B=\Gamma \Longrightarrow A=\Gamma$$

Από τους πιο πάνω ορισμούς και ιδιότητες προκύπτει ότι αν ο πίνακας A είναι ίσος ή αντίθετος με τον B, τότε και ο πίνακας B είναι ίσος ή αντίθετος με τον A. Ετσι μπορούμε να λέμε: οι πίνακες A, B είναι ίσοι ή αντίστοιχα οι πίνακες A, B είναι αντίθετοι.

Παράδειγμα

Αν είναι
$$\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 1 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$
τότε

$$\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-y=5 \end{array}\right\} \Longrightarrow x=4 \text{ και } y=-1.$$

Ορισμός 4.2.3 (Πρόσθεση πινάκων)

Εστω δύο πίνακες του ίδιου τύπου:
$$A=(a_{ij}), \quad B=(b_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$$
Το άθροισμά τους
$$C=(c_{ij})=A+B$$
είναι επίσης $m\times n$ πίνακας και ορίζεται ως εξής:
$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad \forall\, i,j$$

Θεώρημα 4.2.4 (Ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων).

Εστω $A, B, C \in M_{m\times n}(K)$ και O ο μηδενικός $m\times n$ πίνακας. Τότε:

(α) $A+B=B+A$

Αντιμεταθετική (commutative) ιδιότητα.

(β) $A+(B+C)=(A+B)+C$

Προσεταιριστική (associative) ιδιότητα.

(γ) $A+O=A$

(δ) $A+(-A)=O$

Απόδειξη.

Πολύ απλή. $\square$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα αθροίσματα των παρακάτω πινάκων:

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

(β) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Λύση

(α)

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & -1+0 \\ 2-1 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(β) Η πρόσθεση δεν ορίζεται γιατί οι A και B είναι διαφορετικού τύπου: $A \in M_{3\times3}$ και $B \in M_{3\times2}$.

Παράδειγμα 2

Αν είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & i \\ 1+i & 1 & 3i \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2i & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ i & 3 & 1+i \end{bmatrix}$$

τότε

$$A+B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 2i & i \\ 2+i & 0 & 2+3i \\ i & 2 & 2+i \end{bmatrix}$$

Ορισμός 4.2.5 (Βαθμωτός πολλαπλασιασμός)

Αν $A=(a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ και $\lambda \in K$ τότε το βαθμωτό τους πολλαπλάσιο λA είναι επίσης ένας $m\times n$ πίνακας και ορίζεται ως εξής:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Ο λA είναι δηλαδή ο πίνακας που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας κάθε στοιχείο του A με λ.

Παράδειγμα 1

Αν είναι

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε

$$3A = 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 9 & 0 & 18 \\ -3 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

και

$$A-2B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -5 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Εστω ο μιγαδικός πίνακας $A=\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 2+i & 3-2i \end{bmatrix}$.

Θα υπολογίσουμε το $(1+i)A$:

$$(1+i)\,A = (1+i)\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 2+i & 3-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-i)(1+i) & (1+i)^2 \\ (2+i)(1+i) & (3-2i)(1+i) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(1+i)\,A = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ 1+3i & 5+i \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση

Αν $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in M_{m\times n}$, τότε

$$C=(c_{ij}) = A-B = A+(-B)$$

όπου

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij} \qquad \forall\, i,j$$

Θεώρημα 4.2.6 (Ιδιότητες του βαθμωτού πολλαπλασιασμού)

Εστω $A,B \in M_{m\times n}(K)$, $a,b \in K$ και 1 το μοναδιαίο στοιχείο του K. Τότε:

(α) $a(A+B) = aA + aB$

(β) $(a+b)A = aA + bA$

(γ) $a(bA) = (ab)A$

(δ) $1\cdot A = A$

Απόδειξη

Πολύ απλή $\square$

Εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κάποιος ότι ο $M_{m\times n}(K)$ εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού των Ορισμών 4.2.3 και 4.2.5 και το μηδενικό πίνακα $O_{m\times n}$, είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο K. Τα Θεωρήματα 4.2.4 και 4.2.6 δείχνουν ότι όλες οι συνθήκες για να είναι ο $M_{m\times n}(K)$ διανυσματικός χώρος ικανοποιούνται.

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ότι στην περίπτωση των πραγματικών πινάκων μια βάση του $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ αποτελείται από τους mn το πλήθος πίνακες,

$$E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{ij}, \dots, E_{mn}$$

που ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο: όλα τα στοιχεία του E_{ij} είναι ίσα με μηδέν εκτός από το στοιχείο στη θέση (i,j) που είναι ίσο με 1.

Γενικά, κάθε πίνακας $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$ γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}$:

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \cdots + a_{mn}E_{mn}$$

Έτσι το σύνολο $\{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}\}$ είναι βάση του $M_{m\times n}(K)$, οπότε

$$\dim M_{m\times n}(K) = mn$$

Εφόσον ο $M_{m\times n}(K)$ είναι διανυσματικός χώρος, ισχύουν γι' αυτόν οι στοιχειώδεις ιδιότητες των Προτάσεων 2.1.2 και 2.1.3. Τις επαναδιατυπώνουμε στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 4.2.7

(α) Ο μηδενικός πίνακας $O\in M_{m\times n}(K)$ είναι μοναδικός

(β) Ο αντίθετος πίνακας $-A$ του $A\in M_{m\times n}(K)$ είναι μοναδικός

(γ) Αν $A, B, C\in M_{m\times n}(K)$ και $A+C=B+C$, τότε $A=B$.

(δ) Αν $A\in M_{m\times n}(K)$, τότε $-(-A)=A$.

(ε) $0\cdot A = O \quad \forall\, A\in M_{m\times n}(K)$

(στ) Αν $a\in K$ και $O\in M_{m\times n}(K)$, τότε

$$aO = O$$

(ζ) Αν $aA=O$ όπου $a\in K$ και $A\in M_{m\times n}(K)$, τότε $a=0$ ή/και $A=O$.

(η) Για κάθε $a\in K$ και $A\in M_{m\times n}(K)$ ισχύει

$$(-a)A = -(aA).$$

Ειδικότερα,

$$(-1)A = -A$$

4.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ορισμός 4.3.1

Δύο πίνακες $A=(a_{ij})\in M_{m\times p}$ και $B=(b_{ij})\in M_{s\times n}$ λέμε ότι είναι <u>συμβιβαστοί ως προς τον πολλαπλασιασμό</u> ή απλά <u>συμβιβαστοί</u> όταν το πλήθος των στηλών του πρώτου είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του δεύτερου, δηλαδή όταν

$$p = s$$

Παράδειγμα 1

Εστω οι πίνακες

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix}1 & -6 & 3 & 1\\ 3 & 4 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Είναι $A\in M_{2\times 3}$ και $B\in M_{3\times 4}$. Οι A, B είναι συμβιβαστοί ενώ οι B, A δεν είναι! Γιατί;

Παράδειγμα 2

Εστω ένας πίνακας γραμμής $A\in M_{1\times n}$ και ένας πίνακας στήλης $B\in M_{n\times 1}$ που περιέχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Τότε οι A, B είναι συμβιβαστοί καθώς επίσης και οι B, A!

Ετσι οι

$$A=[1, -3, -4, 2] \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix}-5\\ 6\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$$

είναι συμβιβαστοί.

Ορισμός 4.3.2 (Πολλαπλασιασμός πινάκων)

Ας είναι $A=(a_{ij})\in M_{m\times p}$ και $B=(b_{ij})\in M_{p\times n}$ δύο συμβιβαστοί πίνακες. Συμβολίζουμε τις γραμμές του A με

$$r_k(A)\ ,\quad k=1,2,\dots,m$$

και τις στήλες του B με

$$C_\ell(B)\ ,\quad \ell=1,2,\dots,n.$$

Ορίζουμε το γινόμενο του "A επί τον B", συμβολικά AB, ως τον πίνακα $\Gamma=(\gamma_{ij})\in M_{m\times n}$ του οποίου τα στοιχεία γ_{ij} είναι το εσωτερικό γινόμενο των $r_i(A)$ και $C_j(B)$:

$$\gamma_{ij}=r_i(A)\,C_j(B).$$

Επομένως το γινόμενο AB δίνεται από τον τύπο:

$$\Gamma=AB=\begin{bmatrix} r_1(A)C_1(B) & r_1(A)C_2(B) & \cdots & r_1(A)C_n(B)\\ r_2(A)C_1(B) & r_2(A)C_2(B) & \cdots & r_2(A)C_n(B)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_m(A)C_1(B) & r_m(A)C_2(B) & \cdots & r_m(A)C_n(B)\end{bmatrix}$$

Πιο αναλυτικά, για το γενικό στοιχείο γ_{ij} του γινομένου AB έχουμε:

$$\gamma_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}\implies$$

$$\boxed{\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}}$$

<u>Παρατήρηση 1</u>

Αν $A \in M_{m \times p}$ και $B \in M_{p \times n}$, τότε το γινόμενο $\Gamma = AB$ είναι ένας πίνακας τύπου

$$(m \times \cancel{p}) \times (\cancel{p} \times n) = m \times n.$$

Ο AB έχει ίσο αριθμό γραμμών με τον A και ίσο αριθμό στηλών με τον B.

<u>Παρατήρηση 2</u>

Είναι προφανές ότι το γινόμενο AB ορίζεται μόνο όταν οι A, B είναι συμβιβαστοί.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι συμβιβαστοί ($A \in M_{2\times3}$ και $B \in M_{3\times3}$). Επομένως το γινόμενο AB ορίζεται και είναι ένας πίνακας τύπου.

$$(2 \times \cancel{3}) \times (\cancel{3} \times 3) = 2 \times 3$$

Αν θέσουμε $\Gamma = AB$, τότε για τα στοιχεία του Γ έχουμε:

$$\gamma_{11} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} b_{k1} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} = -1 + 0 - 3 = -4$$

$$\gamma_{12} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} b_{k2} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} = 0 + 2 + 3 = 5$$

$$\gamma_{13} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} b_{k3} = a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} + a_{23} b_{33} = -1 + 2 + 0 = 1$$

$$\gamma_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k1} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$\gamma_{22} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k2} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32} = 0 - 1 + 1 = 0$$

$$\gamma_{23} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k3} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33} = 0 - 1 + 0 = -1$$

Εχουμε τελικά:

$$\Gamma = AB = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι το γινόμενο BA δεν ορίζεται.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Εστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Στην περίπτωση αυτή ορίζεται τόσο το γινόμενο AB όσο και το BA. Για το γινόμενο AB έχουμε:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0+2 & -2+0-0 \\ 0+12-2 & 0+3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Για το γινόμενο BA έχουμε:

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 & 0-3 & 0-1 \\ 8+0 & 0+3 & -4+1 \\ -4+0 & 0+0 & 2+0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 8 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι AB και BA είναι διαφορετικού τύπου ($AB \in M_{2\times 2}$ και $BA \in M_{3\times 3}$).

Παράδειγμα 3

Θεωρούμε το κάτωθι γραμμικό σύστημα m το πλήθος εξισώσεων με n το πλήθος αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots \quad \vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &= b_m
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Εστω $A \in M_{m \times n}$ ο πίνακας των συντελεστών

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},
$$

$X \in M_{n \times 1}$ το n-διάστατο διάνυσμα στήλης των αγνώστων

$$
X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},
$$

και $B \in M_{m \times 1}$ το m-διάστατο διάνυσμα στήλης των γνωστών σταθερών τιμών $b_1, b_2, \ldots b_m$.

$$
B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

Τότε το σύστημα (1) μπορεί να γραφεί στη μορφή εξίσωσης πινάκων:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ή ακόμα στη συντετμημένη μορφή:

$$AX = B.$$

<u>Παράδειγμα 4</u>

Εστω οι τετραγωνικοί πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι αμφότερα τα γινόμενα AB και BA ορίζονται και μάλιστα είναι του ίδιου τύπου με τους A και B, δηλ. $AB, BA \in M_{3\times 3}$.

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει ότι

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 14 \\ 10 & 4 & 26 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 8 \\ 10 & 12 & 8 \\ 9 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

Από τα προηγούμενα παραδείγματα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι δεν ισχύει γενικώς η αντιμεταθετική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων, δηλ.
η ισότητα $AB = BA$ δεν ισχύει πάντοτε.

Κατ' αρχήν, τα δύο γινόμενα AB και BA δεν ορίζονται πάντα (Βλ. Παράδειγμα 1). Ακόμα και όταν ορίζονται αμφότερα τα γινόμενα, δηλ. όταν

$$A \in M_{n \times p} \quad \text{και} \quad B \in M_{p \times n},$$

τότε τα γινόμενα AB, BA δεν είναι απαραιτήτως του ίδιου τύπου:

$$AB \in M_{n \times n} \quad \text{και} \quad BA \in M_{p \times p}.$$

(Βλ. Παράδειγμα 2).
Βλέπουμε ότι μόνον όταν οι A και B είναι τετραγωνικοί (του ίδιου τύπου), δηλ.

$$A, B \in M_{n \times n},$$

τα γινόμενα AB και BA είναι του ίδιου τύπου, και μάλιστα.

$$AB, BA \in M_{n \times n}.$$

Ακόμα και σ' αυτή την ειδική περίπτωση, δεν ισχύει γενικά η αντιμεταθετική ιδιότητα δηλ.

$$AB \neq BA$$

(Βλ. Παράδειγμα 4).

Παράδειγμα
Εστω οι τετραγωνικοί πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Εχουμε για τα γινόμενα AB και BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+3 \\ -1+0 & 1+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & -1+2 \\ 0+3 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $AB \neq BA$.

Ορισμός 4.3.3

Εστω δύο τετραγωνικοί πίνακες του ίδιου τύπου $A, B \in M_{n\times n}$.

(α) Αν ισχύει

$$AB = BA,$$

οι A, B λέγονται αντιμεταθέσιμοι.

(β) Αν ισχύει

$$AB = -BA,$$

οι A, B λέγονται αντι-αντιμεταθέσιμοι.

Παράδειγμα 1

Οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ είναι

αντιμεταθέσιμοι για κάθε a, b, διότι

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+b & 0+a \\ a+0 & b+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ a & b \end{bmatrix}$$

και

$$BA = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+b & a+0 \\ 0+a & b+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ a & b \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Οποιοιδήποτε διαγώνιοι nxn πίνακες είναι αντιμεταθέσιμοι. Πράγματι, για κάθε ζευγάρι τέτοιων πινάκων έχουμε

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22}a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix} = BA.$$

Παράδειγμα 3

Κάθε τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n\times n}$ αντιμετατίθεται με το μηδενικό πίνακα $O \in M_{n\times n}$. Γιατί;
Επίσης ο $A \in M_{n\times n}$ αντιμετατίθεται με τον μοναδιαίο πίνακα $I \in M_{n\times n}$. Γιατί;

Στα επόμενα θα ορίσουμε τον αντίστροφο ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_{n\times n}$ ως τον πίνακα A^{-1} που ικανοποιεί την:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Είναι φανερό ότι ο A αντιμετατίθεται με τον αντίστροφό του. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι ο αντίστροφος A^{-1} του A δεν ορίζεται πάντα.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι η ισότητα

$$AB = O$$

<u>δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη</u> ότι $A = O$ ή $B = O$.

Πράγματι, για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έχουμε $A \neq O$ και $B \neq O$ αλλά

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Επίσης, η ισότητα

$$AB = AC \quad \text{ή η} \quad BA = CA$$

<u>δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη</u> ότι $B = C$ και όταν ακόμη $A \neq O$.

Για παράδειγμα, όταν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

έχουμε $B \neq C$ αλλά

$$BA = O = CA.$$

Θεώρημα 4.3.4 (Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων)

(α) Προσεταιριστικός νόμος (associative law).

Αν $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times p}$ και $C \in M_{p\times q}$, τότε

$$A(BC) = (AB)C$$

(β) Δεξιός και αριστερός επιμεριστικός νόμος (distributive law).

(i) Αν $A, B \in M_{m\times n}$ και $C \in M_{n\times p}$, τότε

$$(A+B)C = AC + BC$$

(ii) Αν $A \in M_{m\times n}$ και $B, C \in M_{n\times p}$, τότε

$$A(B+C) = AB + AC$$

(γ) Αν $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times p}$ και $\lambda \in K$, τότε

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

Απόδειξη

(α) $A(BC) = A_{m\times n}(B_{n\times p}C_{p\times q})$

$$= A_{m\times n}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{kj}\right)_{n\times q}$$

$$= \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\sum_{k=1}^{p} b_{\ell k}c_{kj}\right)_{m\times q}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\right)c_{kj}\right)_{m\times q}$$

$$= \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\right)_{m\times p}(c_{kj})_{p\times q}$$

$$= (A_{m\times n}B_{n\times p})C_{p\times q} = (AB)C$$

(β) (i) $(A+B)C = (A+B)_{m\times n} C_{n\times p} \Rightarrow$

$$(A+B)C = \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}+b_{ik})c_{kj}\right)_{m\times p}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right)_{m\times p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}\right)_{m\times p} \Rightarrow$$

$$(A+B)C = AC+BC$$

(ii) Αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

(γ)

$$\lambda(AB) = \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times p}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{ik})b_{kj}\right)_{m\times p} = (\lambda A)B$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\lambda b_{kj})\right)_{m\times p} = A(\lambda B)$$

■

<u>Πρόταση 4.3.5</u>

(α) Αν $A, B \in M_{n\times n}$, τότε

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

(β) Αν $A \in M_{m\times n}$ και $B \in M_{n\times m}$, τότε

$$tr(AB) = tr(BA)$$

(γ) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $A \in M_{n\times n}$, τότε $tr(\lambda A) = \lambda\, tr(A)$

<u>Απόδειξη</u>

(α) $tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

(β) Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα AB, BA είναι τετραγωνικοί πίνακες όχι κατ' ανάγκη του ίδιου τύπου:

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{m \times m} \quad \text{και}$$

$$BA = \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \right)_{n \times n}$$

(Η χρήση διαφορετικών δεικτών είναι φυσικά επιτρεπτή!).

Εχουμε τώρα για τα ίχνη των AB και BA.

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

και

$$tr(BA) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ik}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = tr(AB).$$

(γ) $tr(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \, tr(A)$ $\blacksquare$

Πρόταση 4.3.6

(α) Αν $A, I \in M_{n\times n}$ τότε

$$AI = IA = A$$

(β) Αν $A \in M_{n\times n}$ και O είναι ο μηδενικός $n\times n$ πίνακας, τότε

$$AO = OA = O$$

Απόδειξη.

(α)

$$AI = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} \right) = (a_{ij}\delta_{jj}) = (a_{ij}) = A$$

Παρομοίως βρίσκουμε ότι $IA = A$.

(β)

$$AO = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} O_{kj} \right) = (O_{ij}) = O$$

Παρομοίως βρίσκουμε ότι $OA = O$. ∎

Δίνουμε τώρα τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.3.7

Ενας διανυσματικός χώρος V πάνω σ' ένα σώμα K, στον οποίο έχει οριστεί ένας πολλαπλασιασμός "$\cdot$" που σε κάθε ζεύγος $(x,y) \in V\times V$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο $x\cdot y \in V$ ονομάζεται άλγεβρα πάνω στο K, αν για κάθε $x,y,z \in V$ και $\lambda \in K$ ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot (y\cdot z)$

(ii) $x\cdot (y+z) = x\cdot y + x\cdot z$,

$(y+z)\cdot x = y\cdot x + z\cdot x$

(iii) $\lambda(x\cdot y) = (\lambda x)\cdot y = x\cdot (\lambda y)$.

Αν υπάρχει ένα στοιχείο $e \in V$ τέτοιο ώστε $\forall x \in V$ να ισχύει

$$x \cdot e = e \cdot x = x ,$$

αυτό είναι μοναδικό και ονομάζεται το <u>μοναδιαίο στοιχείο</u> της άλγεβρας.

Από το Θ. 4.3.4 προκύπτει η παρακάτω πρόταση.

<u>Πρόταση 4.3.8</u>
Ο χώρος $M_{n \times n}(K)$ είναι μια άλγεβρα πάνω στο K.

Το μοναδιαίο στοιχείο της άλγεβρας $M_{n \times n}$ είναι προφανώς ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I:

$$AI = IA = A .$$

Αν σε μια άλγεβρα ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για την πράξη του πολλαπλασιασμού τότε λέμε ότι έχουμε μια <u>μεταθετική άλγεβρα</u>.

Είδαμε στα προηγούμενα ότι δεν ισχύει, γενικά, η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων. Ετσι, η άλγεβρα $M_{n \times n}$ δεν είναι μεταθετική.

4.4 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Ορισμός 4.4.1

Εστω δύο τετραγωνικοί πίνακες του ίδιου τύπου: $A, B \in M_{n\times n}$. Ο B λέγεται <u>αντίστροφος</u> (inverse) του A αν

$$AB = BA = I$$

Ορισμός 4.4.2

Αν ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n\times n}$ έχει αντίστροφο, τότε λέγεται <u>αντιστρέψιμος</u> (invertible) ή <u>ομαλός</u> ή <u>μή-ιδιάζων</u> (non-singular).

Στην αντίθετη περίπτωση, λέμε ότι ο A είναι <u>μη αντιστρέψιμος</u> ή <u>μη ομαλός</u> ή <u>ιδιάζων</u>.

Πρόταση 4.4.3

Ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου πίνακα $A \in M_{n\times n}$ είναι μοναδικός

Απόδειξη

Εστω B, C δύο αντίστροφοι του A, οπότε

$$CA = I \Rightarrow CAB = IB = B \Rightarrow C(AB) = B \Rightarrow$$

$$CI = B \Rightarrow C = B.$$

Αρα ο αντίστροφος του A είναι μοναδικός. ∎

<u>Συμβολισμός</u>

Ο μοναδικός αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου πίνακα A συμβολίζεται με A^{-1}, δηλ.

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I} \qquad (4.4.1)$$

<u>Παρατήρηση 1</u>

Μπορεί να δειχθεί ότι η

$$AA^{-1} = I \quad \text{συνεπάγεται ότι} \quad A^{-1}A = I$$

Συνεπώς, για να εξακριβωθεί εάν ο πίνακας B είναι ο αντίστροφος του A, αρκεί ο υπολογισμός μόνο ενός από τα γινόμενα AB, BA.

<u>Παρατήρηση 2</u>

Είναι φανερό από την (4.4.1) ότι

$$\boxed{\left(A^{-1}\right)^{-1} = A} \qquad (4.4.2)$$

Το σύνολο των αντιστρέψιμων πινάκων της άλγεβρας Μnxn δεν είναι κενό, γιατί ο μοναδιαίος πίνακας I_n είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος είναι ο εαυτός του: $II = I$.

Με τον καθορισμό κριτηρίων αντιστρεψιμότητας ενός πίνακα και με τις τεχνικές εύρεσης του αντίστροφου θα ασχοληθούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}$ έχει αντίστροφο τον $B=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

Πράγματι,

$$AB=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7-3-3&-3+3+0&-3+0+3\\7-4-3&-3+4+0&-3+0+3\\7-3-4&-3+3+0&-3+0+4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Πράγματι, αν ήταν

$$\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\alpha&\alpha\\\gamma&\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

θα έπρεπε $\alpha=1$ και $\alpha=0$, που είναι αδύνατο.

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι αν μια γραμμή ή μια στήλη ενός τετραγωνικού πίνακα είναι μηδενική, τότε ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος.

<u>Πρόταση 4.4.4</u>

Αν ο $A\in M_{n\times n}$ έχει μια γραμμή (αντίστοιχα στήλη) μηδενική δεν είναι αντιστρέψιμος.

<u>Απόδειξη</u>

Εστω ότι η γραμμή i (αντίστοιχα η στήλη j) του

$A=(a_{ij})$ είναι μηδενική. Υποθέτουμε ότι ο A έχει αντίστροφο, δηλαδή, υπάρχει πίνακας $B=(b_{ij})\in M_{n\times n}$ τέτοιος ώστε

$$AB=BA=I.$$

Ο πίνακας AB (αντίστοιχα BA) έχει τη γραμμή i (αντίστοιχα τη στήλη j) μηδενική γιατί

$$\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n} 0\cdot b_{kj}=0, \quad j=1,2,\dots,n$$

(αντίστοιχα,

$$\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\cdot 0=0, \quad i=1,2,\dots,n\ ).$$

Συνεπώς $AB\neq I$ (αντίστοιχα $BA\neq I$). Άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. ■

<u>Θεώρημα 4.4.5</u>

Αν οι $A,B\in M_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε ο AB είναι επίσης αντιστρέψιμος και

$$\boxed{(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.}$$

<u>Απόδειξη</u>

Αφήνεται ως άσκηση. □

Θεώρημα 4.4.6

Αν ο $A \in M_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος και $B, \Gamma, O \in M_{n\times p}$, τότε:

(α) $AB = \Gamma \implies B = A^{-1}\Gamma$

(β) $AB = A\Gamma \implies B = \Gamma$

(γ) $AB = O \implies B = O$

Απόδειξη

Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

4.5 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΙΝΑΚΑ

Ο ορισμός του γινομένου δύο πινάκων μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε τη δύναμη A^r ενός τετραγωνικού πίνακα A για κάθε μη αρνητικό ακέραιο εκθέτη r:

$$\boxed{A^0 = I \quad \text{και} \quad A^r = A^{r-1}A \,, \; r = 1, 2, \ldots} \qquad (4.5.1)$$

Ετσι έχουμε:

$$\begin{aligned} A^1 &= A^0 A = IA = A \\ A^2 &= A^1 A = AA \\ &\;\vdots \\ A^r &= A^{r-1}A = \underbrace{AA \cdots A}_{r \text{ φορές}} . \end{aligned}$$

Οι παρακάτω ιδιότητες αποδεικνύονται πολύ εύκολα.

$A^r A^s = A^{r+s}$	, r, s μη αρνητικοί ακέραιοι	(4.5.2)
$(A^r)^s = A^{rs}$	, r, s μη αρνητικοί ακέραιοι	(4.5.3)

Παράδειγμα

Θα βρούμε τη νιοστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} .$$

Εχουμε

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2\beta \\ 0 & \alpha^3 \end{bmatrix}$$

Θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$A^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}\beta \\ 0 & \alpha^n \end{bmatrix}$$

Υποθέτοντας ότι ο πιο πάνω τύπος ισχύει για τον φυσικό n, παίρνουμε

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}\beta \\ 0 & \alpha^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} & (n+1)\alpha^n\beta \\ 0 & \alpha^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Η σχέση αληθεύει και για τον $n+1$, άρα και για κάθε φυσικό αριθμό.

Ο ορισμός του αντίστροφου πίνακα μας δίνει τη δυνατότητα να γενικεύσουμε τον ορισμό της δυνάμεως αντιστρέψιμου πίνακα για κάθε αρνητική τιμή του εκθέτη, σύμφωνα προς τον τύπο:

$$\boxed{A^{-r} = (A^{-1})^r, \quad r = 2, 3, \ldots} \qquad (4.5.4).$$

Σύμφωνα με τον πιο πάνω τύπο, έχουμε:

$$A^{-2} = (A^{-1})(A^{-1}) = A^{-1}A^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A^{-r} = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{r \text{ φορές}}$$

Από την ιδιότητα

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

προκύπτει ότι

$$A^{-r} = (\underbrace{AA\cdots A}_{r \text{ φορές}})^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{A^{-r} = (A^r)^{-1}} \qquad (4.5.5)$$

Ο πιο πάνω τύπος μας λέει ότι ο αντίστροφος του $A^r = AA\cdots A$ είναι ο $A^{-r} = A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}$.

Για παράδειγμα ο αντίστροφος του $A^3 = AAA$ είναι ο $A^{-3} = A^{-1}A^{-1}A^{-1}$. Πράγματι,

$$A^3A^{-3} = AAAA^{-1}A^{-1}A^{-1} = AAIA^{-1}A^{-1} = AAA^{-1}A^{-1}$$
$$= AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Συνδυάζοντας τις (4.5.4)-(4.5.5) έχουμε:

$$\boxed{A^{-r} = (A^{-1})^r = (A^r)^{-1}, \quad r = 2, 3, \ldots} \qquad (4.5.6)$$

Στηριζόμενοι στους ανωτέρω τύπους, μπορούμε να γενικεύσουμε τους τύπους (4.5.2), (4.5.3), στην περίπτωση που ο A είναι αντιστρέψιμος, για κάθε ακέραια τιμή των r, s.

<u>Πρόταση 4.5.1</u>

Αν ο $A \in M_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος και οι r, s ακέραιοι, τότε:

(i) $A^rA^s = A^{r+s}$, (ii) $(A^r)^s = A^{rs}$

<u>Ορισμός 4.5.2</u>

Ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n \times n}$

(α) λέγεται <u>αδύναμος</u> (idempotent) αν

$$A^2 = A$$

(β) λέγεται <u>μηδενοδύναμος</u> (nilpotent) αν υπάρχει φυσικός αριθμός r τέτοιος ώστε να είναι

$$A^r = O$$

Εαν r_0 είναι ο ελάχιστος φυσικός για τον οποίο είναι $A^{r_0} = O$, τότε λέμε ότι ο A είναι <u>μηδενοδύναμος δείκτη r_0</u>.

(γ) λέγεται <u>ενελικτικός</u> (involutoric) αν

$$A^2 = I$$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν ο A είναι αδύναμος, δηλ. $A^2 = A$, τότε

$$A^3 = A^2 A = A \cdot A = A^2 = A$$

και γενικά

$$A^r = A \quad , \quad r = 1, 2, \ldots$$

<u>Παράδειγμα</u>

Εστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Για τον A έχουμε:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Αρα ο A είναι μηδενοδύναμος δείκτη 2.

Για τον B έχουμε:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-12 & -8+6 \\ 24-18 & -12+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = B$$

Αρα ο B είναι αδύναμος.

Για τον Γ έχουμε:

$$\Gamma^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Αρα ο Γ είναι ενελικτικός.

4.6 ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορισμός 4.6.1

Ανάστροφος (transpose) ενός πίνακα $A \in M_{m \times n}$ ονομάζεται ο $n \times m$ πίνακας που έχει γραμμές τις στήλες του A και στήλες τις γραμμές του A. Αναλυτικά, αν $A = (a_{ij})_{m \times n}$, τότε ο ανάστροφος του A, που θα συμβολίζεται με A^T, είναι ο πίνακας

$$A^T = (a_{ji}) \in M_{n \times m}$$

Παράδειγμα

Εστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 5 \\ 3i & 2+2i & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Οι ανάστροφοι τους είναι οι:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1+i & 3i \\ 2-3i & 2+2i \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο ανάστροφος ενός πίνακα γραμμής είναι πίνακας στήλης και αντίστροφα.

Παρατήρηση

Εστω $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ένας πίνακας. Τότε για τον ανάστροφό του έχουμε

$$A^T = (a'_{ij})_{n \times m} \quad \text{όπου} \quad a'_{ij} = a_{ji}$$

Θεώρημα 4.6.2

Εστω ένας πίνακας $A \in M_{m \times n}$. Τότε

(α) $(A^T)^T = A$

(β) $(A+B)^T = A^T + B^T$, $B \in M_{m \times n}$

(γ) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $\lambda \in K$.

(δ) $(AB)^T = B^T A^T$, $B \in M_{n \times p}$

Απόδειξη

Η απόδειξη των (α)-(γ) είναι απλή και αφήνεται ως άσκηση.

(δ). Εστω $A = (a_{ij})_{m \times n}$ και $B = (b_{ij})_{n \times p}$ οπότε

$$A^T = (a'_{ij})_{n \times m} \quad \text{όπου} \quad a'_{ij} = a_{ji}$$

και

$$B^T = (b'_{ij})_{p \times n} \quad \text{όπου} \quad b'_{ij} = b_{ji}$$

Για το γινόμενο AB έχουμε:

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{m \times p} \quad \text{οπότε} \quad (AB)^T = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} \right)_{p \times m}$$

Εχουμε τώρα για το $B^T A^T$:

$$B^T A^T = \left(\sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj} \right)_{p \times m} = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} \right)_{p \times m} \Longrightarrow$$

$$B^T A^T = (AB)^T \qquad \square$$

Αν οι πίνακες

$$A_1, A_2, \ldots, A_k$$

είναι συμβιβαστοί ως προς τον πολλαπλασιασμό (με τη σειρά που δίνονται), μπορούμε επαγωγικά να γενικεύσουμε την ιδιότητα (δ) του Θ. 4.6.2:

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T A_{k-1}^T \cdots A_2^T A_1^T$$

Πρόταση 4.6.3

Εστω ο πίνακας $A \in M_{n\times n}$. Ο A^T είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο A είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον

$$\boxed{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T}.$$

Απόδειξη

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I.$$

Αναστρέφοντας την πιο πάνω σχέση παίρνουμε:

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T \Longrightarrow$$

$$(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I$$

Εφόσον ο αντίστροφος του A^T είναι μοναδικός $\Rightarrow$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Ομοια αποδεικνύεται και το αντίστροφο. $\blacksquare$

Η πρόταση 4.6.3 μπορεί να γενικευθεί επαγωγικά.

Πρόταση 4.6.3 (Γενίκευση)

Αν ο πίνακας $A \in M_{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος και ο r ακέραιος τότε

$$\boxed{(A^r)^T = (A^T)^r}$$

Σημείωση

Το πιο πάνω αποτέλεσμα ισχύει και όταν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος αλλά μόνο για μη αρνητικό r.

Ορισμός 4.6.4

Ο τετραγωνικός πίνακας A καλείται <u>συμμετρικός</u> (symmetric) αν

$$A^T = A$$

(δηλ. αν $a_{ij} = a_{ji}$) και <u>αντισυμμετρικός</u> (skew symmetric) αν

$$A^T = -A$$

(δηλ. αν $a_{ij} = -a_{ji}$).

Παράδειγμα 1

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} x & \alpha & \beta \\ \alpha & y & \gamma \\ \beta & \gamma & z \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικός και

ο $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός.

Παράδειγμα 2

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \beta \\ \alpha & 0 & -3 \\ 2 & \gamma & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός

όταν $\alpha = 1$, $\beta = -2$ και $\gamma = 3$.

Παρατήρηση

Όλα τα διαγώνια στοιχεία ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι μηδέν.

Κάθε τετραγωνικός πίνακας A μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο $\frac{1}{2}(A + A^T)$ είναι συμμετρικός και ο $\frac{1}{2}(A - A^T)$ είναι αντισυμμετρικός.

Ορισμός 4.6.5

Ο τετραγωνικός πίνακας A καλείται ορθογώνιος (orthogonal) αν

$$A A^T = A^T A = I$$

Είναι φανερό ότι ο αντίστροφος ενός ορθογώνιου πίνακα είναι ο ανάστροφός του:

$$A^{-1} = A^T$$

<u>Παράδειγμα</u>

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

είναι ορθογώνιος γιατί

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Ως γνωστό ο συζυγής $\bar{z}$ ενός μιγαδικού αριθμού

$$z = x + yi$$

είναι ο

$$\bar{z} = x - yi.$$

<u>Ορισμός 4.6.6</u>

(α) Καλούμε <u>συζυγή</u> (conjugate) του πίνακα $A = (a_{ij})_{m\times n}$ και τον συμβολίζουμε με $\bar{A}$ τον πίνακα

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{m\times n}$$

(β) Καλούμε <u>αναστροφοσυζυγή</u> (Hermitian transpose ή tranjugate) του A, και τον συμβολίζουμε με A^*, τον πίνακα

$$A^* = (\bar{A})^T = \overline{A^T}$$

<u>Ορισμός 4.6.7</u>

Ο τετραγωνικός πίνακας A λέμε ότι είναι <u>ερμιτιανός</u> (Hermitian) αν ισχύει

$$A^* = A.$$

Αν ισχύει

$$A^* = -A$$

τότε λέμε ότι ο A είναι <u>αντιερμιτιανός</u> (anti-Hermitian)

<u>Παρατηρήσεις</u>

(1) Ο πίνακας A είναι πραγματικός αν και μόνο αν

$$\bar{A} = A$$

(2) Ο πίνακας A είναι καθαρώς φανταστικός αν και μόνο αν

$$\bar{A} = -A$$

(3) Αν ο τετραγωνικός πίνακας A είναι πραγματικός ($\bar{A} = A$) τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$A^* = A \iff A^T = A$$

και

$$A^* = -A \iff A^T = -A.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε πραγματικός ερμιτιανός πίνακας είναι συμμετρικός και κάθε πραγματικός αντιερμιτιανός πίνακας είναι αντισυμμετρικός.

Παράδειγμα 1

Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & i & 5+3i \\ 3i & -1-i & 1+3i & 2 \\ -2 & 0 & -3i & 1+i \end{bmatrix}.$$

Θα βρούμε τον ανάστροφο A^T, τον συζυγή $\bar{A}$ και τον αναστροφοσυζυγή A^*.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1+i & 3i & -2 \\ 2 & -1-i & 0 \\ i & 1+3i & -3i \\ 5+3i & 2 & 1+i \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & -i & 5-3i \\ -3i & -1+i & 1-3i & 2 \\ -2 & 0 & 3i & 1-i \end{bmatrix}$$

$$A^* = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 1-i & -3i & -2 \\ 2 & -1+i & 0 \\ -i & 1-3i & 3i \\ 5-3i & 2 & 1-i \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ερμιτιανός ενώ ο

$$B = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι αντιερμιτιανός.

Παράδειγμα 3

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1-i & 2 \\ x & 3i & 2+3i \\ y & z & i \end{bmatrix}$

είναι αντιερμιτιανός όταν $x = -1-i$, $y = -2$ και $z = -2+3i$.

Παρατήρηση

Τα διαγώνια στοιχεία ενός ερμιτιανού πίνακα είναι όλα πραγματικοί ενώ τα διαγώνια στοιχεία ενός αντιερμιτιανού πίνακα είναι όλα καθαρώς φανταστικοί.

Θεώρημα 4.6.8

Αν είναι $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ και $\kappa \in \mathbb{C}$, τότε

(α) $\overline{\overline{A}} = A$

(β) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$

(γ) $\overline{\kappa A} = \overline{\kappa}\,\overline{A}$

(δ) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$

(ε) $(\overline{A})^T = (\overline{A^T})$

Απόδειξη: Απλή. Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Θεώρημα 4.6.9

Αν είναι $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ και $\kappa \in \mathbb{C}$, τότε

(α) $(A^*)^* = A$

(β) $(A+B)^* = A^* + B^*$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$

(γ) $(\kappa A)^* = \overline{\kappa}\, A^*$

(δ) $(AB)^* = B^* A^*$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$

Απόδειξη: (α) και (β). Αφήνεται ως άσκηση.

(γ) $(\kappa A)^* = (\overline{\kappa A})^T = (\overline{\kappa}\,\overline{A})^T = \overline{\kappa}\,(\overline{A})^T = \overline{\kappa}\, A^*$

(δ) $(AB)^* = (\overline{AB})^T = (\overline{A}\,\overline{B})^T = (\overline{B})^T\,(\overline{A})^T = B^* A^*$ $\square$

4.7 ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι πίνακες. Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

όπου

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

και $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$.

Καλούμε <u>σύνθετο πίνακα</u> (block or partitioned matrix) ένα πίνακα που έχει ως στοιχεία του πίνακες.

Ενας σύνθετος πίνακας προκύπτει, εάν διαμερίσουμε έναν (απλό) πίνακα σε υποπίνακες, χρησιμοποιώντας οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές, π.χ.

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc:c} 2 & 1 & 0 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & -1 \\ \hdashline 1 & -3 & 4 & 0 & 7 \end{array}\right].$$

Με την πιο πάνω διαμέριση ο πίνακας A μπορεί να γραφεί ως σύνθετος πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

όπου

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$$

Οι πράξεις με σύνθετους πίνακες ορίζονται ακριβώς όπως και οι πράξεις με απλούς πίνακες, χρησιμοποιώντας τους υποπίνακες ως απλά στοιχεία. Βεβαίως οι πράξεις ορίζονται μόνον αν οι αντίστοιχοι υποπίνακες είναι συμβιβαστοί.

<u>Πρόσθεση σύνθετων πινάκων</u>

Εστω δύο σύνθετοι πίνακες του ίδιου τύπου:

$$A = (A_{ij}) \qquad \text{και} \qquad B = (B_{ij}).$$

Οι A και B είναι συμβιβαστοί ως προς την πρόσθεση εφόσον οι A_{ij} και B_{ij} είναι του ίδιου τύπου για κάθε i, j. Εχουμε τότε

$$A + B = (A_{ij} + B_{ij})$$

<u>Παράδειγμα</u>

Εαν

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

τότε

$$A+B=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0\\-2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-1\\4&1\end{bmatrix} \\ [3]+[-5] & [5\ \ -2]+[-3\ \ 0] \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$A+B=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3&-1\\2&4\end{bmatrix} \\ [-2] & [2\ \ -2] \end{bmatrix}$$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Αν ο $A=(A_{ij})$ είναι ένας σύνθετος πίνακας και $\lambda \in K$, τότε

$$\lambda A = (\lambda A_{ij}).$$

Πολλαπλασιασμός σύνθετων πινάκων

Για να είναι δύο σύνθετοι πίνακες $A=(A_{ij})$ και $B=(B_{ij})$ συμβιβαστοί ως προς τον πολλαπλασιασμό πρέπει αφενός να προέρχονται από συμβιβαστούς απλούς πίνακες και, αφετέρου, να έχουν διαμεριστεί έτσι ώστε η διαμέριση των στηλών του A να είναι ίδια με τη διαμέριση των γραμμών του B.

Παράδειγμα

Εστω ο σύνθετος πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} (A_{11})_{k\times m} & (A_{12})_{k\times n} \\ (A_{21})_{\ell\times m} & (A_{22})_{\ell\times n} \end{bmatrix}$$

που προέρχεται από ένα απλό πίνακα τύπου $(k+\ell)\times(m+n)$.

Ο σύνθετος πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} (B_{11})_{m \times p} \\ (B_{21})_{n \times p} \end{bmatrix}$$

προέρχεται από ένα απλό πίνακα τύπου $(m+n) \times p$ και είναι συμβιβαστός με τον A. Εχουμε για το γινόμενο AB:

$$AB = \begin{bmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21})_{k \times p} \\ (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21})_{\ell \times p} \end{bmatrix}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

4.1 Αν είναι

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}\quad \text{και}\quad \Gamma=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

να υπολογιστούν οι κάτωθι πίνακες:

(α) $A+B+\Gamma$ (β) $2A-\Gamma$ (γ) $2B+3\Gamma$

4.2 Να δειχθεί ότι οι παρακάτω πίνακες είναι ορθογώνιοι:

(α) $$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(β) $$B=\begin{bmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

4.3 Να δειχθεί ότι αν ο B είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$AB^{-1}=B^{-1}A \quad \text{αν και μόνο αν} \quad AB=BA.$$

4.4 Αν οι A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, να δειχθούν τα εξής:

(α) $$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A\,(A+B)^{-1}B$$

(β) $$(I+AB)^{-1}A=A\,(I+BA)^{-1}$$

(γ) $$(A+BB^{T})^{-1}B=A^{-1}B\,(I+B^{T}A^{-1}B)^{-1}$$

4.5 Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνιος.

4.6 Αν είναι

$$\sigma_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2=\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \sigma_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

να δειχθούν τα εξής:

(α) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=I$

(β) $\sigma_1\sigma_2=-\sigma_2\sigma_1=i\sigma_3$

$\sigma_2\sigma_3=-\sigma_3\sigma_2=i\sigma_1$

$\sigma_3\sigma_1=-\sigma_1\sigma_3=i\sigma_2$

(γ) $(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2=3I$

4.7 Έστω ο πίνακας $S=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

(α) Να δειχθεί ότι ο S είναι ορθογώνιος.

(β) Αν είναι $P=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, να δειχθεί ότι ο SPS^T είναι διαγώνιος.

4.8 Αν είναι

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

να δείξετε ότι $S\bar{S}^T = I$.

[Σημείωση: πίνακες που ικανοποιούν την πιο πάνω συνθήκη καλούνται <u>ορθομοναδιαίοι</u> (unitary)].

4.9 Να βρεθούν όλοι οι 2x2 πίνακες που αντιμετατίθενται με τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.10 Να δειχθεί ότι το σύνολο W των 2x2 πινάκων που αντιμετατίθενται με τον $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$ ~~και $b \neq 0$~~, είναι ένας υπόχωρος του M_{2x2}.
Να βρεθεί επίσης μια βάση του W. Ποιά είναι η $\dim W$;

4.11

4.12 Αν είναι $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, να βρεθεί ο A^n, όπου n φυσικός.

4.13 Αν οι πίνακες A, B είναι συμμετρικοί, να δείξετε ότι και ο $(AB+BA)$ είναι συμμετρικός.

4.14 Αν είναι $A, B \in M_{n\times n}$, να δείξετε ότι οι πιο κάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) Οι A, B είναι αντιμεταθέσιμοι.

(β) Οι $(A-\lambda I)$, $(B-\lambda I)$ είναι αντιμεταθέσιμοι για κάθε λ.

4.15 Να δειχθεί ότι αν $A, B \in M_{n\times n}$, τότε η

$$AB - BA = I$$

είναι αδύνατη.

4.16 Να δειχθεί ότι αν οι A, B είναι αδύναμοι, τότε οι κάτωθι προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) Ο $A+B$ είναι αδύναμος

(β) $AB = BA = 0$

4.17 Εστω οι $A, B \in M_{n\times n}$. Να δειχθεί ότι αν

$$AB + A + I = 0$$

τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = -(I+B).$$

4.18 Να αποδειχθεί το Θ. 4.4.6.

4.19 Να δειχθεί ότι αν

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

τότε

$$A(\theta)A(\varphi) = A(\theta+\varphi).$$

4.20 Αν είναι

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix},$$

να δειχθεί ότι για κάθε ακέραιο n ισχύει

$$A^n = \begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix}$$

4.21 Αν είναι

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

4.22 Αν $A \in M_{n \times n}$, να δειχθούν τα εξής:

(α) Ο $A^T A$ είναι συμμετρικός

(β) Ο $(A + A^T)$ είναι συμμετρικός και ο $(A - A^T)$ αντισυμμετρικός.

(γ) Ο A μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα κατά μοναδικό τρόπο.

4.23 Εστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(α) Να επιβεβαιωθεί ότι $B^{-1} = (1/3)B$.

(β) Να δειχθεί ότι ο $B^{-1}AB$ είναι διαγώνιος.

(γ) Να βρεθεί ο A^n, όπου n φυσικός αριθμός.

4.24 Εστω ο πινακας

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

(α) Να δειχθεί ότι ο A είναι ενελικτικός.

(β) Αν είναι

$$P = AM_1A \quad \text{και} \quad Q = AM_2A,$$

όπου M_1, M_2 τυχόντες διαγώνιοι 4×4 πίνακες, να δειχθεί ότι

$$PQ = QP.$$

4.25 Αν $A, B \in M_{n\times n}$ και ο A είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι:

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$$

4.26 Αν $A \in M_{n\times n}$ και οι $\lambda, \mu \in K$ είναι τέτοιοι ώστε οι πίνακες $(A-\lambda I)$ και $(A-\mu I)$ να είναι αντιστρέψιμοι, να δειχθεί ότι:

$$(\mu-\lambda)(A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I)^{-1} = (A-\mu I)^{-1} - (A-\lambda I)^{-1}.$$

4.27

4.28 Εστω ένας συμμετρικός πίνακας $A \in M_{n \times n}$ και ένας αντισυμμετρικός πίνακας $B \in M_{n \times n}$. Αν ο $(A+B)$ είναι αντιστρέψιμος και

$$C = (A+B)^{-1}(A-B)$$

να δειχθούν τα εξής:

(α) $C^T(A+B)C = A+B$

(β) $C^T(A-B)C = A-B$

4.29 Αν οι A, B είναι αντιμεταθέσιμοι και αντιστρέψιμοι, να δειχθούν τα εξής:

(α) $AB^{-1} = B^{-1}A$

(β) $A^{-1}B = BA^{-1}$

(γ) $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4.30 Να βρεθεί η γενική μορφή του πραγματικού $n \times n$ πίνακα ο οποίος αντιμετατίθεται με τον πίνακα

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.31 Εστω ένας συμμετρικός πίνακας A και ένας αντισυμμετρικός B. Αν οι A, B είναι αντιμεταθέσιμοι και ο $(A+B)$ είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$(A+B)^{-1}(A-B)$$

είναι ορθογώνιος.

4.32 Να δειχθεί ότι, αν ο $I+SA$ είναι αντιστρέψιμος, όπου A συμμετρικός πίνακας και S αντισυμμετρικός, τότε ο πίνακας

$$L = (I-SA)(I+SA)^{-1}$$

είναι τέτοιος ώστε

$$L^T A L = A.$$

Αντίστροφα, αν είναι $L^T A L = A$, όπου ο A είναι συμμετρικός και οι $I+L$, A είναι αντιστρέψιμοι, να δειχθεί ότι ο

$$S = (I+L)^{-1}(I-L)A^{-1}$$

είναι αντισυμμετρικός.

4.33 Αν

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2/2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

να δειχθεί ότι $A(\alpha)A(\beta) = A(\alpha+\beta)$. Στη συνέχεια, να βρεθεί ο αντίστροφος του $A(\alpha)$. Επίσης να δειχθεί ότι

$$A(3\alpha) - 3A(2\alpha) + 3A(\alpha) = I.$$

4.34 Να δειχθεί ότι κάθε 2×2 πίνακας X, για τον οποίο έχουμε

$$X^T A X = B,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

έχει μια από τις δύο μορφές:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \frac{1}{2\alpha} \\ \alpha & -1/2\alpha \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \alpha & 1/2\alpha \\ -\alpha & 1/2\alpha \end{bmatrix}.$$

4.35 Να βρεθούν όλοι οι πίνακες X, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση

$$X^T X = 2I \qquad (X \in M_{2\times 2}).$$

4.36 Αν ο A είναι ένας πραγματικός πίνακας, να βρεθεί το $tr(A^T A)$ συναρτήσει των στοιχείων του A. Κατόπιν, να δειχθεί ότι αν οι A, B είναι πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες και ο C αντισυμμετρικός, τότε

αν $A^2 + B^2 = C^2 \Longrightarrow A = B = C = 0$.

Καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα αν ο A δεν είναι αναγκαστικά συμμετρικός;

5 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

5.1 ΓΕΝΙΚΑ

Ορισμός 5.1.1

Εστω ένας πίνακας $A=(a_{ij})_{m\times n}$ πάνω σε ένα σώμα K. Αν οι

$$r_i = [a_{i1} \; a_{i2} \; \cdots \; a_{in}] \;, \quad i=1,2,\ldots,m$$

είναι οι γραμμές του A, έχουμε κατά τα γνωστά την ακόλουθη σύνθετη μορφή του A:

$$A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$$

Ονομάζουμε <u>στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών</u> (elementary row operations) τις εξής πράξεις που εφαρμόζονται πάνω στις γραμμές του A:

(i) Αντικατάσταση μιας γραμμής r_i με ένα πολλαπλάσιό της ar_i $(a\in K, a\neq 0)$, συμβολικά:

$$r_i \longrightarrow ar_i$$

(ii) Αντικατάσταση μιας γραμμής r_i με το άθροισμα $r_i + ar_j$ $(a\in K)$, συμβολικά:

$$r_i \longrightarrow r_i + ar_j .$$

(iii) Αντιμετάθεση των γραμμών r_i και r_j, συμβολικά

$$r_i \longleftrightarrow r_j$$

Είναι φανερό ότι η εφαρμογή ενός ή περισσότερων από τους παραπάνω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στις γραμμές ενός πίνακα A οδηγεί σε ένα νέο πίνακα B του ίδιου τύπου με τον A.

<u>Ορισμός 5.1.2</u>

Οι $m \times n$ πίνακες A και B λέγονται <u>γραμμοϊσοδύναμοι</u> (row equivalent) αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με εκτέλεση ενός πεπερασμένου αριθμού στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

Σημειώνουμε ότι με ανάλογο τρόπο ορίζονται και οι <u>στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών</u>. Θα λέμε ότι οι πίνακες $A, B \in M_{m\times n}$ είναι <u>στηλοϊσοδύναμοι</u> αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με εκτέλεση ενός πεπερασμένου αριθμού στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών.

Την ισοδυναμία δύο πινάκων A και B συμβολίζουμε με

$$A \sim B$$

<u>Παράδειγμα 1</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + 2r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & -3 \\ -3 & 12 & -6 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix} = B$$

Οι A και B είναι προφανώς γραμμοϊσοδύναμοι.

Ο <u>αντίστροφος μετασχηματισμός γραμμών</u> (ή στηλών) ορίζεται ως ο μετασχηματισμός που αναιρεί ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών (ή στηλών). Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι και αυτός στοιχειώδης.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Στο παράδειγμα 1 ο B προκύπτει από τον A μετά από εφαρμογή των μετασχηματισμών:

$$r_1 \longleftrightarrow r_3$$
$$r_3 \longrightarrow r_3 + 2r_2$$
$$r_2 \longrightarrow 3r_2.$$

Ο A προκύπτει από τον B εφαρμόζοντας την αντίστροφη ακολουθία μετασχηματισμών:

$$r_2 \longrightarrow 1/3\, r_2.$$
$$r_3 \longrightarrow r_3 - 2r_2.$$
$$r_1 \longleftrightarrow r_3$$

(Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει του λόγου το αληθές).

<u>Ορισμός 5.1.3</u>

Εστω ένας $m \times n$ πίνακας A.

Καλούμε <u>ηγετικό</u> (leading) στοιχείο μιας μη μηδενικής γραμμής το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της γραμμής.

Ο πίνακας A ονομάζεται <u>Γ-κλιμακωτός</u> (echelon) αν:

(i) το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1.

(ii) Το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής βρίσκεται στα δεξιά του ηγετικού 1 κάθε προηγούμενης γραμμής.

(iii) οι μη μηδενικές γραμμές εμφανίζονται πριν από τις μηδενικές.

Ένας κλιμακωτός πίνακας λέγεται <u>ανηγμένος Γ-κλιμακωτος πίνακας</u> (reduced echelon matrix) αν επιπλέον:
(iv) το ηγετικό 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

<u>Παράδειγμα</u>

(α) Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν είναι κλιμακωτοί.

Ο πρώτος μετασχηματίζεται σε κλιμακωτό με στοιχειώδη μετασχηματισμό του τύπου: $r_i \to r_i + a r_j$.

Ο δεύτερος μετασχηματίζεται σε κλιμακωτό με δύο στοιχειώδεις μετασχηματισμούς (ο ένας είναι του τύπου $r_i \leftrightarrow r_j$ και ο άλλος του τύπου $r_i \to a r_i$).

Τέλος, ο τρίτος μετασχηματίζεται σε κλιμακωτό μετά από τρεις πράξεις του τύπου $r_i \to a r_i$.

<u>Άσκηση</u> Ποιες ακριβώς είναι οι πράξεις που απαιτούνται για να μετασχηματιστούν οι πιο πάνω πίνακες σε κλιμακωτούς;

(β) Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι κλιμακωτοί (αλλά μη ανηγμένοι).

(γ) Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί.

Θεώρημα 5.1.4

Κάθε $m \times n$ πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με ένα $m \times n$ ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

Απόδειξη (Μέθοδος απαλοιφής του Gauss).

Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ j-στήλη τοῦ A, ὅπου $1 \le j \le n$, εἶναι ἡ πρώτη στήλη τοῦ A στήν ὁποία ὑπάρχει ἕνα μή-μηδενικό στοιχείο. Ἔστω ὅτι $a_{ij} \neq 0$, ὅπου $1 \le i \le m$, τότε ὁ στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμῶν $r_i \to \dfrac{1}{\alpha_{ij}} r_i$ πού ἀκολουθεῖται ἀπό τό στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμῶν $r_1 \leftrightarrow r_i$ δίνει ἕναν πίνακα μέ τό 1 στήν $(1, j)$-θέση, δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \beta_{1j+1} & \dots & \beta_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{2j} & \beta_{2j+1} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{mj} & \beta_{mj+1} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

Τώρα, οἱ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμῶν $r_k \to r_k - \beta_{kj} r_1$ $(k = 2, \dots, m)$ δίνουν τόν πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \gamma_{1j+1} & \dots & \gamma_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_{2j+1} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_{mj+1} & \dots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}$$

Ἄν σ' αὐτή τή φάση ἔχουν ἐμφανισθεῖ μηδενικές γραμμές, μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ἐναλλαγή γραμμῶν ἔτσι ὥστε οἱ μή-μηδενικές γραμμές νά ἐμφανισθοῦν πρίν ἀπό τίς μηδενικές γραμμές. Μποροῦμε τώρα νά ἐπαναλάβουμε τήν ἴδια διαδικασία μέ τίς τελευταῖες $m - 1$ γραμμές αὐτοῦ τοῦ πίνακα γιά νά πάρουμε τόν πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & \delta_{1,j+1} & \ldots & \delta_{1,k-1} & \delta_{1k} & \delta_{1,k+1} & \ldots & \delta_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \delta_{2,k+1} & \ldots & \delta_{2n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \delta_{3k} & \delta_{3,k+1} & \ldots & \delta_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \delta_{mk} & \delta_{m,k+1} & \ldots & \delta_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Ἔτσι, μετά ἀπό ἕναν πεπερασμένο ἀριθμό βημάτων, προκύπτει ἕνας πίνακας ὁ ὁποῖος εἶναι σέ κλιμακωτή μορφή. Τώρα ἀπ' αὐτόν τόν πίνακα παίρνουμε ἕναν πίνακα σέ ἀνηγμένη κλιμακωτή μορφή, ἄν ἐφαρμόσουμε μιά ἀκολουθία στοιχειωδῶν μετασχηματισμῶν γραμμῶν τοῦ τύπου 1.2(ii). Παραδείγματος χάρη, ἡ ἀκολουθία στοιχειωδῶν μετασχηματισμῶν γραμμῶν τῆς μορφῆς $r_i \to r_i - \delta_{ik} r_2$ $(i = 1, 3, \ldots, m)$ ἀνάγει τόν πίνακα (1) στή μορφή

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & 1 & \epsilon_{1,j+1} & \ldots & \epsilon_{1,k-1} & 0 & \epsilon_{1,k+1} & \ldots & \epsilon_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \epsilon_{2,k+1} & \ldots & \epsilon_{2n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \epsilon_{3,k+1} & \ldots & \epsilon_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \epsilon_{m,k+1} & \ldots & \epsilon_{mn} \end{pmatrix}$$

Αὐτό συμπληρώνει τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος. ■

Ἡ πιό πάνω ἀπόδειξη θά κατανοηθεῖ καλύτερα, ἄν δοθεῖ ἰδιαίτερη προσοχή στό ἑπόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἔστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οἱ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμῶν $r_2 \to \frac{1}{2} r_2$, $r_1 \leftrightarrow r_2$ καί $r_4 \leftrightarrow r_5$ δίνουν τόν πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οἱ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμῶν $r_3 \to r_3 - 3r_1$, $r_4 \to r_4 - 5r_1$ δίνουν τόν πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τώρα ἐφαρμόζοντας τούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμῶν μέ τήν τάξη πού δίνονται $r_2 \leftrightarrow r_3$, $r_1 \to r_1 - r_2$, $r_4 \to r_4 - r_2$, $r_3 \to r_3 - 10r_2$, $r_2 \to 2r_2$ παίρνουμε τόν πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

καί τελικά, οἱ $r_1 \to r_1 - 3r_3$, $r_2 \to r_2 + 5r_3$ δίνουν τόν ἀνηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Σημείωση: Πρέπει νά τονισθεῖ ὅτι αὐτοί οἱ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμῶν πρέπει νά ἐφαρμοσθοῦν μέ τήν τάξη πού δίνονται.

Ασκηση Να βρεθούν όλοι οι ενδιάμεσοι πίνακες του πιο πάνω παραδείγματος.

5.2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Εστω ένα σώμα K και ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με συντελεστές a_{ij} και σταθερές b_i από τό σώμα K:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

Ενα σύστημα της μορφής (1) ονομάζεται <u>γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους</u>.

Το σύστημα (1) γράφεται συχνά στη μορφή

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (2)$$

ή ακόμα ως εξίσωση πινάκων:

$$AX = B \qquad (3)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

O $m\times n$ πίνακας A ονομάζεται <u>πίνακας των συντελεστών</u> (matrix of coefficients). O πίνακας στήλη $X = (x_1\ x_2 \cdots x_n)^T$ είναι ο <u>πίνακας των αγνώστων</u> και ο πίνακας στήλη $B = (b_1\ b_2 \cdots b_m)^T$ είναι ο <u>πίνακας των σταθερών</u>.

Ο $m\times(n+1)$ σύνθετος πίνακας

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \qquad (4)$$

ονομάζεται <u>επαυξημένος πίνακας</u> (augmented matrix) του συστήματος. Προφανώς, ο επαυξημένος πίνακας $[A|B]$ χαρακτηρίζει πλήρως το γραμμικό σύστημα (1).

<u>Ορισμός 5.2.1</u>

Μια διατεταγμένη νιάδα $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ που ικανοποιεί το γραμμικό σύστημα (1) ονομάζεται <u>λύση</u> του συστήματος.

Εαν το γραμμικό σύστημα (1) έχει τουλάχιστο μια λύση, το σύστημα λέγεται <u>συμβιβαστό</u>, διαφορετικά λέγεται <u>ασυμβίβαστο</u> ή <u>μη συμβιβαστό</u>.

Δύο γραμμικά συστήματα με τον ίδιο αριθμό αγνώστων λέγονται <u>ισοδύναμα</u> αν και μόνο αν κάθε λύση του ενός είναι λύση του άλλου.

Το γραμμικό σύστημα (1) ονομάζεται <u>ομογενές</u> αν οι σταθερές b_i, $i=1,2,\cdots,m$ είναι όλες μηδενικές:

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$$

Η μηδενική λύση $(0,0,\cdots,0)$ ενός ομογενούς συστήματος λέγεται <u>τετριμμένη</u> λύση.

Παράδειγμα 1

Εστω το μη ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad (5)$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (5) είναι ο

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

Η μοναδική λύση του (5) είναι η $(1,2,3)$, δηλ. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ και $x_3 = 3$.

Το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 3x_1 - 2x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad (6)$$

έχει και αυτό μοναδική λύση την $(1,2,3)$. Ετσι τα γραμμικά συστήματα (5) και (6) είναι ισοδύναμα.

Παράδειγμα 2

Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

είναι ομογενές με επαυξημένο πίνακα τον

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Εκτός από την τετριμμένη λύση $(0,0,0)$, αποδεικνύεται εύκολα ότι το σύστημα (7) έχει και άλλες (άπειρες) λύσεις.

<u>Θεώρημα 5.2.2</u>

Εστω ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους με επαυξημένο πίνακα τον $m\times(n+1)$ πίνακα

$$[A|B]=[a_{ij}|b_i].$$

Αν $[A'|B']=[a'_{ij}|b'_i]$ είναι ο επίσης $m\times(n+1)$ πίνακας που προκύπτει από τον $[A|B]$ εφαρμόζοντας ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών, τότε τα συστήματα

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i\ ,\qquad i=1,2,\ldots,m \qquad (8)$$

και

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}x_j=b'_i\ ,\qquad i=1,2,\ldots,m \qquad (9)$$

είναι ισοδύναμα.

<u>Απόδειξη</u>

. Ο $[A'|B']$ προκύπτει από τον $[A|B]$ εφαρμόζοντας έναν από τους πιο κάτω μετασχηματισμούς:

(i) $r_i\longrightarrow ar_i\ ,\quad a\in K\ ,\ a\neq 0$

(ii) $r_i\longrightarrow r_i+ar_j\ ,\ a\in K$

(iii) $r_i\longleftrightarrow r_j$

(i) Με τον μετασχηματισμό $r_i\longrightarrow ar_i$, η μόνη εξίσωση του αρχικού συστήματος που αλλάζει είναι η εξίσωση i που αντικαθίσταται από την

$$a\,a_{i1}x_1+a\,a_{i2}x_2+\cdots+a\,a_{in}x_n=ab_i$$

Αν η $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ είναι μια λύση του αρχικού συστήματος (8), τότε αυτή είναι επίσης λύση του νέου συστήματος (9).

(ii) Με τον μετασχηματισμό $r_i\longrightarrow r_i+ar_j$, η εξίσωση i του αρχικού συστήματος αντικαθίσταται από την

$$(a_{i1}+a\,a_{j1})x_1+(a_{i2}+a\,a_{j2})x_2+\dots+(a_{in}+a\,a_{jn})x_n=b_i+a\,b_j$$

Εφόσον μια λύση του αρχικού συστήματος ικανοποιεί τις αρχικές εξισώσεις i και j, ικανοποιεί και την εξίσωση i του νέου συστήματος.

(iii) Με τον μετασχηματισμό $r_i \leftrightarrow r_j$, αλλάζει απλώς η θέση δύο εξισώσεων του αρχικού συστήματος οπότε κάθε λύση του αρχικού είναι λύση και του νέου συστήματος.

Αντίστροφα, μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε λύση του νέου συστήματος (9) είναι λύση του αρχικού (8). Ως γνωστό, ο $[A|B]$ προκύπτει από τον $[A'|B']$ εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$r_i \to a^{-1} r_i \quad \text{ή} \quad r_i \to r_i - a r_j \quad \text{ή} \quad r_i \leftrightarrow r_j,$$

που είναι επίσης στοιχειώδης. ∎

Από το Θ. 5.2.2 συνάγονται εύκολα διάφορα συμπεράσματα τα οποία θα δώσουμε στη συνέχεια μαζί με σχετικά παραδείγματα.

<u>Πόρισμα 1</u>

Αν ο $[R|S]=[r_{ij}|S_i]$ είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του επαυξημένου πίνακα $[A|B]$, τότε το σύστημα (8) είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j = S_i\,, \quad i=1,2,\dots,m \qquad (10)$$

<u>Απόδειξη</u>

Εφόσον ο $[R|S]$ προκύπτει από τον $[A|B]$ εφαρμόζοντας μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, τότε σύμφωνα με το Θ. 5.2.2 τα συστήματα (8) και (10) είναι ισοδύναμα. ∎

Παράδειγμα 1

Εστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x+y+4z&=15\\ 2x-3y+2z&=2\\ -4x+2y+z&=3 \end{aligned} \qquad (11)$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (11) είναι ο

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 15\\ 2 & -3 & 2 & 2\\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad (12)$$

Μετασχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα σε κλιμακωτό και εν συνεχεία σε ανηγμένο κλιμακωτό:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 15\\ 2 & -3 & 2 & 2\\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3\to r_3+4r_1]{r_2\to r_2-2r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 15\\ 0 & -5 & -6 & -28\\ 0 & 6 & 17 & 63 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2\to -\frac{1}{5}r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 15\\ 0 & 1 & 6/5 & 28/5\\ 0 & 6 & 17 & 63 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3\to r_3-6r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 15\\ 0 & 1 & 6/5 & 28/5\\ 0 & 0 & 49/5 & 147/5 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3\to \frac{5}{49}r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 15\\ 0 & 1 & 6/5 & 28/5\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad (13)$$

Ο πίνακας (13) είναι προφανώς ο κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει από τον επαυξημένο πίνακα $[A|B]$. Συνεχίζοντας τους μετασχηματισμούς γραμμών παίρνουμε:

$$\xrightarrow[r_1\to r_1-4r_3]{r_2\to r_2-\frac{6}{5}r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1\to r_1-r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad (14)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας.

Σύμφωνα με το πόρισμα 1 το σύστημα (1) είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 \qquad &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad (15)$$

το οποίο μας δίνει αμέσως τη ζητούμενη λύση: $x_1=1$, $x_2=2$ και $x_3=3$.

Είναι προφανές ότι το αρχικό σύστημα (11) είναι ισοδύναμο με τα συστήματα που αντιστοιχούν σε κάθε ενδιάμεσο πίνακα της απαλοιφής Gauss. Για παράδειγμα, ο κλιμακωτός πίνακας (13) αντιστοιχεί στο σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 &= 15 \\ x_2 + 6/5\, x_3 &= 28/5 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad (16)$$

Η επίλυση του πιο πάνω συστήματος είναι εύκολη. Ο x_2 βρίσκεται εύκολα από τη δεύτερη εξίσωση αντικαθιστώντας τον x_3:

$$x_2 = \frac{28}{5} - \frac{6}{5}x_3 = \frac{28}{5} - \frac{18}{5} = 2.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τον x_1 αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση τους x_2 και x_3:

$$x_1 = 15 - x_2 - 4x_3 = 15 - 2 - 12 = 1.$$

Η πιο πάνω διαδικασία εύρεσης της λύσης από το σύστημα που αντιστοιχεί στον κλιμακωτό πίνακα είναι γνωστή ως <u>πίσω αντικατάσταση</u> (back substitution).

Στη βιβλιογραφία συναντούμε δύο μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων με απαλοιφή Gauss. Αυτές είναι:

I <u>Η μέθοδος της απαλοιφής Gauss</u>

Ο επαυξημένος πίνακας μετασχηματίζεται σε κλιμακωτό και η λύση (αν υπάρχει) βρίσκεται με πίσω αντικατάσταση.

II <u>Η μέθοδος της απαλοιφής Gauss-Jordan</u>.

Ο επαυξημένος πίνακας μετασχηματίζεται σε ανηγμένο κλιμακωτό από τον οποίο εύκολα βρίσκεται η λύση (αν βέβαια αυτή υπάρχει).

Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε αποκλειστικά τη μέθοδο Gauss-Jordan.

Ενα γραμμικό σύστημα μπορεί

(α) να έχει μια μοναδική λύση, ή

(β) να έχει άπειρο αριθμό λύσεων, ή

(γ) να μην έχει λύση (μη συμβιβαστό σύστημα).

Οι διάφορες περιπτώσεις επεξηγούνται στη συνέχεια με παραδείγματα.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας $[R|S]$ έχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη και ότι αυτό βρίσκεται στη γραμμή i, δηλ.

$$r_i\big([R|S]\big) = [0 \;\; 0 \cdots 0 \mid 1]. \tag{17}$$

Η γραμμή αυτή αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n = 1 \tag{18}$$

ή

$$0 = 1$$

και είναι (προφανώς) αδύνατη. Κατά συνέπεια το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό. Εχουμε έτσι το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2

Το σύστημα $AX=B$ είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας $[R|S]$ δεν έχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη.

Παράδειγμα

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 0 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Λόγω του ότι η τρίτη εξίσωση είναι αδύνατη, το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό.

Εστω τώρα ότι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας $[R|S]$ που προκύπτει από τον $[A|B]$ όπου $A \in M_{m\times n}$ δεν περιέχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη. Έτσι, σύμφωνα με το Πόρισμα 2 το σύστημα $RX=S$ είναι συμβιβαστό. Εστω ακόμα ότι ο $[R|S]$ έχει ℓ το πλήθος μη μηδενικές γραμμές ή ισοδύναμα ℓ το πλήθος ηγετικά στοιχεία. Είναι φανερό ότι ο ℓ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των εξισώσεων ούτε μεγαλύτερος από τον αριθμό των αγνώστων:

$$\ell \le m \quad \text{και} \quad \ell \le n. \qquad (19)$$

Ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

I $\boxed{\ell = n}$

Ο αριθμός των εξισώσεων είναι αναγκαστικά μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό των αγνώστων:

$$m \geqslant \ell = n \tag{20}$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας [R|S] έχει $(m-\ell)$ το πλήθος μηδενικές γραμμές. Όλες οι στήλες του [R|S] πλην της τελευταίας (δηλ. όλες οι στήλες του R) περιέχουν ηγετικό στοιχείο και έτσι έχουν ως μόνο μη μηδενικό στοιχείο κάποιο ηγετικό 1. Ο [R|S] έχει την εξής μορφή:

$$[R|S] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & S_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & S_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & S_n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} (m-\ell) \text{ μηδενικές γραμμές} \end{matrix} \tag{21}$$

Το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$x_i = S_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{22}$$

II $\boxed{\ell < n}$

Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός των εξισώσεων m μπορεί να είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων n. Όπως και πριν, ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας [R|S] έχει $(m-\ell)$ το πλήθος μηδενικές γραμμές. Τώρα, όμως, εκτός από την τελευταία στήλη υπάρχουν επιπλέον $(n-\ell)$ το πλήθος στήλες που δεν περιέχουν ηγετικά στοιχεία. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποθέσουμε ότι οι ℓ το πλήθος στήλες που περιέχουν ηγετικά στοιχεία προηγούνται των άλλων στον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα, ο οποίος παίρνει έτσι τη μορφή:

$$[R|S] = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & r_{1,\ell+1} & \cdots & r_{1n} & & S_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & r_{2,\ell+1} & \cdots & r_{2n} & & S_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & r_{\ell,\ell+1} & \cdots & r_{\ell n} & & S_\ell \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \end{array}\right] \qquad (23)$$

Είναι προφανές ότι οι τελευταίοι $(n-\ell)$ άγνωστοι $x_{\ell+1},\dots,x_n$ μπορούν να μεταφερθούν στο δεξιό μέλος των εξισώσεων, οπότε έχουμε:

$$x_i = S_i - r_{i,\ell+1}x_{\ell+1} - \cdots - r_{in}x_n \quad , \quad i=1,2,\dots,\ell$$

ή

$$x_i = S_i - \sum_{k=\ell+1}^{n} r_{ik}x_k \quad , \quad i=1,2,\dots,\ell \qquad (24)$$

Αν δώσουμε τιμές στους $(n-\ell)$ αγνώστους $x_{\ell+1},\dots,x_n$ μπορούμε με τις (24) να προσδιορίσουμε τις αντίστοιχες τιμές των $x_1,x_2,\dots,x_\ell$. Το σύστημα μας έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Οι $(n-\ell)$ άγνωστοι $x_{\ell+1},\dots,x_n$ ονομάζονται <u>ελεύθερες μεταβλητές</u>.

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει μοναδική λύση μόνο αν

$$m \geqslant n$$

(δηλ. μόνο αν ο αριθμός των εξισώσεων είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό των αγνώστων). Αν είναι

$$m < n$$

τότε το σύστημα είτε είναι αδύνατο είτε έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Μερικά ειδικά συμπεράσματα συνάγονται εύκολα για τα ομογενή συστήματα

$$AX=0 \qquad (25)$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (25) είναι ο $[A|0]$ και επομένως ο αντίστοιχος ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι της μορφής $[R|0]$. Όλα τα ομογενή συστήματα έχουν, ως γνωστό, τουλάχιστο μία λύση, την τετριμμένη

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0,$$

και είναι ως εκ τούτου συμβιβαστά. (Καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με το Πόρισμα 2!).

Αν η τετριμμένη λύση δεν είναι μοναδική, τότε υπάρχει τουλάχιστο μία ελεύθερη μεταβλητή και συνεπώς το σύστημα (25) έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Πόρισμα 3

Αν $m<n$, το γραμμικό ομογενές σύστημα $AX=0$ έχει τουλάχιστο μία μη τετριμμένη λύση (δηλ. έχει άπειρο πλήθος λύσεων).

Αν $\ell = n$ (οπότε $m \geq \ell = n$) τότε η τετριμμένη λύση $x_1=x_2=\cdots x_n=0$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

Πόρισμα 4.

Ένα σύστημα n γραμμικών ομογενών εξισώσεων με n αγνώστους,

$$AX=0, \quad A\in M_{n\times n},$$

έχει τουλάχιστο μία μη τετριμμένη λύση (δηλ. έχει άπειρο πλήθος λύσεων) αν και μόνο αν ο αντίστοιχος ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας $[R|0]$ είναι διάφορος του $[I_n|0]$.

Απόδειξη

Αν $R = I_n$, τότε

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0,$$

δηλαδή έχουμε μόνο την τετριμμένη λύση.

Αν $R \neq I_n$, ο $[R|0]$ έχει τουλάχιστο μια μηδενική γραμμή, οπότε $\rho < n$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3, το σύστημα έχει τότε άπειρο πλήθος λύσεων. $\blacksquare$

Πόρισμα 5

Ενα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους,

$$AX = B, \quad A \in M_{n\times n},$$

έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν ο αντίστοιχος ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι ο I_n, δηλ.

$$[R|S] = [I_n|S].$$

Απόδειξη

Αν $R = I_n$, τότε

$$x_i = s_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

δηλαδή έχουμε μοναδική λύση.

Αν $R \neq I_n$, τότε ο R έχει τουλάχιστο μια μηδενική γραμμή, οπότε $\rho < n$. Το σύστημα είτε είναι μη συμβιβαστό είτε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. $\blacksquare$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι λύσεις (αν υπάρχουν) των γραμμικών συστημάτων που αντιστοιχούν στους παρακάτω ανηγμένους κλιμακωτούς πίνακες.

(α) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (β) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (γ) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

(α) Το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4.$$

(β) Το σύστημα είναι μη συμβιβαστό γιατί υπάρχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη.

(γ) Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων με μια ελεύθερη μεταβλητή, τη x_3. Θέτοντας $x_3 = \lambda$ έχουμε τη γενική λύση:

$$x_1 = 2 - 3x_3 = 2 - 3\lambda.$$
$$x_2 = 6 + x_3 = 6 + \lambda.$$

Παράδειγμα 2

Εστω το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -6 \end{aligned}$$

Θα μετασχηματίσουμε τον επαυξημένο πίνακα του γραμμικού συστήματος σε ανηγμένο κλιμακωτό.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -8 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & -8 \\ 4 & -1 & 2 & -3 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4 \to r_4 - 4r_1]{\substack{r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 18 \\ 0 & 2 & -8 & 10 & 16 \\ 0 & 7 & -10 & 13 & 26 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4 \to r_4 - 7r_2]{\substack{r_1 \to r_1 + 2r_2 \\ r_3 \to r_3 - 2r_2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 10 & 28 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 4 & -36 & -100 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4 \to \frac{1}{4} r_4]{r_3 \to -\frac{1}{4} r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 10 & 28 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -25 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4 \to r_4 - r_3]{\substack{r_1 \to r_1 + r_3 \\ r_2 \to r_2 + 2r_3}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -30 \end{array}\right] \xrightarrow{r_4 \to -\frac{1}{10} r_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_4]{\substack{r_1 \to r_1 - 11r_4 \\ r_2 \to r_2 - 9r_4}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ και $x_4 = 3$.

Παράδειγμα 3

Εστω το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Θα μετασχηματίσουμε τον επαυξημένο πίνακα του γραμμικού συστήματος σε ανηγμένο κλιμακωτό.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4 \to r_4 + 2r_1]{r_3 \to r_3 - 2r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4 \to r_4 - r_2]{r_3 \to r_3 - 3r_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_4 \to -\frac{1}{10} r_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2 \to r_2 - 2r_3 \\ r_4 \to r_4 - r_3}]{r_1 \to r_1 + 3r_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων με μια ελεύθερη μεταβλητή.

Θέτουμε $x_3 = \lambda$ και παίρνουμε τη γενική λύση:

$x_1 = x_3 = \lambda$

$x_2 = -x_3 = -\lambda$.

$x_3 = \lambda$.

$x_4 = 0$.

Παράδειγμα 4

Έστω το γραμμικό σύστημα:

$$3x_1 + x_2 = 7$$
$$x_1 - 2x_2 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 = \alpha$$

Θα βρούμε την τιμή του α για την οποία το σύστημα είναι συμβιβαστό.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_1]{r_2 \to r_2 - 3r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 8 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{7}r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 8r_2.]{r_1 \to r_1 + 2r_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-8 \end{array}\right]$$

Σύμφωνα με το Πόρισμα 2, το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν

$$\alpha - 8 = 0 \Rightarrow \alpha = 8.$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι τότε ο

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

και η λύση είναι: $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$.

5.3 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορισμός 5.3.1

Ενας $n \times n$ πίνακας E λέγεται στοιχειώδης πίνακας (elementary matrix) αν προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα I_n με εφαρμογή ενός στοιχειώδη μετασχηματισμού γραμμών.

Συνεπώς, έχουμε τρεις τύπους στοιχειωδών πινάκων που αντιστοιχούν στους τρεις στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών:

I E_i^a με $I_n \xrightarrow{r_i \to a r_i} E_i^a$, $a \neq 0$

II $E_{i,j}^a$ με $I_n \xrightarrow{r_i \to r_i + a r_j} E_{i,j}^a$

III E_{ij} με $I_n \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E_{ij}$

Παράδειγμα

Οι παρακάτω 4×4 πίνακες είναι στοιχειώδεις:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2^a \qquad \left(I_4 \xrightarrow{r_2 \to a r_2} E_2^a \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{2,3}^a \qquad \left(I_4 \xrightarrow{r_2 \to r_2 + a r_3} E_{2,3}^a \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{2,4} \qquad \left(I_4 \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} E_{2,4} \right).$$

Πρόταση 5.3.2.

Εστω δύο mxn πίνακες A και B. Αν ο B προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών, τότε

$$B = EA$$

όπου E είναι ο αντίστοιχος στοιχειώδης mxm πίνακας.

Απόδειξη

Εξετάζουμε ξεχωριστά τους τρεις τύπους στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

(i) $r_i \longrightarrow a r_i$, $a \neq 0$

Ο αντίστοιχος στοιχειώδης mxm πίνακας είναι ο

$$E_i^a = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Εστω $B = (b_{\ell k}) = E_i^a A$.

Για $\ell \neq i$ έχουμε

$$b_{\ell k} = r_\ell(E)\, C_k(A) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \cdots 1 \cdots 0 \end{bmatrix} \\ \ell \end{array} \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$b_{\ell k} = a_{\ell k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$
$$\ell = 1, 2, \dots, m \text{ με } \ell \neq i$$

Ετσι, όλα τα στοιχεία του B εκτός της i γραμμής είναι ίσα με τα ομόθεσια στοιχεία του A.

Αν τώρα $\ell = i$, έχουμε:

$$b_{ik} = r_i(E)\, C_k(A) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \cdots a \cdots 0 \end{bmatrix} \\ i \end{array} \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b_{ik} = a\, a_{ik} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Τα στοιχεία του B στην i γραμμή είναι ίσα με τα ομοθέσια στοιχεία του A πολλαπλασιασμένα με $a \neq 0$. Άρα ο B είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό

$$r_i \longrightarrow a r_i \quad , \quad a \neq 0 .$$

<u>(ii) $r_i \longrightarrow r_i + a r_j$</u>

Ο αντίστοιχος στοιχειώδης $m \times m$ πίνακας είναι ο

$$E^{a}_{i,j} = \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 \cdots a & & \\ & & \ddots \ \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$
$$\qquad\qquad\qquad i \qquad j$$

Έστω $B = (b_{lk}) = E^{a}_{i,j} A$.

Όπως και στο (i), όλα τα στοιχεία του B εκτός της γραμμής i είναι ίσα με τα ομοθέσια στοιχεία του A.

Αν $l = i$, έχουμε:

$$b_{ik} = r_i(E)\, C_k(A) = \begin{bmatrix} 0 \cdots \underset{i}{1} \cdots \underset{j}{a} \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$b_{ik} = a_{ik} + a\, a_{jk} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n .$$

Πράγματι, ο B είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $r_i \rightarrow r_i + a r_j$.

(iii) $r_i \leftrightarrow r_j$

Ο αντίστοιχος στοιχειώδης $m \times m$ πίνακας είναι ο

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \quad i & & \quad j & & \end{array} \end{array}$$

Έστω ξανά ότι $B = (b_{\ell k}) = E_{ij} A$.

Όπως και στα (i) και (ii), όλα τα στοιχεία του B εκτός των γραμμών i και j είναι ίσα με τα ομόθεσια στοιχεία του A.

Αν $\ell = i$, έχουμε:

$$b_{ik} = r_i(E)\, C_k(A) = [0 \cdots\cdots \underset{j}{1} \cdots 0] \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$b_{ik} = a_{jk}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Η γραμμή i του B είναι ίση με τη γραμμή j του A.

Αν $\ell = j$, βρίσκουμε ότι

$b_{jk} = a_{ik}$, $k = 1, 2, \dots, n$,

δηλ. η γραμμή j του B είναι ίση με τη γραμμή i του A.

Συνεπώς, ο B προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $r_i \leftrightarrow r_j$, όπως απαιτείται. $\blacksquare$

Πρόταση 5.3.3

Κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος κάθε στοιχειώδη πίνακα είναι στοιχειώδης.

Απόδειξη

Ο ταυτοτικός πίνακας I προκύπτει από τους στοιχειώδεις πίνακες

$$E_i^{a}\ ,\quad E_{i,j}^{a}\quad \text{και}\quad E_{i,j}$$

εφαρμόζοντας τους αντίστροφους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$$r_i \to \frac{1}{a}\, r_i\ ,\quad r_i \to r_i - a r_j\quad \text{και}\quad r_i \leftrightarrow r_j\ ,$$

αντίστοιχα. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.2, στις τρείς πιο πάνω περιπτώσεις έχουμε:

$$I = E_i^{1/a} E_i^{a} \implies \left(E_i^{a}\right)^{-1} = E_i^{1/a}$$

$$I = E_{i,j}^{-a} E_{i,j}^{a} \implies \left(E_{i,j}^{a}\right)^{-1} = E_{i,j}^{-a}$$

$$I = E_{i,j} E_{i,j} \implies \left(E_{i,j}\right)^{-1} = E_{i,j}$$

και η πρόταση ισχύει. ■

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε τους ακόλουθους στοιχειώδεις 3Χ3 πίνακες:

$$E_{1,3}^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2^{-5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι αντίστροφοί τους είναι οι:

$$\left(E_{1,3}^{-2}\right)^{-1} = E_{1,3}^{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(E_2^{-5})^{-1} = E_2^{-1/5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και}$$

$$(E_{2,3})^{-1} = E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι οι στοιχειώδεις πίνακες τύπου $E_{i,j}$ είναι ενελικτικοί:

$$(E_{i,j})^2 = I.$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Εστω οι πίνακες A και B όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Σύμφωνα με την πρόταση 5.3.2,

$$B = E_{2,1}^{-2} A \qquad \text{και} \qquad A = E_{2,1}^{2} B$$

(όπου οι στοιχειώδεις πίνακες $E_{2,1}^{-2}$ και $E_{2,1}^{2}$ είναι τύπου 3x3). Πράγματι,

$$E_{2,1}^{-2} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

και

$$E_{2,1}^{2} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

Δίνουμε τώρα ένα βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 5.3.4

Αν οι $m \times n$ πίνακες A και B είναι γραμμοϊσοδύναμοι, τότε υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων $E_1, E_2, \ldots, E_k$, έτσι ώστε

$$B = E_1 E_2 \cdots E_k A$$

Απόδειξη

Το θεώρημα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.3.2. Εφόσον οι A και B είναι γραμμοϊσοδύναμοι, τότε ο B μπορεί να προκύψει από τον A με την εφαρμογή ενός πεπερασμένου αριθμού k στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

Αν $k=1$, τότε από την Πρόταση 5.3.2 ισχύει:

$$B = E_1 A,$$

όπου E_1 κάποιος στοιχειώδης πίνακας.

Η απόδειξη για $k>1$ γίνεται με επαγωγή. Υποθέτουμε ότι ένας πίνακας B' μπορεί να προκύψει από τον A εφαρμόζοντας $(k-1)$ στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών και ότι υπάρχουν $(k-1)$ το πλήθος στοιχειώδεις πίνακες $E_2, \ldots, E_k$ τέτοιοι ώστε:

$$B' = E_2 \cdots E_k A.$$

Τώρα ο B προκύπτει από τον B' εφαρμόζοντας έναν επιπλέον στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.2, με ένα κατάλληλο στοιχειώδη πίνακα E_1 ισχύει:

$$B = E_1 B' = E_1 (E_2 \cdots E_k A) \Longrightarrow$$

$$B = E_1 E_2 \cdots E_k A$$

όπως απαιτείται. ∎

Το κάτωθι πόρισμα του Θ. 5.3.4 είναι πολύ σημαντικό.

Πόρισμα 1

Αν ο R είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός του A, τότε υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων $E_1, E_2, \ldots, E_k$, έτσι ώστε

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k R.$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το Θ. 5.3.4 υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1', E_2', \ldots, E_k'$ τέτοιοι ώστε

$$R = E_1' \cdots E_k' A.$$

(Οι A και R είναι γραμμοϊσοδύναμοι).

Σύμφωνα τώρα με την πρόταση 5.3.3 κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι επίσης στοιχειώδης πίνακας. Άρα,

$$A = E_k'^{-1} \cdots E_1'^{-1} R \Longrightarrow$$

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k R$$

όπου $E_i = \left(E'_{k+1-i}\right)^{-1}$. $\blacksquare$

Θεώρημα 5.3.5

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

(ii) Το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση.

(iii) Ο A είναι το γινόμενο πεπερασμένου αριθμού στοιχειωδών πινάκων.

Απόδειξη

(i) ⇒ (ii)

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε από την

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Το γραμμικό σύστημα $AX=B$ έχει μοναδική λύση.

(ii) ⇒ (iii)

Εφόσον το γραμμικό σύστημα $AX=B$ έχει μοναδική λύση, ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του A είναι ο ταυτοτικός πίνακας:

$$R = I$$

(Πόρισμα 5 του Θ. 5.2.2).

Σύμφωνα τώρα με το Πόρισμα 1 του Θ. 5.3.4, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων έτσι ώστε

$$A = E_1 \cdots E_k R = E_1 \cdots E_k I = E_1 \cdots E_k$$

(iii) ⇒ (i).

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k \Rightarrow$$

$$A E_k^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1} = E_1 E_2 \cdots E_k E_k^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1} = I$$

Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος: $A^{-1} = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}$. ∎

Παρατήρηση.

Είναι φανερό από το Θ. 5.3.5 ότι το ομογενές σύστημα

$$AX = 0 \quad \text{με} \quad A \in M_{n\times n}$$

έχει μοναδική λύση την τετριμμένη αν ο A είναι αντιστρέψιμος:

$$X = A^{-1} 0 = 0.$$

Το ομογενές σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση (άρα άπειρες το πλήθος λύσεις) αν και μόνο αν ο A είναι μη αντιστρέψιμος.

Το Θεώρημα 5.3.5 είναι αρκετά σημαντικό γιατί μας παρέχει ένα κριτήριο αντιστρεψιμότητας καθώς επίσης μια μέθοδο εύρεσης του αντίστροφου πίνακα, αν βέβαια αυτός υπάρχει. Εστω R ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας ενός τετραγωνικού πίνακα A:

- αν $R = I_n$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.
- αν ο R έχει τουλάχιστο μια μηδενική γραμμή (δηλ. $R \neq I_n$), τότε ο A είναι μη αντιστρέψιμος.

Από την απόδειξη του Θ. 5.3.5, γνωρίζουμε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$A = E_1 \cdots E_k I_n \quad \text{και} \quad A^{-1} = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} I_n .$$

Εχουμε επίσης

$$I_n = A^{-1} A = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} I_n A = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} A$$

Παρατηρούμε ότι ο A^{-1} μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον I_n που εφαρμόζονται για τη μετατροπή του A στον ανηγμένο κλιμακωτό I_n.

Συνοψίζοντας, για την εύρεση του αντίστροφου ενός τετραγωνικού πίνακα A, θεωρούμε το σύνθετο πίνακα

$$[A \mid I_n]$$

και με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών τον μετατρέπουμε στον ανηγμένο κλιμακωτό

$$[R \mid A'] .$$

- Αν $R = I_n$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A'$
- Αν $R \neq I_n$, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο αντίστροφος του $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$

Θα μετασχηματίσουμε το σύνθετο πίνακα $[A|I]$ σε ανηγμένο κλιμακωτό.

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{r_2\to r_2-3r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{r_3\to r_3-5r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\to \frac{1}{8}r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3/8 & 1/8 & -5/8\end{array}\right] \xrightarrow[r_2\to r_2+2r_3]{r_1\to r_1+r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & -1/4\\ 0 & 0 & 1 & -3/8 & 1/8 & -5/8\end{array}\right]$$

Ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -3/4 & 1/4 & -1/4\\ -3/8 & 1/8 & -5/8\end{bmatrix}$

Παράδειγμα 2

Έστω το γραμμικό σύστημα

$$AX=B \qquad (1)$$

όπου A ο 3Χ3 πίνακας του Παραδείγματος 1. Θα βρούμε τη λύση του (1) στις εξής περιπτώσεις:

(α) $B=(1,2,3)^T$ (β) $B=(0,-2,0)^T$ και (γ) $B=(0,0,0)^T$

Εφόσον ο A είναι αντιστρέψιμος το σύστημα (1) έχει μοναδική λύση τη

$$X=A^{-1}B$$

(α) $B = (1, 2, 3)^T$

$$X = A^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3/4 & 1/4 & -1/4 \\ -3/8 & 1/8 & -5/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+3 \\ -\frac{3}{4}+\frac{2}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{8}+\frac{2}{8}-\frac{15}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(β) $B = (0, -2, 0)^T$

$$X = A^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3/4 & 1/4 & -1/4 \\ -3/8 & 1/8 & -5/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2/4 \\ -2/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4 \\ -1/8 \end{bmatrix}$$

(γ) $B = (0, 0, 0)^T$

Εχουμε ομογενές σύστημα. Εφόσον ο A είναι αντιστρέψιμος το σύστημα έχει μοναδική λύση την τετριμμένη $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Παράδειγμα 3

Να εξεταστεί αν οι πίνακες

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

είναι αντιστρέψιμοι.

Στο παρόν πρόβλημα δεν ζητείται ο αντίστροφος πίνακας που εξάλλου μπορεί να μην υπάρχει. Αρκεί να μετατρέψουμε τον κάθε πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό για να δούμε αν είναι αντιστρέψιμος.

(α) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας έχει μηδενική γραμμή. Άρα $R \neq I$. Ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος.

(β)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{3} r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του B είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_3. Άρα ο B είναι αντιστρέψιμος.

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση πινάκων

$$AC = B \qquad (1)$$

όπου ο A είναι τετραγωνικός πίνακας, $A \in M_{n\times n}$, και $C, B \in M_{n\times q}$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας C που ικανοποιεί την εξίσωση (1) είναι μοναδικός:

$$C = A^{-1} B \qquad (2)$$

Γνωρίζουμε από τα προηγούμενα ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, \dots, E_k$ τέτοιοι ώστε:

$$A = E_1 \cdots E_k I_n \Rightarrow I_n = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} A,$$

οπότε

$$A^{-1} = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} I_n \qquad (3)$$

Έτσι για τον $C = A^{-1}B$ παίρνουμε:

$$C = A^{-1}B = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} I_n B = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} B \qquad (4).$$

Παρατηρούμε ότι ο C μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον B που εφαρμόζονται για τη μετατροπή του A στον ανηγμένο κλιμακωτό I_n, δηλ.

$$[A|B] \sim [I_n | C = A^{-1}B] \qquad (5)$$

Ο αναγνώστης έχει σίγουρα προσέξει ότι το παρόν πρόβλημα περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις τα δύο προβλήματα που εξετάσαμε στο κεφάλαιο αυτό:

(α) Επίλυση του γραμμικού συστήματος

$$AX = B \qquad (6)$$

Εδώ $X, B \in M_{n\times 1}$ και

$$[A|B] \sim [I | X = A^{-1}B] \qquad (7)$$

(β) Εύρεση του αντίστροφου πίνακα. Εδώ έχουμε

$$AA^{-1} = I \qquad (8)$$

και

$$[A|I] \sim [I | A^{-1}] \qquad (9)$$

<u>Παράδειγμα</u>

Αν είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

να βρεθεί ο πίνακας C έτσι ώστε $AC = B$.

Θεωρούμε το σύνθετο πίνακα $[A|B]$. Θα τον μετατρέψουμε στη μορφή $[I|C=A^{-1}B]$ με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 12 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2 \text{ και μετά } r_1 \to -r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 12 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 2r_1]{r_2 \to r_2 - 3r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 6 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & -6 & 12 & 6 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \text{ και μετά } r_2 \to \tfrac{1}{3} r_2.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 6 & 9 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 5r_2]{r_1 \to r_1 + r_2.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to 1/2\, r_3.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \to r_2 + 2r_3]{r_1 \to r_1 - r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -1/2 & 1 \end{array}\right] = [I \,|\, A^{-1}B]$$

Εχουμε τελικά $C = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 11 & -1/2 & 1 \\ -10 & 1 & 4 \\ -7 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Θεώρημα 5.3.6

Αν R είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του $m\times n$ πίνακα A, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$R = PA$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5-3.4, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων $E_1, E_2, \dots, E_k$, έτσι ώστε

$$R = E_1 E_2 \cdots E_k A . \qquad (1)$$

Θέτοντας

$$P = E_1 E_2 \cdots E_k \qquad (2)$$

έχουμε

$$R = PA \qquad (3).$$

Ο P είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων:

$$P^{-1} = E_k^{-1} E_{k-1}^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1}$$

Από τις (1) και (2) παρατηρούμε ότι ο πίνακας P προκύπτει εφαρμόζοντας στον I_m τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών που εφαρμόζονται για την μετατροπή του A στον ανηγμένο κλιμακωτό R, δηλ.

$$\left[A_{m\times n} \mid I_m\right] \sim \left[R_{m\times n} \mid P_{m\times m}\right] . \qquad (4)$$

Είναι φανερό επίσης ότι όταν ο A είναι τετραγωνικός και $R = I$, τότε

$$P = A^{-1}$$

Παράδειγμα

Αν R είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

να βρεθεί τετραγωνικός πίνακας P τέτοιος ώστε

$$R = PA .$$

Θεωρούμε το σύνθετο πίνακα $[A \mid I_3]$ και τον μετασχηματίζουμε σε ανηγμένο κλιμακωτό.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 2r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to -\frac{1}{5} r_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Βρίσκουμε δηλ. ότι

$$P = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει ότι πράγματι $R = PA$.

5.3.1 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΤΑ ΣΤΗΛΕΣ

Όπως αναφέραμε στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου, εντελώς ανάλογα με τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών μπορούμε να ορίσουμε τους <u>στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών</u>:

(i) $C_i \longrightarrow aC_i$, $a \neq 0$

(ii) $C_i \longrightarrow C_i + aC_j$

(iii) $C_i \longleftrightarrow C_j$

Για τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών, ισχύουν ορισμοί και θεωρήματα ανάλογα με αυτά που δόθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους.

Έτσι, λέμε ότι οι mxn πίνακες A και B είναι <u>στηλοϊσοδύναμοι</u> αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με εφαρμογή ενός πεπερασμένου αριθμού στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών.

<u>Ορισμός 5.3.1.1</u>

Έστω ένας mxn πίνακας A. Καλούμε ηγετικό στοιχείο μιας μη μηδενικής στήλης το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης.

Ο πίνακας A ονομάζεται <u>Σ-κλιμακωτός</u> αν:

(i) το ηγετικό στοιχείο μιας μη μηδενικής στήλης είναι το 1

(ii) το ηγετικό στοιχείο μιας μη μηδενικής στήλης βρίσκεται πιο κάτω από το ηγετικό 1 κάθε προηγούμενης στήλης.

(iii) οι μη μηδενικές στήλες εμφανίζονται πριν από τις μηδενικές.

Ένας Σ-κλιμακωτός πίνακας λέγεται <u>ανηγμένος Σ-κλιμακωτός πίνακας</u> αν επιπλέον

(iv) το ηγετικό 1 σε κάθε μη μηδενική στήλη είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της γραμμής στην οποία ανήκει.

Με μια αυστηρότερη ορολογία, ο κλιμακωτός πίνακας των προηγούμενων παραγράφων είναι <u>Γ-κλιμακωτός πίνακας</u> και ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι ο <u>ανηγμένος Γ-κλιμακωτός πίνακας</u>.

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι το αντίστοιχο του Θεωρήματος 5.1.4.

> <u>Θεώρημα 5.3.1.2</u>
>
> Κάθε $m \times n$ πίνακας είναι στηλοϊσοδύναμος με ένα $m \times n$ ανηγμένο Σ-κλιμακωτό πίνακα.

<u>Απόδειξη</u>.

Ανάλογη με την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.4 (μέθοδος της απαλοιφής Gauss).

<u>Παράδειγμα</u>

Να μετατραπεί ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(α) σε ανηγμένο Γ-κλιμακωτό, και

(β) σε ανηγμένο Σ-κλιμακωτό

(α) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 + 4r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{3} r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 - 4r_3]{r_1 \to r_1 - 2r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2.}$$

(Γ-κλιμακωτός)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ Ανηγμένος Γ-κλιμακωτός

(β) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \to C_2 + C_1 \\ C_3 \to C_3 - 2C_1 \\ C_4 \to C_4 - 3C_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & -5 \\ -4 & 1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \quad C_2 \to -C_2.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -5 \\ -4 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_3 \to C_3 + 4C_2 \\ C_4 \to C_4 + 5C_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad C_3 \to \frac{1}{3} C_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_4 \to C_4 - 6C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \substack{C_2 \to C_2 + C_3 \\ C_1 \to C_1 + 4C_3}$$

(Σ-κλιμακωτός)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 - 2C_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ανηγμένος Σ-κλιμακωτός

<u>Ορισμός 5.3.1.3</u>

Ενας $n \times n$ πίνακας $\hat{E}$ λέγεται <u>στοιχειώδης πίνακας κατά στήλες</u> αν προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα I_n με εφαρμογή ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού στηλών.

Εχουμε και εδώ τρεις τύπους στοιχειωδών πινάκων κατά στήλες :

I $\quad \hat{E}_i^a \quad$ με $\quad I_n \xrightarrow{C_i \to aC_i} \hat{E}_i^a \quad , a \neq 0$

II $\quad \hat{E}_{i,j}^a \quad$ με $\quad I_n \xrightarrow{C_i \to C_i + aC_j} \hat{E}_{i,j}^a$

III $\quad \hat{E}_{i,j} \quad$ με $\quad I_n \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} \hat{E}_{i,j}$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει ότι:

$$\hat{E}_i^a = E_i^a \quad (1)$$

$$\hat{E}_{i,j}^a = (E_{i,j}^a)^T = E_{j,i}^a \quad (2)$$

$$\hat{E}_{i,j} = E_{i,j} \quad (3)$$

Βλέπουμε ότι οι στοιχειώδεις πίνακες κατά στήλες αντιστοιχούν σε στοιχειώδεις πίνακες κατά γραμμές. Κατά συνέπεια, ισχύουν όλα τα σχετικά θεωρήματα. Έτσι, σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.3 κάθε στοιχειώδης πίνακας κατά στήλες είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι επίσης στοιχειώδης πίνακας. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

$$(\hat{E}_i^a)^{-1} = \hat{E}_i^{1/a} \quad (4)$$

$$(\hat{E}_{i,j}^a)^{-1} = \hat{E}_{i,j}^{-a} \quad (5)$$

$$(\hat{E}_{i,j})^{-1} = \hat{E}_{i,j} \quad (6)$$

Παράδειγμα.

Να βρεθούν οι εξής στοιχειώδεις 4x4 πίνακες: $\hat{E}_3^a$, E_3^a, $\hat{E}_{2,4}^a$, $E_{2,4}^a$, $\hat{E}_{4,1}$ και $E_{4,1}$.

$$\hat{E}_3^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3^a = \hat{E}_3^a$$

$$\hat{E}_{2,4}^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{2,4}^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\hat{E}_{2,4}^a)^T$$

$$\hat{E}_{4,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_{4,1} = \hat{E}_{4,1}.$$

Πρόταση 5.3.1.4

Αν ο $m \times n$ πίνακας B προκύπτει από τον $m \times n$ πίνακα A εφαρμόζοντας ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό στηλών, τότε

$$B = A\hat{E}$$

όπου $\hat{E}$ είναι ο αντίστοιχος στοιχειώδης πίνακας κατά στήλες.

Απόδειξη

Παρόμοια με αυτή της Πρότασης 5.3.2. $\square$

Το πιο κάτω θεώρημα είναι το αντίστοιχο του θεωρήματος 5.3.4.

Θεώρημα 5.3.1.5

Αν οι $m \times n$ πίνακες A και B είναι στηλοϊσοδύναμοι, τότε υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων κατά στήλες $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \ldots, \hat{E}_k$, έτσι ώστε

$$B = A\hat{E}_1\hat{E}_2 \cdots \hat{E}_k$$

Απόδειξη

Το θεώρημα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.3.1. Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά και είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θ. 5.3.4. $\square$

<u>Πόρισμα 1</u>

Αν ο $\hat{R}$ είναι ο ανηγμένος Σ - κλιμακωτός του $m \times n$ πίνακα A, τότε υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων κατά στήλες $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \ldots, \hat{E}_k$, έτσι ώστε

$$A = \hat{R}\ \hat{E}_1 \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_k$$

<u>Απόδειξη</u>

Αφήνεται ως άσκηση. □

Αν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός και ο ανηγμένος Σ - κλιμακωτός του

$$\hat{R} = I_n \qquad (1)$$

τότε ο A είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, σύμφωνα με το Πόρισμα 1, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων κατά στήλες $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \ldots, \hat{E}_k$, έτσι ώστε

$$A = I_n\ \hat{E}_1\ \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_k \qquad (2)$$

οπότε

$$A^{-1} = I_n\ \hat{E}_k^{-1} \cdots \hat{E}_2^{-1}\ \hat{E}_1^{-1} \qquad (3).$$

Εχουμε επίσης:

$$I_n = A A^{-1} = A\ \hat{E}_k^{-1} \cdots \hat{E}_2^{-1}\ \hat{E}_1^{-1} \qquad (4).$$

Από τις (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι ο A^{-1} μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας στον I_n τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών που μετατρέπουν τον A σε ανηγμένο Σ - κλιμακωτό I_n.

Ετσι, για την εύρεση του αντίστροφου ενός τετραγωνικού πίνακα A, μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνθετο πίνακα

$$\left[\begin{array}{c} A \\ \hline I_n \end{array}\right]$$

τον οποίο μετατρέπουμε στον ανηγμένο Σ- κλιμακωτό

$$\left[\begin{array}{c} \hat{R} \\ \hline A' \end{array}\right]$$

– Αν $\hat{R} = I_n$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = A'$$

– Αν $\hat{R} \neq I_n$ (αν δηλ. ο $\hat{R}$ έχει τουλάχιστο μία μηδενική στήλη), τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθεί ο αντίστροφος του $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(είναι ο πίνακας του παραδείγματος 1 στη σελίδα 5.35).

Θα μετασχηματίσουμε το σύνδετο πίνακα $\left[\begin{array}{c} A \\ \hline I \end{array}\right]$ σε ανηγμένο Σ- κλιμακωτό.

$$\left[\begin{array}{c} A \\ \hline I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} C_2 \to C_2 + C_1 \\ C_3 \to C_3 - 2C_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad C_2 \leftrightarrow C_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad C_2 \to -\frac{1}{2} C_2 \quad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{array}\right] \quad C_3 \to C_3 - 5C_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ \hline 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 5/2 \end{array}\right] \xrightarrow{C_3 \to -\frac{1}{4} C_3} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & -5/8 \end{array}\right] \xrightarrow{C_2 \to C_2 - C_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/8 & -5/8 \end{array}\right] \xrightarrow{C_1 \to C_1 - 3C_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -3/4 & 1/4 & -1/4 \\ -3/8 & 1/8 & -5/8 \end{array}\right]$$

Ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3/4 & 1/4 & -1/4 \\ -3/8 & 1/8 & -5/8 \end{bmatrix}$

Σύμφωνα με το Θ. 5.3.6, αν $A \in M_{m \times n}$ και R είναι ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του A, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε:

$$R = PA$$

Στην περίπτωση του ανηγμένου Σ-κλιμακωτού πίνακα ισχύει το πιο κάτω θεώρημα.

<u>Θεώρημα 5.3.1.6</u>

Αν $\hat{R}$ είναι ο ανηγμένος Σ-κλιμακωτός πίνακας του $m \times n$ πίνακα A, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας Q τέτοιος ώστε

$$\hat{R} = AQ$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το Θ. 5.3.1.5, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων κατά στήλες $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_k$, έτσι ώστε

$$\hat{R} = A\,\hat{E}_1 \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_k \qquad (1)$$

Θέτοντας

$$Q = \hat{E}_1 \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_k \qquad (2)$$

έχουμε

$$\hat{R} = A\,Q \qquad (3)$$

Ο Q είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. ∎

Από τις (1) και (2) παρατηρούμε ότι ο Q προκύπτει από τον I_n εφαρμόζοντας τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών που εφαρμόζονται για την αναγωγή του A σε ανηγμένο Σ-κλιμακωτό, δηλ.

$$\left[\frac{A_{m\times n}}{I_n}\right] \sim \left[\frac{\hat{R}_{m\times n}}{Q_{n\times n}}\right]$$

Είναι και εδώ φανερό ότι αν ο A είναι τετραγωνικός και $\hat{R} = I_n$, τότε

$$Q = A^{-1}.$$

Παράδειγμα

Αν $\hat{R}$ είναι ο ανηγμένος Σ-κλιμακωτός του

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

να βρεθεί τετραγωνικός πίνακας Q τέτοιος ώστε

$$\hat{R} = A\,Q.$$

Θεωρούμε το σύνθετο πίνακα $\left[\frac{A}{I_4}\right]$ και τον μετασχηματίζουμε σε ανηγμένο Σ - κλιμακωτό.

$$\left[\frac{A}{I_4}\right] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & 9 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_4 \to C_4 - 2C_1]{C_2 \to C_2 + C_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 4 & 12 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_4 \to C_4 - 3C_2]{C_3 \to C_3 - C_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 + C_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Ο ζητούμενος πίνακας είναι $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει την $\hat{R} = AQ$.

5.4 ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμός 5.4.1

Καλούμε <u>κανονική μορφή</u> (normal form) N ένα $m \times n$ πίνακα που έχει τη σύνθετη μορφή·

$$N = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση

Ειδικές περιπτώσεις κανονικής μορφής είναι οι πίνακες

$$I \ , \ [I \ O] \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix}$$

Πρόταση 5.4.2

Κάθε μη μηδενικός $m\times n$ πίνακας μπορεί να αναχθεί με ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών μετασχηματισμών στην κανονική μορφή N.

Ειδικά αν ο A είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος τότε η κανονική μορφή του είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_n.

Απόδειξη.

Βασίζεται στις εξής παρατηρήσεις:

(α) Ο A μπορεί να αναχθεί με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον ανηγμένο Γ- κλιμακωτό R. Έστω ότι ο R έχει r το πλήθος μη μηδενικές γραμμές:

$$R = \begin{bmatrix} A'_{r\times n} \\ O_{(m-r)\times n} \end{bmatrix}$$

(β) Οι $(n-r)$ το πλήθος στήλες που δεν περιέχουν ηγετικά στοιχεία μπορούν να μεταφερθούν στα δεξιά του πίνακα με αντιμετάθεση στηλών, οπότε προκύπτει πίνακας της μορφής:

$$A' = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & F_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

(γ) Τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του F μπορούν να απαλειφθούν με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών του τύπου

$$C_i \longrightarrow C_i - \alpha'_{1i} C_1 , \qquad i = r+1, \dots, n .$$

Τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής του F μπορούν να απαλειφθούν με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στήλης του τύπου

$$C_i \longrightarrow C_i - \alpha'_{2i} C_2 , \qquad i = r+1, \dots, n$$

κ.ο.κ. Παίρνουμε τελικά την κανονική μορφή

$$N = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

Όταν ο A είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος, ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός

$$R = I_n = N . \qquad \blacksquare$$

<u>Παρατήρηση</u>

Είναι φανερό ότι ο N είναι ο ανηγμένος Σ-κλιμακωτός του Γ-κλιμακωτού πίνακα R.
Αντίστροφα, ο N είναι ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του Σ-κλιμακωτού πίνακα $\hat{R}$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η κανονική μορφή N του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Από το παράδειγμα της σ. 5.41, γνωρίζουμε ότι ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του A είναι ο

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε τον ανηγμένο Σ-κλιμακωτό του R.

$$R \xrightarrow[C_4 \to C_4 - 1/5 C_1]{C_3 \to C_3 - \frac{1}{5} C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_4 \to C_4 + 3/5 C_2]{C_3 \to C_3 - \frac{2}{5} C_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = N$$

Θεώρημα 5.4.3

Αν N είναι η κανονική μορφή του m×n πίνακα A, τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q τέτοιοι ώστε

$$PAQ = N$$

Απόδειξη

Από το Θ. 5.3.6 γνωρίζουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$R = PA \qquad (1)$$

όπου R ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του A.

Η κανονική μορφή N είναι ο ανηγμένος Σ-κλιμακωτός του R. Σύμφωνα με το Θ. 5.3.1.6 υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q τέτοιος ώστε

$$N = RQ \implies$$

$$N = PAQ. \blacksquare$$

Εύρεση των P και Q.

Για την εύρεση των P και Q εργαζόμαστε ως εξής:

I Μετασχηματίζουμε το σύνθετο πίνακα $[A \mid I_{m\times m}]$ σε ανηγμένο Γ-κλιμακωτό:

$$[R \mid P]$$

II Μετασχηματίζουμε τον $\left[\dfrac{R}{I_{n\times n}}\right]$ σε ανηγμένο Σ-κλιμακωτό:

$$\left[\dfrac{N}{Q}\right].$$

Παρατήρηση

Οι πίνακες P και Q δεν είναι μοναδικοί. Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;

Παράδειγμα 1

Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q έτσι ώστε ο PAQ να είναι σε κανονική μορφή.

Από το παράδειγμα της σ. 5.41 γνωρίζουμε ότι ο

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

μετασχηματίζεται στον ανηγμένο Γ- κλιμακωτό

$$[R \mid P] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Εχουμε έτσι $\quad P = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

Θα θεωρήσουμε τώρα τον $\left[\dfrac{R}{I_4}\right]$ και θα τον μετατρέψουμε σε ανηγμένο Σ- κλιμακωτό.

$$\left[\frac{R}{I_4}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \to C_4 - \frac{1}{5}C_1]{C_3 \to C_3 - \frac{1}{5}C_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[C_4 \to C_4 + 3/5\, C_2]{C_3 \to C_3 - 2/5\, C_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{N}{Q}\right]$$

Βρίσκουμε δηλ. ότι

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Εστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

Να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q τέτοιοι ώστε ο PAQ να είναι σε κανονική μορφή.

Μετασχηματίζουμε πρώτα το σύνθετο πίνακα $[A|I_3]$ σε ανηγμένο Γ-κλιμακωτό $[R|P]$.

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{8} r_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/8 & -3/8 & 1/8 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \to r_2 + 5r_3]{r_1 \to r_1 - 3r_3} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1/8 & 9/8 & -3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/8 & -7/8 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/8 & -3/8 & 1/8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/8 & -7/8 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/8 & -3/8 & 1/8 \end{array}\right] = [R|P]$$

Αρα,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1/8 & -7/8 & 5/8 \\ 3/8 & -3/8 & 1/8 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε τους Q και N, μετασχηματίζουμε τον $\left[\frac{R}{I_4}\right]$ σε ανηγμένο Σ-κλιμακωτό.

$$\left[\frac{R}{I_4}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_4} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{C_4 \to C_4 - 2C_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\frac{N}{Q}\right]$$

Βρισκουμε τελικά:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει την $N = PAQ$.

Όπως προαναφέραμε οι τετραγωνικοί πίνακες P και Q για τους οποίους ισχύει

$$P\,A\,Q = N$$

όπου $A \in M_{m \times n}$ και N η κανονική μορφή του A δεν είναι μοναδικοί. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου ο P είναι κάτω τριγωνικός και ο Q άνω τριγωνικός. Για την εύρεση τέτοιων τριγωνικών P και Q μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

I Μετασχηματίζουμε το σύνθετο πίνακα $[A \mid I_{m \times m}]$ σε <u>Γ-κλιμακωτό</u>, αποφεύγοντας τη δημιουργία μη μηδενικών στοιχείων πάνω από την κύρια διαγώνιο του P (αυτό μπορεί να συμβεί με αντιμετάθεση γραμμών):

$$[A \mid I_{m \times m}] \sim [R' \mid P],$$

όπου R' ο Γ-κλιμακωτός του A.

Από την προηγούμενη θεωρία είναι φανερό ότι

$$R' = P\,A$$

II Μετασχηματίζουμε το σύνθετο πίνακα $\left[\dfrac{R'}{I_{n \times n}}\right]$ σε <u>ανηγμένο Σ-κλιμακωτό</u>, αποφεύγοντας τη δημιουργία μη μηδενικών στοιχείων κάτω από την κύρια διαγώνιο του Q:

$$\left[\frac{R'}{I_{n \times n}}\right] \sim \left[\frac{N}{Q}\right]$$

Από την προηγούμενη θεωρία είναι φανερό ότι

$$N = R'Q = P\,A\,Q$$

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι <u>δεν είναι πάντα δυνατό</u> να είναι οι P και Q τριγωνικοί.

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Στο παράδειγμα της σελ. 5.55 είδαμε ότι αν

$$P = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε ισχύει $PAQ = N$,

όπου $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ η κανονική μορφή του A.

Εδώ θα βρούμε άλλο ζευγάρι πινάκων P και Q έτσι ώστε ο P να είναι κάτω τριγωνικός και ο Q άνω τριγωνικός.

Μετασχηματίζουμε πρώτα το σύνδετο πίνακα $[A|I_3]$ σε Γ-κλιμακωτό:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 \to \frac{1}{2} r_1]{r_3 \to r_3 - r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 & -3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to \frac{2}{5} r_2.}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 10 r_2.}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right] = [R' \mid P]$$

Εχουμε έτσι $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

Μετατρέπουμε τώρα τον $\left[\dfrac{R'}{I_4}\right]$ σε ανηγμένο Σ-κλιμακωτό:

$$\left[\frac{R'}{I_4}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \to C_4 - \frac{1}{2}C_1]{C_2 \to C_2 + \frac{1}{2}C_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[C_4 \to C_4 + \frac{3}{5}C_2]{C_3 \to C_3 - \frac{2}{5}C_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1/2 & -1/5 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{N}{Q}\right]$$

Βρίσκουμε τώρα ότι $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/5 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Όπως είπαμε και πιο πάνω, δεν είναι πάντα δυνατό να βρούμε τριγωνικούς P και Q έτσι ώστε $PAQ = N$. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, με τον πίνακα A της σελ. 5.57. Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει ότι μόνο ένας από τους P και Q μπορεί να είναι τριγωνικός.

Ορισμός 5.4.4
Δύο $m \times n$ πίνακες A και B είναι <u>ισοδύναμοι</u> αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q τέτοιοι ώστε

$$PAQ = B$$

Από τον ορισμό φαίνεται εύκολα ότι η σχέση

$$PAQ = B \tag{1}$$

είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $M_{m\times n}(K)$, εφόσον κάθε πίνακας $A \in M_{m\times n}(K)$ είναι ισοδύναμος με τον εαυτό του:

$$I_m A I_n = A$$

(οι ταυτοτικοί πίνακες είναι αντιστρέψιμοι).

Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι <u>αν οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι τότε έχουν την ίδια κανονική μορφή N</u>. Πράγματι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κανονική μορφή του πίνακα A είναι ο πίνακας N. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P' και Q' τέτοιοι ώστε:

$$P' A Q' = N \tag{2}$$

Εφόσον οι P και Q στην (1) είναι αντιστρέψιμοι, έχουμε:

$$A = P^{-1} B Q^{-1} \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε

$$P' P^{-1} B Q^{-1} Q' = N$$

ή

$$P'' B Q'' = N \tag{4}$$

όπου οι $P'' = P' P^{-1}$ και $Q'' = Q^{-1} Q'$ είναι αντιστρέψιμοι.

5.5 ΒΑΘΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

Στα επόμενα τον πίνακα στήλης

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

με στοιχεία από το σώμα K ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) θα τον θεωρούμε και διάνυσμα του K^n και θα τον ονομάζουμε <u>διάνυσμα στήλης</u> ή πιο απλά <u>διάνυσμα</u>.

Θεωρούμε τώρα τον πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Εστω

$$r_i(A) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \ , \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (2)$$

τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ που αντιστοιχούν στις γραμμές του A, και

$$C_i(A) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3)$$

τα διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ που αντιστοιχούν στις στήλες του A.

Τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$

$$V_r(A) = L[r_1, r_2, \ldots, r_m] \subseteq \mathbb{R}^n \qquad (4)$$

που παράγεται από τα διανύσματα των γραμμών του A τον ονομάζουμε <u>γραμμικό χώρο των γραμμών του πίνακα A</u>.

Τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$

$$V_c(A) = L[C_1, C_2, \ldots, C_n] \subseteq \mathbb{R}^m \qquad (5)$$

που παράγεται από τα διανύσματα των στηλών του A τον ονομάζουμε <u>γραμμικό χώρο των στηλών του πίνακα A</u>.

Οι χώροι $V_r(A)$ και $V_c(A)$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Εστω ότι

$$\gamma(A) = \dim V_r(A) \qquad (6)$$

και

$$\sigma(A) = \dim V_c(A) \qquad (7).$$

Είναι φανερό από τον ορισμό της διάστασης, ότι η διάσταση $\gamma(A)$ του $V_r(A)$ είναι ο <u>μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών</u> του A, οπότε

$$\gamma(A) \leq m .$$

Ακόμα, επειδή ο $V_r(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\gamma(A) \leq n .$$

Εχουμε έτσι

$$\gamma(A) \leq \min(m,n) \qquad (8)$$

Εντελώς ανάλογα, η διάσταση $\sigma(A)$ του $V_c(A)$ είναι ο <u>μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A</u> (άρα $\sigma(A) \leq n$) και επειδή ο $V_c(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ έχουμε και σ' αυτή την περίπτωση:

$$\sigma(A) \leq \min(m,n) \qquad (9)$$

Από τους πιο πάνω ορισμούς είναι φανερό ότι:

$$\gamma(A) = \sigma(A^T) \qquad (10)$$

$$\sigma(A) = \gamma(A^T) \qquad (11)$$

Παράδειγμα 1

Εστω ο 2x4 πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Εχουμε:

$$r_1 = (1,2,0,1) \;,\; r_2 = (-1,1,1,2) \in \mathbb{R}^4$$

και

$$c_1 = (1,-1) \;,\; c_2 = (2,1) \;,\; c_3 = (0,1) \;,\; c_4 = (1,2) \in \mathbb{R}^2$$

Ο γραμμικός χώρος των γραμμών του A

$$V_r(A) = L(r_1, r_2)$$

είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$. Σύμφωνα με την (8),

$$\gamma(A) = \dim V_r(A) \leq \min(2,4) \Rightarrow \gamma(A) \leq 2 .$$

Εδώ παρατηρούμε ότι τα r_1 και r_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι στην αντίθετη περίπτωση το ένα θα ήταν βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου. Ετσι

$$\gamma(A) = \dim V_r(A) = 2$$

Για τη διάσταση του γραμμικού χώρου των στηλών του A

$$V_c(A) = L(c_1, c_2, c_3, c_4)$$

έχουμε από την (9):

$$\sigma(A) = \dim V_c(A) \leq \min(2,4) \Rightarrow \sigma(A) \leq 2 .$$

Ετσι στο σύνολο $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ που παράγει τον $V_c(A)$ έχουμε το πολύ δύο γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία. Πράγματι, τα c_1 και c_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (διαφορετικά, το ένα θα ήταν βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου), ενώ τα c_3 και c_4 είναι γραμμικοί συνδυασμοί των c_1 και c_2:

$$C_3 = -2C_1 + C_2 = -2(1,-1) + (2,1) = (0,1)$$

$$C_4 = -C_1 + C_2 = -(1,-1) + (2,1) = (1,2)$$

Εχουμε έτσι

$$\sigma(A) = \dim V_c(A) = 2$$

[Αφού ο $V_c(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ και

$$\dim V_c(A) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

είναι φανερό ότι

$$V_c(A) = \mathbb{R}^2 \ ].$$

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι οι διαστάσεις των $V_r(A)$ και $V_c(A)$ είναι ίσες:

$$\dim V_r(A) = \dim V_c(A) = 2$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Εστω ο ταυτοτικός πίνακας

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Εχουμε:
$$\begin{aligned} r_1 &= (1,0,\ldots,0) \\ r_2 &= (0,1,\ldots,0) \\ &\vdots \\ r_n &= (0,0,\ldots,1) \end{aligned}$$

Οι γραμμές του I_n αποτελούν τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$, οπότε

$$V_r(I_n) = L(r_1, r_2, \ldots, r_n) \overset{*}{=} \mathbb{R}^n$$

και

$$\gamma(I_n) = \dim V_r(I_n) = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

Επειδή

$$\sigma(I_n) = \gamma(I_n^T) = \gamma(I_n)$$

βρίσκουμε ότι

$$\sigma(I_n) = \dim V_c(I_n) = \dim V_r(I_n) = n.$$

Στα Παραδείγματα 1 και 2 βρήκαμε ότι οι διαστάσεις των γραμμικών χώρων γραμμών και στηλών των αντίστοιχων πινάκων είναι ίσες. Η πρόταση που ακολουθεί μας λέει ότι αυτό ισχύει για κάθε πίνακα $A \in M_{m \times n}$.

<u>Πρόταση 5.5.1</u>

Οι διαστάσεις των γραμμικών χώρων γραμμών και στηλών ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ είναι ίσες:

$$\gamma(A) = \sigma(A) \qquad (12)$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\gamma = \gamma(A) \leq m$ ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του A. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι πρώτες γ το πλήθος γραμμές του A:

$$r_1, r_2, \ldots, r_\gamma$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Επειδή τα $r_1, r_2, \ldots, r_\gamma$ αποτελούν μία βάση του γραμμικού χώρου των γραμμών του A, $V_r(A)$, κάθε γραμμή του A μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $r_1, r_2, \ldots, r_\gamma$, δηλ.

$$\begin{array}{lcccc}
r_1 = & 1\cdot r_1 + & 0 r_2 + \cdots + & 0 r_\gamma \\
r_2 = & 0 r_1 + & 1\cdot r_2 + \cdots + & 0 r_\gamma \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
r_\gamma = & 0 r_1 + & 0 r_2 + \cdots + & 1 r_\gamma \\
r_{\gamma+1} = & \lambda_{(\gamma+1),1}\, r_1 + & \lambda_{(\gamma+1),2}\, r_2 + \cdots + & \lambda_{(\gamma+1),\gamma}\, r_\gamma \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
r_m = & \lambda_{m1}\, r_1 + & \lambda_{m2}\, r_2 + \cdots + & \lambda_{m\gamma}\, r_\gamma .
\end{array}$$

Παρατηρούμε ότι οι i συνιστώσες των γραμμών $r_1, r_2, \ldots, r_m$ του A δίνονται από τις σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{lcccc}
a_{1i} = & 1\cdot a_{1i} + & 0\cdot a_{2i} + \cdots + & 0\cdot a_{\gamma i} \\
a_{2i} = & 0\cdot a_{1i} + & 1\cdot a_{2i} + \cdots + & 0\cdot a_{\gamma i} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{\gamma i} = & 0\cdot a_{1i} + & 0\cdot a_{2i} + \cdots + & 1\cdot a_{\gamma i} \\
a_{(\gamma+1)i} = & \lambda_{(\gamma+1),1}\, a_{1i} + & \lambda_{(\gamma+1),2}\, a_{2i} + \cdots + & \lambda_{(\gamma+1),\gamma}\, a_{\gamma i} \\
\vdots & & & \\
a_{mi} = & \lambda_{m1}\, a_{1i} + & \lambda_{m2}\, a_{2i} + \cdots + & \lambda_{m\gamma}\, a_{\gamma i}
\end{array}\right\}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ετσι, για τη στήλη C_i του A έχουμε:

$$C_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{\gamma i} \\ a_{(\gamma+1),i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} = a_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{(\gamma+1),1} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{bmatrix} + a_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{(\gamma+1),2} \\ \vdots \\ \lambda_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + a_{\gamma i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_{(\gamma+1),\gamma} \\ \vdots \\ \lambda_{m\gamma} \end{bmatrix} \quad \text{(I)} \Rightarrow$$

$$C_i = a_{1i} u_1 + a_{2i} u_2 + \cdots + a_{\gamma i} u_\gamma , \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(II)}$$

όπου $u_1, u_2, \ldots, u_\gamma$ είναι τα διανύσματα στήλης στο δεξιό μέλος της (I).

Από την (II) συμπεραίνουμε ότι κάθε στήλη C_j του A είναι γραμμικός συνδυασμός των γ το πλήθος σταθερών διανυσμάτων στήλης $u_1, u_2, \ldots, u_\gamma$. Έτσι για τη διάσταση $\sigma(A)$ του γραμμικού χώρου των στηλών του A έχουμε:

$$\sigma(A) \leq \gamma = \gamma(A) \qquad (III)$$

Εργαζόμενοι με παρόμοιο τρόπο στον ανάστροφο A^T του A βρίσκουμε ότι

$$\sigma(A^T) \leq \gamma(A^T) \qquad (IV)$$

Από τις (10) και (11) γνωρίζουμε ότι

$$\gamma(A) = \sigma(A^T) \quad \text{και} \quad \sigma(A) = \gamma(A^T).$$

Αντικαθιστώντας στην IV, παίρνουμε

$$\gamma(A) \leq \sigma(A) \qquad (V)$$

Από τις (III) και (V) συνεπάγεται αμέσως ότι

$$\gamma(A) = \sigma(A). \quad \blacksquare$$

<u>Ορισμός 5.5.2</u>

Ονομάζουμε <u>βαθμό</u> (rank) ή <u>τάξη</u> ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}$ και τον συμβολίζουμε με

$$\text{rank}(A)$$

την κοινή διάσταση των γραμμικών χώρων γραμμών και στηλών του A:

$$\text{rank}(A) = \gamma(A) = \sigma(A). \qquad (13)$$

Από τον ορισμό 5.5.2 προκύπτουν άμεσα τα κάτωθι πορίσματα.

<u>Πόρισμα 1</u>

Για κάθε $m \times n$ πίνακα A ισχύει

$$\operatorname{rank}(A) \leq \min(m, n) \tag{14}$$

<u>Πόρισμα 2</u>

Για κάθε πίνακα A ισχύει

$$\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A) \tag{15}$$

<u>Ορισμός 5.5.3</u>

Οι πίνακες $A, B \in M_{m \times n}$ είναι <u>ισοδύναμοι</u> (equivalent) αν έχουν τον ίδιο βαθμό, δηλ. αν

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) \tag{16}$$

Από τη θεωρία της διαστάσεως των γραμμικών χώρων γνωρίζουμε ότι η διάσταση ενός γραμμικού χώρου δεν μεταβάλλεται όταν στο σύνολο των γεννητόρων του χώρου εφαρμόσουμε μια ή περισσότερες από τις ακόλουθες πράξεις:

(1) Αντιμετάθεση δύο στοιχείων στο σύνολο των γεννητόρων.

(2) Αντικατάσταση ενός από τα στοιχεία αυτά με ένα βαθμωτό πολλαπλάσιό του (διάφορο του μηδενικού).

(3) Πρόσθεση σε ένα στοιχείο του βαθμωτού πολλαπλάσιου ενός άλλου.

Είναι φανερό ότι οι πιο πάνω πράξεις αντιστοιχούν στις στοιχειώδεις πράξεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε πάνω στις γραμμές ή τις στήλες του πίνακα A. Έχουμε έτσι την εξής πολύ σημαντική πρόταση.

Πρόταση 5.5.4.

Αν δύο πίνακες είναι γραμμοϊσοδύναμοι (ή στηλοϊσοδύναμοι), τότε έχουν τον ίδιο βαθμό.

Σημείωση: Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί διαφορετικά ως εξής:

Ο βαθμός ενός πίνακα A δεν μεταβάλλεται όταν στο σύνολο των γραμμών (ή των στηλών) του A εφαρμοσθούν μια ή περισσότερες στοιχειώδεις πράξεις.

Απόδειξη

Εστω ο $m \times n$ πίνακας A με

$$\operatorname{rank}(A) = m. \qquad (I)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι γραμμές $r_1, r_2, \dots, r_m$ του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Συνεπώς ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \dots + \lambda_m r_m = \mathbb{O} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0 \qquad (II)$$

Θα δείξουμε ότι ο βαθμός του A δεν αλλάζει αν εφαρμόσουμε στον A έναν από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών:

(α) Εστω ότι

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$$

Είναι προφανές ότι η (II) ισχύει και για τον νέο πίνακα B. Οι m γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, άρα

$$\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) = m.$$

(β) Εστω ότι

$$A \xrightarrow{r_i \to a r_i} B, \quad a \neq 0.$$

Από την (II) παίρνουμε:

$$(a\lambda_1) r_1 + (a\lambda_2) r_2 + \dots + \lambda_i (a r_i) + \dots + (a\lambda_m) r_m = \mathbb{O} \Rightarrow$$

$$a\lambda_1 = a\lambda_2 = \dots = \lambda_i = \dots = a\lambda_m = 0 \qquad (III)$$

Οι m γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Αρα

$$\text{rank}(B) = \text{rank}(A) = m.$$

(γ) Εστω ότι

$$A \xrightarrow{r_i \to r_i + a r_j} B$$

Από την (ΙΙ) παίρνουμε:

$$\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_i r_i + \cdots + (\lambda_i a + \lambda_j) r_j + \cdots + \lambda_m r_m = \mathbb{O} \Longrightarrow$$
$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_i = \cdots = \lambda_i a + \lambda_j = \cdots = \lambda_m = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_i r_i + \cdots + (\lambda_i a + \lambda_j) r_j + \cdots + \lambda_m r_m = \mathbb{O} \Longrightarrow$$
$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_i = \cdots = \lambda_j = \cdots = \lambda_m = 0$$

ή ακόμα

$$\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_i (r_i + a r_j) + \cdots + \lambda_j r_j + \cdots + \lambda_m r_m = \mathbb{O} \Longrightarrow$$
$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_i = \cdots = \lambda_j = \cdots = \lambda_m = 0. \qquad (\text{IV})$$

Οι m γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Αρα

$$\text{rank}(B) = \text{rank}(A) = m.$$

Εχουμε μέχρι στιγμής δείξει ότι η Πρόταση ισχύει όταν $\text{rank}(A) = m$.

Υποθέτουμε τώρα ότι

$$\text{rank}(A) = k < m \qquad (\text{V})$$

Εστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A με εφαρμογή ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών. Για την απόδειξη της Προτάσεως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\text{rank}(B) \geqslant \text{rank}(A) = k \qquad (\text{VI})$$

Πράγματι, αν η (VI) ισχύει τότε θα έχουμε

$$\text{rank}(A) \geqslant \text{rank}(B) \qquad (\text{VII})$$

αφού ο A μπορεί να προκύψει από τον B με εφαρμογή του αντίστροφου στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών. Από τις (VI) και (VII) προκύπτει ότι:

$$\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(A).$$

Θα δείξουμε λοιπόν ότι η (VII) ισχύει για κάθε στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών.

(α) Εστω ότι

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$$

Το σύνολο των γραμμών του B είναι ίσο με το σύνολο των γραμμών του A. Εχουμε προφανώς:

$$\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(A).$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας (αφού οι αντιμεταθέσεις γραμμών δεν αλλάζουν το βαθμό του πίνακα), θα υποθέσουμε τώρα ότι οι k πρώτες γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Ισχύει δηλαδή η συνεπαγωγή:

$$\lambda_1 r_1 + \dots + \lambda_k r_k = \mathbb{O} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \qquad \text{(VIII)}$$

ενώ οι υπόλοιπες γραμμές είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $r_1, r_2, \dots, r_k$:

$$\left.\begin{aligned} r_{k+1} &= a_{k+1,1} r_1 + \dots + a_{k+1,k} r_k \\ &\ \vdots \\ r_m &= a_{m1} r_1 + \dots + a_{mk} r_k \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX)}$$

(β) Εστω τώρα ότι

$$A \xrightarrow{r_i \to a r_i} B, \quad a \neq 0$$

Αν $i \leq k$ τότε από την (VIII) έχουμε:

$$(a\lambda_1) r_1 + \dots + \lambda_i (a r_i) + \dots + (a\lambda_k) r_k = \mathbb{O} \implies$$

$$\implies a\lambda_1 = \dots = \lambda_i = \dots = a\lambda_k = 0$$

Ετσι οι k πρώτες γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες $\implies$

$$\mathrm{rank}(B) \geq k.$$

Αν $i > k$, τότε πάλι ισχύει η

$$\mathrm{rank}(B) \geq k.$$

αφού οι k πρώτες γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

(γ) Εστω ότι

$$A \xrightarrow{r_i \to r_i + a r_j} B .$$

- Αν $i > k$, τότε οι k πρώτες γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Αν $i \leq k$ και $j \leq k$, τότε εργαζόμαστε όπως στο (γ) του πρώτου μέλους της απόδειξης και βρίσκουμε ότι οι k πρώτες γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Αρα

$$\operatorname{rank}(B) \geq k .$$

- Αν, τέλος, $i \leq k$ και $j > k$, τότε η r_j είναι γραμμικός συνδυασμός των $r_1, r_2, \ldots, r_k$:

$$r_j = a_{j1} r_1 + \cdots + a_{ji} r_i + \cdots + a_{jk} r_k \qquad (\mathrm{X})$$

Θεωρούμε την

$$\lambda_1 r_1^B + \cdots + \lambda_i r_i^B + \cdots + \lambda_k r_k^B = \mathbb{O} \qquad (\mathrm{XI})$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$\lambda_1 r_1^A + \cdots + \lambda_i (r_i^A + a r_j^A) + \cdots + \lambda_k r_k^A = \mathbb{O} \iff$$

$$\lambda_1 r_1^A + \cdots + \lambda_i \left[r_i^A + a a_{j1} r_1^A + \cdots + a a_{ji} r_i^A + \cdots + a a_{jk} r_k^A \right] + \cdots + \lambda_k r_k^A = \mathbb{O} \iff$$

$$(\lambda_1 + \lambda_i a a_{j1}) r_1^A + \cdots + \lambda_i (1 + a a_{ji}) r_i^A + \cdots + (\lambda_k + \lambda_i a a_{jk}) r_k^A = \mathbb{O} \qquad (\mathrm{XII})$$

Από τις (VIII) και (XII) συνεπάγεται ότι:

$$\lambda_1 + \lambda_i a a_{j1} = \cdots = \lambda_i (1 + a a_{ji}) = \cdots = \lambda_k + \lambda_i a a_{jk} = 0 \qquad (\mathrm{XIII})$$

Αν $1 + a a_{ji} \neq 0$ τότε $\lambda_i = 0$ και έχουμε
$\lambda_1 = \cdots = \lambda_i = \cdots = \lambda_k = 0$.
Άρα οι k πρώτες γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, οπότε

$$\mathrm{rank}(B) \geqslant k.$$

Απομένει να εξετάσουμε την περίπτωση όπου

$$1 + a a_{ji} = 0 \implies a_{ji} = -\frac{1}{a} \neq 0, \quad a \neq 0 \qquad (\mathrm{XIV})$$

(αν $a = 0$ τότε $B = A$ και $\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A)$). Τότε η γραμμή r_i^B του B είναι γραμμικός συνδυασμός των $r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_k$. Πράγματι

$$r_i^B = r_i^A + a r_j^A = a a_{j1} r_1^A + \cdots + (1 + a a_{ji}) r_i^A + \cdots + a a_{jk} r_k.$$

$$\implies$$

$$r_i^B = a a_{j1} r_1^A + \cdots + a a_{j,i-1} r_{i-1}^A + a a_{j,i+1} r_{i+1}^A + \cdots + a a_{jk} r_k.$$

Έτσι στις πρώτες k γραμμές του B έχουμε μόνο $(k-1)$ γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές. Θα δείξουμε ότι οι γραμμές $r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_k, r_j$ του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Αν αυτό ισχύει, τότε υπάρχουν k γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές του B οπότε.

$$\mathrm{rank}(B) \geqslant k.$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

Αν οι $r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_k, r_j$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες τότε η r_j μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων γραμμών:

$$r_j = b_{j1} r_1 + \cdots + b_{j,i-1} r_{i-1} + b_{j,i+1} r_{i+1} + \cdots + b_{jk} r_{jk} \qquad (\mathrm{XV})$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (X) και (XV) έχουμε:

$$0 = (a_{j1}-b_{j1})r_1^A + \cdots + (a_{j,i-1}-b_{j,i-1})r_{i-1}^A + a_{ji}r_i^A + (a_{j,i+1}-b_{j,i+1})r_{i+1}^A + \cdots + (a_{jk}-b_{jk})r_k^A . \quad \text{(XVI)}$$

Επειδή τώρα οι k πρώτες γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, η (XVI) συνεπάγεται ότι:

$$a_{j1}-b_{j1} = \cdots = a_{ji} = \cdots = a_{jk}-b_{jk} = 0 .$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, λόγω της υπόθεσης $a_{ji} \neq 0$. Άρα οι γραμμές $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_k, r_j$ του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. ■

Η πρόταση 5.5.4 είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Από αυτήν προκύπτει άμεσα το εξής πόρισμα.

<u>Πόρισμα 1</u>

(α) Αν R' και R είναι ο Γ-κλιμακωτός και ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός, αντίστοιχα, του $m \times n$ πίνακα A, τότε

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(R') = \operatorname{rank}(R). \quad (17)$$

(β) Αν $\hat{R}'$ και $\hat{R}$ είναι ο Σ-κλιμακωτός και ο ανηγμένος Σ-κλιμακωτός, αντίστοιχα, του $m \times n$ πίνακα A, τότε

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\hat{R}') = \operatorname{rank}(\hat{R}). \quad (18)$$

(γ) Αν N είναι η κανονική μορφή του $m \times n$ πίνακα A, τότε

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(N). \quad (19)$$

Το θεώρημα που ακολουθεί μας παρέχει ένα άμεσο τρόπο για την εύρεση του βαθμού ενός πίνακα.

Θεώρημα 5.5.5

Αν R' είναι ο Γ-κλιμακωτός του $m\times n$ πίνακα A, τότε

$$\mathrm{rank}(A) = k \qquad (20)$$

όπου k ο αριθμός των μη-μηδενικών γραμμών του R'.

Απόδειξη

Εστω R ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του A. Εφόσον οι A, R' και R είναι γραμμοϊσοδύναμοι έχουμε (Θ. 5.5.4, Πόρισμα 1α):

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(R') = \mathrm{rank}(R) \qquad (\mathrm{I})$$

Εφόσον ο R' έχει k μη-μηδενικές γραμμές, τότε έχει το πολύ k γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές:

$$\mathrm{rank}(R') \leq k. \qquad (\mathrm{II})$$

Σε κάθε μη μηδενική γραμμή r_i, $i=1,2,\dots,k$ του R υπάρχει ένα ηγετικό 1 στη θέση $(i, m(i))$, όπου

$$m(i) < m(i+1) \leq n, \quad i=1,2,\dots,k-1.$$

Οι στήλες $C_{m(i)}$ του R έχουν τη μορφή:

$$C_{m(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (\text{θέση } i),$$

είναι δηλαδή στοιχεία της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^m$ και άρα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Ο R έχει έτσι τουλάχιστο k γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες. Αρα

$$\mathrm{rank}(R) = \dim V_c(R) \geq k. \qquad (\mathrm{III})$$

Από τις (I)-(III) έπεται ότι

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(R') = k. \quad ∎$$

Παράδειγμα 1

Εστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ο A είναι Γ-κλιμακωτός με 3 μη-μηδενικές γραμμές. Αρα, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι βαθμοί των πινάκων:

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (β) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

(α) Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Αρα,

$$\operatorname{rank}(A) = 2.$$

(β) Οι γραμμές του B είναι γραμμικώς εξαρτημένες. Ο B έχει μόνο μία γραμμικώς ανεξάρτητη γραμμή. Αρα,

$$\operatorname{rank}(B) = 1.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν βρούμε τον Γ-κλιμακωτό του B:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R'$$

Ο R' έχει 1 μη μηδενική γραμμή. Αρα $\operatorname{rank}(B) = 1$.

Παράδειγμα 3

Να βρεθούν οι βαθμοί των πινάκων.

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (β) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & -7 & 9 \end{bmatrix}$

(α) Βρίσκουμε τον Γ-κλιμακωτό του Α.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 \to r_3 - 3r_1 \\ r_4 \to r_4 + r_1}]{r_2 \to r_2 - 5r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 \to r_4 - r_2]{r_3 \to r_3 + 6r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to -\frac{r_3}{35}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 - 9r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο Γ-κλιμακωτός του Α έχει 3 μη-μηδενικές γραμμές. Άρα

$$\text{rank}(A) = 3.$$

(β)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & -7 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 \to r_3 - r_1 \\ r_4 \to r_4 - r_1}]{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 \to r_4 - 2r_2]{r_3 \to r_3 - 2r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to -\frac{1}{2} r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 + r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο Γ-κλιμακωτός του Β έχει 3 μη μηδενικές γραμμές. Άρα

$$\text{rank}(B) = 3.$$

Παρατηρούμε στο παράδειγμα αυτό ότι δύο πίνακες μπορεί να έχουν τον ίδιο βαθμό χωρίς να είναι του ίδιου τύπου.

Από το θεώρημα 5.5.5 προκύπτουν άμεσα τα εξής πορίσματα.

Πόρισμα 1.

Αν $\hat{R}'$ είναι ο Σ-κλιμακωτός του $m \times n$ πίνακα A, τότε

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\hat{R}') = k \,, \qquad (21)$$

όπου k ο αριθμός των μη-μηδενικών στηλών του $\hat{R}'$.

Πόρισμα 2

Αν $A \in M_{m \times n}$ και η κανονική μορφή του A είναι:

$$N = \begin{bmatrix} I_{k \times k} & O_{k \times (n-k)} \\ O_{(m-k) \times k} & O_{(m-k) \times (n-k)} \end{bmatrix},$$

τότε

$$\mathrm{rank}(A) = k \qquad (22)$$

Πόρισμα 3

$$\mathrm{rank}(I_n) = n \qquad (23)$$

Πόρισμα 4

Για κάθε στοιχειώδη $n \times n$ πίνακα E, ισχύει

$$\mathrm{rank}(E) = n. \qquad (24)$$

Απόδειξη

Πολύ απλή. Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Το θεώρημα που ακολουθεί μας λέει ότι ο βαθμός ενός πίνακα δεν μεταβάλλεται αν τον πολλαπλασιάσουμε (από τ' αριστερά ή από τα δεξιά) μ' έναν οποιοδήποτε αντιστρέψιμο πίνακα.

Θεώρημα 5.5.6.

Εστω ο $m \times n$ πίνακας A.

(α) Αν ο $m \times m$ πίνακας B είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}(A) \tag{25}$$

(β) Αν ο $n \times n$ πίνακας B είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A) \tag{26}$$

Απόδειξη.

(α) Αν ο B είναι αντιστρέψιμος, τότε σύμφωνα με το Θ. 5.3.5 ο B είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων:

$$B = E_1 E_2 \cdots E_k.$$

Αρα

$$BA = E_1 E_2 \cdots E_k A$$

οπότε οι BA και A είναι γραμμοϊσοδύναμοι και ως εκ τούτου του ίδιου βαθμού (Πρ. 5.5.4).

(β) Αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. ∎

Θεώρημα 5.5.7

Ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν

$$\mathrm{rank}(A) = n \tag{27}$$

Απόδειξη.

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε ο ανηγμένος κλιμακωτός του είναι ο I_n:

$$R = I_n.$$

Εφόσον οι A και I_n είναι γραμμοϊσοδύναμοι, τότε σύμφωνα με την Πρ. 5.5.4

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(I_n) = n.$$

(Χρησιμοποιήσαμε το Πόρισμα 3 του Θ. 5.5.5).

Αντίστροφα, αν $\mathrm{rank}(A) = n$, τότε $\mathrm{rank}(R) = n$. Άρα ο R δεν έχει μηδενική γραμμή και $R = I_n$. Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος. ∎

Θεώρημα 5.5.8

Το $m \times n$ γραμμικό σύστημα

$$AX = B$$

έχει λύση αν και μόνο αν ο πίνακας A και ο επαυξημένος πίνακας $[A|B]$ έχουν τον ίδιο βαθμό, δηλ. αν και μόνο αν

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A|B]) \qquad (28)$$

Απόδειξη.

Εστω R και $[R|S]$ οι ανηγμένοι κλιμακωτοί των A και $[A|B]$, αντίστοιχα. Σύμφωνα με την Πρ. 5.5.4,

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(R)$ και $\operatorname{rank}([A|B]) = \operatorname{rank}([R|S])$. (I)

Σύμφωνα τώρα με το Πόρισμα 2 του Θ. 5.2.2, το γραμμικό σύστημα $AX=B$ έχει λύση αν και μόνο αν ο $[R|S]$ δεν έχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη, δηλ. αν και μόνο αν οι R και $[R|S]$ έχουν ίσο πλήθος μη μηδενικών γραμμών, ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\operatorname{rank}(R) = \operatorname{rank}([R|S]) \qquad (II)$$

(θεώρημα 5.5.5). Λαμβάνοντας υπόψη την (I), το θεώρημα έχει αποδειχθεί. $\blacksquare$

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθούν οι $\operatorname{rank}(A)$ και $\operatorname{rank}([A|B])$

(β) Είναι το σύστημα $AX=B$ συμβιβαστό;

(γ) Αν ναι, να βρεθεί η λύση του συστήματος.

(α)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \to -r_2.]{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 + 3r_2.]{r_1 \to r_1 - r_2.}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & -15 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 54 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{18} r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & -15 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \to r_2 - 6r_3]{r_1 \to r_1 + 5r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] = [R|S].$$

Οι R και $[R|S]$ έχουν 3 μη μηδενικές γραμμές.

Άρα

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(R) = 3 \quad \text{και}$$

$$\operatorname{rank}([A|B]) = \operatorname{rank}([R|S]) = 3.$$

(β) Το σύστημα $AX = B$ είναι συμβιβαστό αφού

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A|B]).$$

(γ) Το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$RX = S.$$

ή

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1 \\ x_2 - 2x_3 \qquad\qquad &= 0 \\ x_4 + 3x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Εχουμε άπειρες το πλήθος λύσεις με δύο ελεύθερες μεταβλητές.
Θέτουμε $x_3=\lambda$ και $x_5=\mu$ και έχουμε τη γενική λύση.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2\lambda$$
$$x_3 = \lambda$$
$$x_4 = -3\mu$$
$$x_5 = \mu .$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

5.1 Να βρεθούν οι ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες των ακόλουθων πινάκων:

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ (δ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$

5.2 Νά βρεθοῦν οἱ ἀνηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες τῶν ἀκόλουθων πινάκων

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} i & 1-i & i & 0 \\ 1 & -2 & 0 & i \\ 1-i & -1+i & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -3 & 1+\sqrt{2} & -1-2\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2}-2 & -2+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

5.3 Νά ἐξετασθεῖ ἄν οἱ πίνακες στίς παρακάτω περιπτώσεις (i) καί (ii) εἶναι γραμμοϊσοδύναμοι.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

5.4 Να βρεθούν οι λύσεις (αν υπάρχουν) των ακόλουθων γραμμικών συστημάτων:

(α)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \quad &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

(β)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(γ)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad - 3x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \qquad &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 &= 0 \end{aligned}$$

[Σημείωση: δες το Πρόβλημα 5.1 (β)-(δ)]

5.5 Να βρεθεί ο ανηγμένος κλιμακωτός του πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 3 & 3 & -9 & -6 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια να βρεθεί η λύση (αν υπάρχει) του συστήματος:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 &= 8 \\ 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= -6 . \end{aligned}$$

5.6 Νά λυθοῦν τά ὁμογενή γραμμικά συστήματα μέ τούς ἀκόλουθους πίνακες συντελεστῶν

(*i*) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

(*ii*) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ (*iii*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(*iv*) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & -5 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 11 & -12 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 0 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5.7 Νά λυθοῦν τά μή-ὁμογενή γραμμικά συστήματα μέ τούς ἀκόλουθους ἐπαυξημένους πίνακες

(*i*) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$ (*ii*) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right)$

(*iii*) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

(*iv*) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 10 & 7 \end{array}\right)$

5.8 Νά βρεθοῦν οἱ συνθῆκες τίς ὁποῖες πρέπει νά ἱκανοποιοῦν τά λ καί μ ἔτσι ὥστε τά ἀκόλουθα γραμμικά συστήματα νά ἔχουν (*i*) μιά μοναδική λύση, (*ii*) καμμιά λύση, (*iii*) ἄπειρο ἀριθμό λύσεων

(*a*)
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 5 \\ 3x - y + \lambda z &= 2 \\ x + 7y - 6z &= \mu \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} x + y - 4z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x + 7y + \lambda z &= \mu \end{aligned}$$

5.9 Γιά ποιές τιμές τοῦ λ οἱ ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ \lambda x + 2y + z &= b \\ \lambda^2 + 4\lambda + z &= c \end{aligned}$$

ἔχουν μιά μοναδική λύση; Στίς ειδικές περιπτώσεις, νά βρεθοῦν οἱ συνθῆκες τίς ὁποῖες πρέπει νά ἱκανοποιοῦν τά a, b, c ἔτσι ὥστε νά ὑπάρχει μιά λύση καί νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση.

5.10 Νά ὁρισθοῦν οἱ τιμές τοῦ λ γιά τίς ὁποῖες τά ἑπόμενα γραμμικά συστήματα εἶναι συμβιβαστά καί γιά τίς ζητούμενες τιμές τοῦ λ νά βρεθοῦν οἱ πλήρεις λύσεις

(*i*)
$$\begin{aligned} 5x + 2y - z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 7 \\ 4x - 5y + \lambda z &= \lambda - 5 \end{aligned}$$

(*ii*)
$$\begin{aligned} x + 2y + \lambda z &= 0 \\ 2x + 3y - 2z &= \lambda \\ \lambda x + y + \lambda z &= 3 \end{aligned}$$

(*iii*)
$$\begin{aligned} x - 5y + 3 &= 0 \\ 5x + y - \lambda &= 0 \\ x + 2y + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

(*iv*)
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z + t &= 0 \\ x + 2y + z - t &= 1 \\ 3x + 5y + 2z + t &= a \\ 6x + 10y + 4z + t &= (\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

5.11 Νά βρεθοῦν οἱ πλήρεις λύσεις τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} y + z + u + 2v &= 2 \\ -x + 4y + 3z + 3u + 4v &= 7 \\ 2x + y + 3z + 2u + 8v &= 3 \\ 3x + y + 4z - u + 4v &= 0 \\ 5x + 2y + 7z + 10v &= 2 \end{aligned}$$

5.12 Νά λυθεῖ πλήρως τό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} &= 0 \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n &= 0 \\ x_{n-1} + x_n &= 0 \end{aligned}$$

ὅταν (*i*) $n = 8$, (*ii*) $n = 9$.

5.13 Να βρεθούν οι αντίστροφοι των ακόλουθων πινάκων (αν υπάρχουν).

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ (γ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(δ) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ (ε) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & -5 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5.14 Να βρεθούν οι αντίστροφοι (αν υπάρχουν) των ακόλουθων πινάκων

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 1+i \\ 1-i & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5.15 Να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q τέτοιοι ώστε ο PAQ να είναι η κανονική μορφή για τους ακόλουθους πίνακες A :

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (δ) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

5.16 Να υπολογιστεί ο πίνακας X που ικανοποιεί την εξίσωση $AX = B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

5.17 Αν

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&1\\2&3&-1&-2\\4&5&3&0\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix}5\\2\\7\end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθούν οι rank(A) και rank([A|B])
(β) Είναι το σύστημα $AX=B$ συμβιβαστό;
(γ) Αν ναι, να βρεθεί η λύση του συστήματος.

5.18 Βρείτε τους βαθμούς των παρακάτω πινάκων.

(α) $\begin{bmatrix}1&2&4&-1\\0&1&1&2\\-2&3&-1&1\end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix}1&0&-2\\2&1&3\\4&1&-1\\-1&2&1\end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix}1&0&-3\\2&1&4\\4&3&2\end{bmatrix}$ (ε) $\begin{bmatrix}0&1&-2&3\\1&-3&2&1\\1&-1&-2&7\\1&0&-4&10\end{bmatrix}$

5.19 Να επαναληφθεί η άσκηση 5.17 όταν

I $\quad A=\begin{bmatrix}1&1&-3\\2&1&-2\\1&1&1\\1&2&-3\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}-1\\1\\3\\1\end{bmatrix}$

II $\quad A=\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\1&-1&2&-1&0\\4&-2&6&3&-4\\2&4&-2&4&-7\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

III $\quad A=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\1&-1&2&3\\2&-2&1&0\\1&1&-1&-3\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix}$

6 ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την έννοια της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα και θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες των οριζουσών. Οι ορίζουσες βρίσκουν εφαρμογές στην επίλυση γραμμικών συστημάτων, στην εύρεση του αντίστροφου πίνακα, στη μελέτη γραμμικών απεικονίσεων και αλλού.

Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι ορισμού της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα:

1 Επαγωγικά.
Ορίζεται πρώτα η 2x2 ορίζουσα. Η 3x3 ορίζουσα μπορεί να οριστεί συναρτήσει 2x2 οριζουσών κ.ο.κ.

3 Άμεσα, με τη βοήθεια της έννοιας της μετάθεσης.

Εδώ επιλέξαμε το δεύτερο τρόπο. Ο επαγωγικός τρόπος θα συζητηθεί σε επόμενη παράγραφο.

6.1 ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Ορισμός 6.1.1

Θεωρούμε το σύνολο $T_n = \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών από 1 ως n με αύξουσα τάξη. Ονομάζουμε μετάθεση (permutation) των $1, 2, \ldots, n$ κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση σ του T_n επί του εαυτού του (δηλ. $\sigma: T_n \to T_n$) και τη συμβολίζουμε με

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

ή

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

Παράδειγμα

Εστω η μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ των $1, 2, 3, 4$.

Η σ γράφεται επίσης $\sigma = (4, 2, 1, 3)$ γιατί $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 1$ και $\sigma_4 = 3$.

Εστω S_n το σύνολο των μεταθέσεων των $1, 2, \ldots, n$. Είναι φανερό ότι $S_n \neq \emptyset$ αφού η φυσική διάταξη

$$e = (1, 2, \ldots, n) \in S_n.$$

Η μετάθεση e καλείται ταυτοτική.

Παράδειγμα: Να βρεθούν όλες οι μεταθέσεις των $T_1 = \{1\}$, $T_2 = \{1, 2\}$ και $T_3 = \{1, 2, 3\}$.

(α) $T_1 = \{1\}$: (1)

(β) $T_2 = \{1, 2\}$: $(1, 2)$ και $(2, 1)$

(γ) $T_3 = \{1, 2, 3\}$: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

Θεώρημα 6.1.2

Το πλήθος των μεταθέσεων των $1, 2, \ldots, n$ είναι $n!$

Απόδειξη

Η πρώτη θέση μιας μετάθεσης των $1, 2, \ldots, n$ μπορεί να καταληφθεί από οποιοδήποτε από τους n ακέραιους. Η δεύτερη θέση μπορεί να καταληφθεί από οποιοδήποτε από τους εναπομένοντες $(n-1)$ ακέραιους, η τρίτη θέση από οποιοδήποτε από τους εναπομένοντες $(n-2)$ ακέραιους κ.ο.κ. Η τελευταία θέση θα καταληφθεί από τον εναπομένοντα ακέραιο.

Εχουμε έτσι

$$n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

πιθανές μεταθέσεις των $1, 2, \ldots, n$. ∎

Η σύνθεση $\tau\sigma$ δύο μεταθέσεων τ, σ του S_n, που θα τη συμβολίζουμε πιο απλά με $\tau\sigma$ είναι η μετάθεση:

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau_{\sigma_1} & \tau_{\sigma_2} & \cdots & \tau_{\sigma_n} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Παράδειγμα.

Εστω οι μεταθέσεις $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Εχουμε για τις $\tau\sigma$ και $\sigma\tau$:

$$\tau\sigma = (\tau_{\sigma_1}, \tau_{\sigma_2}, \tau_{\sigma_3}) = (\tau_2, \tau_1, \tau_3) = (1, 3, 2)$$

$$\sigma\tau = (\sigma_{\tau_1}, \sigma_{\tau_2}, \sigma_{\tau_3}) = (\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2) = (3, 2, 1)$$

Παρατηρούμε ότι η σύνθεση μεταθέσεων δεν είναι αντιμεταθετική, δηλαδή γενικά

$$\tau\sigma \neq \sigma\tau \qquad (2).$$

Είναι όμως φανερό ότι για κάθε $\tau \in S_n$, ισχύει:

$$\tau e = e\tau = \tau \qquad (3)$$

όπου e η ταυτοτική μετάθεση.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σύνθεση μεταθέσεων είναι προσεταιριστική, δηλαδή για $\sigma, \tau, \upsilon \in S_n$ ισχύει:

$$\sigma(\tau\upsilon) = (\sigma\tau)\upsilon \qquad (4)$$

Η <u>αντίστροφη</u> μετάθεση της $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$

συμβολίζεται με σ^{-1} και είναι η

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e \qquad (6)$$

<u>Παράδειγμα</u>.

Η αντίστροφη μετάθεση της $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Είναι η

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Πρόταση 6.1.3

Το σύνολο S_n των μεταθέσεων των $1, 2, \dots, n$ αποτελεί αλγεβρική ομάδα ως προς τη σύνθεση "$\circ$". Δηλαδή ισχύουν τα ακόλουδα:

(i) $\sigma \circ \tau \in S_n \quad \forall\ \sigma, \tau \in S_n$

(ii) $\sigma \circ (\tau \circ \upsilon) = (\sigma \circ \tau) \circ \upsilon \quad \forall\ \sigma, \tau, \upsilon \in S_n$

(iii) Υπάρχει και ορίζεται μάλιστα μονοσήμαντα το ταυτοτικό στοιχείο $e \in S_n$, τέτοιο ώστε:

$$\tau \circ e = e \circ \tau = \tau \quad \forall\ \tau \in S_n$$

(iv) Για κάθε $\tau \in S_n$ υπάρχει η αντίστροφη μετάθεση τ^{-1}, έτσι ώστε.

$$\tau \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ \tau = e$$

Το σύνολο S_n λέγεται συνήθως συμμετρική ομάδα.

Από την Πρόταση 6.1.3 βγαίνουν τα ακόλουθα σημαντικά συμπεράσματα:

(α) Όταν η σ διατρέχει το S_n τότε και η σ^{-1} διατρέχει το S_n.

(β) Αν $\tau \in S_n$ είναι μια σταθερή μετάθεση και η σ διατρέχει το S_n τότε και οι $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, $\sigma^{-1} \circ \tau$, $\tau \circ \sigma^{-1}$, $\tau^{-1} \circ \sigma$, $\sigma \circ \tau^{-1}$ και $\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$ διατρέχουν το S_n.

Παράδειγμα Οι μεταθέσεις του S_2 είναι οι $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Εχουμε για τις αντίστροφές τους:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma \quad \text{και} \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \tau .$$

Επαληθεύσαμε έτσι το συμπέρασμα (α).

Ασκηση: Να επαληθευτεί το συμπέρασμα (α) για το S_3.

Ορισμός 6.1.4

Θα λέμε ότι η μετάθεση $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$ παρουσιάζει μία <u>αντιστροφή</u> (inversion) ή <u>παράβαση</u> όταν για $i<j$ ισχύει $\sigma_i>\sigma_j$,

δηλαδή όταν ένας αριθμός προηγείται ενός μικρότερού του. Διαφορετικά, θα λέμε ότι έχουμε <u>τήρηση</u>.

Το πλήθος των αντιστροφών μιάς μεταθέσεως σ λέγεται <u>δείκτρια</u> της μεταθέσεως και συμβολίζεται με $\mu(\sigma)$.

Η δείκτρια $\mu(\sigma)$ μιας μεταθέσεως $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$ υπολογίζεται ως εξής: Εστω a_i το πλήθος των μικρότερων από το σ_i ακέραιων που βρίσκονται δεξιά του σ_i. $(i=1,2,\dots,n)$. Τότε

$$\mu(\sigma)=a_1+a_2+\dots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i \qquad (7)$$

Παράδειγμα 1

Εστω η μετάθεση $\sigma=(1,3,2,4)$.

Εχουμε $\sigma_1=1$ και προφανώς $a_1=0$. Ο $\sigma_2=3$ ακολουθείται από έναν μικρότερο του, τον $\sigma_3=2$, άρα $a_2=1$. Οι $\sigma_3=2$ και $\sigma_4=4$ δεν ακολουθούνται από μικρότερους αριθμούς και έτσι $a_3=a_4=0$. Εχουμε τελικά:

$$\mu(\sigma)=0+1+0+0=1.$$

Παράδειγμα 2

Εστω η μετάθεση $\tau=(4,3,2,1)$.

Τον $\tau_1=4$ ακολουθούν τρεις αριθμοί που είναι μικρότεροι του, άρα $a_1=3$.

Ο $\tau_2 = 3$ ακολουθείται από δύο μικρότερούς του αριθμούς, άρα $a_2 = 2$. Παρομοίως, βρίσκουμε ότι

$$a_3 = 1 \quad \text{και} \quad a_4 = 0 .$$

Άρα

$$\mu(\tau) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3+2+1+0 = 6 .$$

<u>Παράδειγμα 3.</u>

Η ταυτοτική μετάθεση $e = (1, 2, \dots, n)$ δεν έχει αντιστροφή. Άρα

$$\mu(e) = 0$$

<u>Ερώτηση</u>: Ποιος είναι ο μέγιστος δυνατός αριθμός αντιστροφών της μετάθεσης $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in S_n$;

<u>Ορισμός 6.1.5</u>

Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ ονομάζεται <u>άρτια</u> αν ο αριθμός των αντιστροφών που παρουσιάζει είναι <u>άρτιος</u>. Αν αυτό δεν συμβαίνει, η σ είναι <u>περιττή</u>.

<u>Παράδειγμα 1.</u>

Είδαμε σε προηγούμενα παραδείγματα ότι

$$\mu((1,3,2,4)) = 1 \quad \text{και} \quad \mu((4,3,2,1)) = 6 .$$

Η πρώτη μετάθεση είναι περιττή και η δεύτερη άρτια.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Για τις μεταθέσεις των 1, 2, 3 έχουμε:

$$\mu((1,2,3)) = 0+0+0 = 0$$
$$\mu((3,1,2)) = 2+0+0 = 2$$
$$\mu((2,3,1)) = 1+1+0 = 2$$
$$\mu((3,2,1)) = 2+1+0 = 3$$
$$\mu((1,3,2)) = 0+1+0 = 1$$
$$\mu((2,1,3)) = 1+0+0 = 1$$

Βλέπουμε ότι οι τρεις πρώτες μεταθέσεις είναι άρτιες ενώ οι άλλες τρεις είναι περιττές.

Παράδειγμα 3

Επειδή $\mu(e)=0$, όλες οι ταυτοτικές μεταθέσεις είναι άρτιες.

Ο καθορισμός του πλήθους των αντιστροφών μιας μεταθέσεως έχει ιδιαίτερη σημασία για τον προσδιορισμό ενός βασικού χαρακτηριστικού μιας μεταθέσεως, του προσήμου της.

Εστω η μετάθεση $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in S_n$. Θεωρούμε το γινόμενο

$$\Pi=\prod_{i<j}^{1,n}(\sigma_j-\sigma_i)=\begin{aligned}&(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_1)\cdots(\sigma_n-\sigma_1)\\&\qquad\qquad(\sigma_3-\sigma_2)\cdots(\sigma_n-\sigma_2)\\&\qquad\qquad\qquad\ddots\quad\vdots\\&\qquad\qquad\qquad\quad(\sigma_n-\sigma_{n-1})\end{aligned}\qquad(8)$$

Αν $\mu(\sigma)=2k$, τότε το πλήθος των αρνητικών παραγόντων του Π θα είναι άρτιο και επομένως θα έχουμε:

$$(\text{πρόσημο } \Pi)1=(-1)^{2k}=1$$

Αν $\mu(\sigma)=2k+1$, τότε το πλήθος των αρνητικών παραγόντων του Π θα είναι περιττό και επομένως θα έχουμε:

$$(\text{Πρόσημο } \Pi)1=(-1)^{2k+1}=-1$$

Το πρόσημο του γινομένου Π το ονομάζουμε <u>πρόσημο της μεταθέσεως σ</u>. και το συμβολίζουμε με $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Εχουμε έτσι τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 6.1.6

Εστω ότι η μετάθεση $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in S_n$ έχει $\mu(\sigma)$ το πλήθος αντιστροφές. Η συνάρτηση $sgn(\sigma)$ του συνόλου S_n επί του $\{-1, 1\}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$sgn(\sigma) = (-1)^{\mu(\sigma)}$$

ονομάζεται <u>πρόσημο της μεταθέσεως σ</u>.

Ετσι έχουμε

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{αν } \sigma \text{ άρτια} \\ -1, & \text{αν } \sigma \text{ περιττή}. \end{cases}$$

Παράδειγμα 1

Για τις μεταθέσεις των $1, 2, 3$ έχουμε:

$$\mu((1,2,3)) = 0 \Rightarrow sgn((1,2,3)) = 1$$
$$\mu((3,1,2)) = 2 \Rightarrow sgn((3,1,2)) = 1$$
$$\mu((2,3,1)) = 2 \Rightarrow sgn((2,3,1)) = 1$$
$$\mu((3,2,1)) = 3 \Rightarrow sgn((3,2,1)) = -1$$
$$\mu((1,3,2)) = 1 \Rightarrow sgn((1,3,2)) = -1$$
$$\mu((2,1,3)) = 1 \Rightarrow sgn((2,1,3)) = -1$$

Πρόταση 6.1.7.

Για την ταυτοτική μετάθεση $e = (1, 2, \ldots, n)$ ισχύει

$$sgn(e) = 1.$$

Απόδειξη

Η ταυτοτική μετάθεση δεν παρουσιάζει αντιστροφές. Άρα $\mu(e) = 0$ και $sgn(e) = (-1)^0 = 1$ $\blacksquare$

Πρόταση 6.1.8

Αν $\sigma, \tau \in S_n$, τότε

$$\operatorname{sgn}(\tau\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma).$$

Απόδειξη.

Δεν θεωρείται σημαντική στις ανά χείρας σημειώσεις. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο των Γ. Παντελίδη, Δ. Κραββαρίτη, Β. Νασόπουλου και Π. Τσεκρέκου: "Γραμμική Άλγεβρα", Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 1992. $\square$

Πόρισμα 1

Για κάθε $\sigma \in S_n$ ισχύει

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Απόδειξη

Επειδή $\sigma\sigma^{-1} = e$, από την Πρ. 6.1.8 έχουμε

$$\operatorname{sgn}(e) = \operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}).$$

Επειδή τώρα $\operatorname{sgn}(e) = 1$ (Πρ. 6.1.7), έχουμε

$$1 = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = 1/\operatorname{sgn}(\sigma)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma). \quad \blacksquare$$

Η πιο κάτω πρόταση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

Πρόταση 6.1.9

Αν σε μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ εναλλάξουμε δύο στοιχεία, τότε το πρόσημο της μετάθεσης αλλάζει.

Απόδειξη

Δεν εμπίπτει στους στόχους των σημειώσεων. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να προστρέξει στο βιβλίο του Δ.Γ. Δασκαλόπουλου, "Εφηρμοσμένη Γραμμική Αλγεβρα", Αθήναι (1979) ή στο βιβλίο του H. Eves, "Elementary Matrix Theory", Dover, New York (1980). $\square$

Παράδειγμα 1 Να βρεθούν τα πρόσημα των μεταθέσεων:

$$\sigma = (6,5,4,3,2,1)$$
$$\tau = (6,3,4,5,2,1)$$
$$\upsilon = (1,5,4,2,3,6).$$

Για τη σ έχουμε:

$$\mu(\sigma) = 5+4+3+2+1+0 = 15,$$

άρα

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{15} = -1.$$

Η τ προκύπτει από τη σ αν εναλλάξουμε το 5 με το 3. Σύμφωνα με την πρόταση 6.1.9

$$\operatorname{sgn}(\tau) = -\operatorname{sgn}(\sigma) = +1.$$

Η υ προκύπτει από τη σ αν εναλλάξουμε το 6 με το 1 και το 3 με το 2. Σύμφωνα με την Πρ. 6.1.9,

$$\operatorname{sgn}(\upsilon) = \operatorname{sgn}(\sigma) = -1.$$

Παράδειγμα 2 Να βρεθεί το πρόσημο της

$$\sigma = (1,2,3,4,8,6,7,5).$$

Η σ προκύπτει από την ταυτοτική μετάθεση με μια εναλλαγή στοιχείων (το 8 με το 5). Άρα

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(e) = -1.$$

6.2 ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Ορισμός 6.2.1

Εστω ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Καλούμε ορίζουσα (determinant) του πίνακα A το άθροισμα

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n} \quad (1).$$

Το άθροισμα (1) θεωρείται πάνω σ' όλες τις μεταθέσεις $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in S_n$.

Ο αριθμός n είναι η τάξη της ορίζουσας. Την ορίζουσα του πίνακα A τη συμβολίζουμε με

$$\det A \quad \text{ή} \quad |A| \quad \text{ή} \quad D(A) \quad \text{ή} \quad D(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

όπου a_j οι στήλες του A, ή ακόμα με

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Το πλήθος των όρων του αθροίσματος (1) είναι $n!$ (βλ. Θ. 6.1.2). Μια άλλη χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι κάθε όρος

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n} \quad (2)$$

του αθροίσματος (1) περιέχει ακριβώς ένα όρο από κάθε γραμμή του A και ακριβώς ένα όρο από κάθε στήλη.

Πράγματι, αν j είναι ένας από τους δείκτες $1, 2, \ldots, n$ τότε θα υπάρχει ακριβώς ένα σ_k με $\sigma_k = j$. Έτσι, στον όρο (2) θα υπάρχει το στοιχείο $a_{i\sigma_i}$ από την i-γραμμή (και μόνο αυτό) και το στοιχείο $a_{k\sigma_k} = a_{kj}$ από τη j-στήλη (και μόνο αυτό). Είναι τέλος φανερό ότι κάθε όρος (2) έχει ακριβώς n παράγοντες.

Ορίζουσα 1ης τάξεως

Έστω ο 1×1 πίνακας

$$A = [a_{11}].$$

Για την ορίζουσα του A έχουμε:

$$|a_{11}| = \sum_{\sigma \in S_1} \mathrm{sgn}(\sigma_1)\, a_{1\sigma_1} = \mathrm{sgn}(1)\, a_{11} = (-1)^0 a_{11} \Longrightarrow$$

$$\boxed{|a_{11}| = a_{11}} \qquad (3)$$

Ορίζουσα 2ης τάξεως

Για τον 2×2 πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

έχουμε:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_2} \mathrm{sgn}(\sigma_1, \sigma_2)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2}$$

Οι μεταθέσεις του S_2 είναι οι $(1,2)$ και $(2,1)$.
Η πρώτη είναι άρτια και η δεύτερη περιττή, Έτσι, έχουμε:

$$|A| = sgn(1,2)\, a_{11} a_{22} + sgn(2,1)\, a_{12} a_{21}$$
$$= (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \qquad (4)$$

Σχηματικά, η ορίζουσα 2ης τάξεως έχει τιμή ίση με τη διαφορά των γινομένων των στοιχείων της κύριας διαγωνίου και της δευτερεύουσας διαγωνίου:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

<u>Ορίζουσα 3ης τάξεως - Κανόνας του Sarrus</u>

Για τον 3x3 πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

έχουμε:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_3} sgn(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} a_{3\sigma_3} .$$

Οι μεταθέσεις του S_3 είναι οι:

$(1,2,3)$, $(3,1,2)$, $(2,3,1)$, $(3,2,1)$, $(1,3,2)$ και $(2,1,3)$.

Οι πρώτες τρεις είναι άρτιες και οι υπόλοιπες περιττές.
Ετσι παίρνουμε για την ορίζουσα $|A|$:

$$|A| = sgn((1,2,3))\, a_{11} a_{22} a_{33} + sgn((3,1,2))\, a_{13} a_{21} a_{32} +$$

$$+\ sgn((2,3,1))\,a_{12}a_{23}a_{31} + sgn((3,2,1))\,a_{13}a_{22}a_{31} +$$
$$+\ sgn((1,3,2))\,a_{11}a_{23}a_{32} + sgn((2,1,3))\,a_{12}a_{21}a_{33} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}} \quad (5)$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα εξηγεί και τον κανόνα του Sarrus ο οποίος ισχύει μόνο για ορίζουσες 3ης τάξεως. Γράφουμε τις δύο πρώτες στήλες δεξιά της τρίτης στήλης και φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς την κύρια και τη δευτερεύουσα διαγώνιο. Στη συνέχεια, παίρνουμε τα γινόμενα των στοιχείων στη διεύθυνση από άνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά με πρόσημο +, ενώ τα άλλα γινόμενα (από άνω δεξιά προς τα κάτω αριστερά) με πρόσημο −, όπως φαίνεται στο σχήμα:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \quad -$$

Παίρνουμε έτσι την τιμή της ορίζουσας:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Παράδειγμα 1

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - (-1)\cdot 3 = 10 + 3 = 13$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστούν οι ορίζουσες των παρακάτω πινάκων.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Sarrus.

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \; - \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 4 & -1 & -2 \end{array}$$

$$|A| = 2\cdot 5\cdot 4 + 1\cdot 6\cdot(-1) + (-3)\cdot 0(-2) - (-3)\cdot 5\cdot(-1) - 2\cdot 6\cdot(-2)$$
$$- 1\cdot 0\cdot 4 = 40 - 6 + 0 - 15 + 24 + 0 = 43$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \; - \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & a & b \\ a^2 & b^2 & c^2 & a^2 & b^2 \end{array}$$

$$|B| = bc^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2$$
$$= bc^2 + ca^2 + ab^2 + abc - ba^2 - cb^2 - ac^2 - abc$$
$$= c\,(ab - b^2 - ac + bc) - a\,(ab - b^2 - ac + bc)$$
$$= (c-a)\,(ab - b^2 - ac + bc) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \; - \\ a & b & c & a & b \\ c & a & b & c & a \\ b & c & a & b & c \end{array}$$

$$|C| = a^3 + b^3 + c^3 - abc - abc - abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Ο υπολογισμός οριζουσών τάξεως 4 και άνω με τον τύπο (1) είναι ιδιαίτερα επίπονος. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της ορίζουσας 5ης τάξεως, το άθροισμα (1) περιέχει $5! = 120$ όρους. Στις επόμενες παραγράφους θα δώσουμε δύο συστηματικούς τρόπους για τον υπολογισμό οριζουσών. Ο πρώτος βασίζεται στην αξιοποίηση των ιδιοτήτων των οριζουσών ενώ ο δεύτερος βασίζεται στην ιδέα του αναπτύγματος μιας ορίζουσας.

6.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Θεώρημα 6.3.1

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A ισχύει:

$$\det(A^T) = \det(A) \qquad (1)$$

Απόδειξη

Εστω $A = (a_{ij})_{n\times n}$ και

$A^T = (b_{ij})_{n\times n}$ όπου $b_{ij} = a_{ji}$ (I)

Από τον Ορισμό 6.2.1 έχουμε:

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma_1} b_{2\sigma_2} \cdots b_{n\sigma_n}$$

Αντικαθιστώντας την (I) παίρνουμε:

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} \cdots a_{\sigma_n n} \qquad (II)$$

Σε κάθε όρο μπορούμε να αλλάξουμε τη θέση των παραγόντων ώστε να πετύχουμε οι δείκτες των γραμμών να έχουν τη φυσική διάταξη. Αφού στον σ_i αντιστοιχεί ο i, στον δείκτη i θα αντιστοιχεί ο σ_i^{-1}.

Ετσι η (II) γράφεται:

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1^{-1}} a_{2\sigma_2^{-1}} \cdots a_{n\sigma_n^{-1}}$$

Θέτουμε $\tau = \sigma^{-1}$ οπότε $\sigma = \tau^{-1}$ και επομένως:

$$\det(A^T) = \sum_{\tau^{-1}\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau^{-1})\, a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \cdots a_{n\tau_n} \quad \text{(III)}$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση (α) στη σελίδα 6.5 όταν η τ διατρέχει το S_n τότε και η τ^{-1} διατρέχει το S_n. Επίσης, από το Πόρισμα 1 της Πρότασης 6.1.8 έχουμε:

$$\operatorname{sgn}(\tau^{-1}) = \operatorname{sgn}(\tau)$$

Έχουμε τελικά:

$$\det(A^T) = \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau)\, a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \cdots a_{n\tau_n} \Longrightarrow$$

$$\det(A^T) = \det(A). \quad \blacksquare$$

<u>Πόρισμα 1</u>

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} \cdots a_{\sigma_n n} \qquad (2)$$

Από το Θεώρημα 6.3.1 συμπεραίνουμε αμέσως ότι σε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις που αναφέρονται στις ιδιότητες των οριζουσών, μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τις λέξεις "γραμμή" και "στήλη" χωρίς να μεταβληθεί η τιμή αληθείας της πρότασης.

Πρόταση 6.3.2

Αν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής (αντ. στήλης) του τετραγωνικού πίνακα A είναι μηδέν, τότε

$$\det(A) = 0$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό 6.2.1 έχουμε

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n} \qquad (I)$$

Καθε όρος του αθροίσματος περιέχει ένα όρο από κάθε γραμμή του A, άρα και από τη μηδενική γραμμή. Συνεπώς όλοι οι όροι του αθροίσματος I είναι μηδέν,

$\Longrightarrow \quad \det(A) = 0 \quad \blacksquare$

Πρόταση 6.3.3

Αν ο A είναι τριγωνικός (άνω ή κάτω), τότε η οριζουσα του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του, δηλαδή:

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \qquad (3)$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την πρόταση για την περίπτωση όπου ο $A = (a_{ij})$ είναι κάτω τριγωνικός, δηλ.

$$a_{ij} = 0 \quad \text{αν} \quad i < j .$$

Η απόδειξη για τον άνω τριγωνικό πίνακα γίνεται με ανάλογο τρόπο. Για την οριζουσα του A έχουμε:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n} \qquad I$$

Ο μόνος όρος του αθροίσματος Ι που δεν είναι μηδέν είναι αυτός που αντιστοιχεί στη μετάθεση $e \in S_n$:

$$\mathrm{sgn}(e)\, a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Για οποιαδήποτε άλλη μετάθεση $\sigma \in S_n$, ο όρος

$$\mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

είναι μηδέν, γιατί υπάρχει $k \in \{1, 2, \ldots n\}$ με

$$\sigma_k > k$$

οπότε το στοιχείο $a_{k\sigma_k}$ είναι μηδέν αφού ο A είναι κάτω τριγωνικός πίνακας. Άρα

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

<u>Παρατήρηση</u>

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι μηδέν, αν και μόνο αν κάποιο στοιχείο της κύριας διαγωνίου του είναι μηδέν.

<u>Πόρισμα 1</u>

$$\det\left(\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})\right) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

<u>Πόρισμα 2</u>

Κάθε μοναδιαίος πίνακας έχει ορίζουσα ίση με 1, δηλ.

$$\det(I) = 1 \tag{4}$$

<u>Παράδειγμα</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2 = -30$$

Πρόταση 6.3.4

Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον $n \times n$ πίνακα A όταν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (αντ. στήλης) με ένα αριθμό λ, τότε

$$\det(B) = \lambda \det(A) \qquad (5)$$

Απόδειξη

Έστω ότι πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της i γραμμής του A με τον αριθμό λ:

$$A \xrightarrow{r_i \to \lambda r_i} B$$

Για την ορίζουσα του B έχουμε:

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma_1} b_{2\sigma_2} \cdots b_{i\sigma_i} \cdots b_{n\sigma_n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots (\lambda a_{i\sigma_i}) \cdots a_{n\sigma_n}$$

$$= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots a_{i\sigma_i} \cdots a_{n\sigma_n}$$

$$\Longrightarrow \quad \det(B) = \lambda \det(A) \qquad \blacksquare$$

Πόρισμα 1

Αν ο A είναι $n \times n$ πίνακας και λ ένας αριθμός, τότε

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \qquad (6)$$

Απόδειξη

Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Πρόταση 6.3.5

Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον $n \times n$ πίνακα A, όταν αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές (αντ. στήλες) του A, τότε

$$\det(B) = -\det(A) \tag{7}$$

Με διαφορετικά λόγια, αν αντιμετατεθούν δύο γραμμές (αντ. στήλες) σε μια ορίζουσα, η ορίζουσα αλλάζει σημείο.

Απόδειξη.

Εστω ότι ο B προκύπτει από τον A με την αντιμετάθεση της i με τη j γραμμή:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$$

Ετσι: $b_{ik} = a_{jk}$, $b_{jk} = a_{ik}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ και $b_{lk} = a_{lk}$ όταν $l \neq i, j$.

Για την ορίζουσα του B έχουμε:

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma_1} \cdots b_{i\sigma_i} \cdots b_{j\sigma_j} \cdots b_{n\sigma_n} \Longrightarrow$$

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots a_{j\sigma_i} \cdots a_{i\sigma_j} \cdots a_{n\sigma_n} \quad (\mathrm{I})$$

Η μετάθεση $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_j, \ldots, \sigma_n)$ προκύπτει από την

$$\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_j, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n)$$

με μια εναλλαγή δύο στοιχείων. Σύμφωνα με την Πρ. 6.1.9,

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma') \quad (\mathrm{II})$$

Οταν η σ διατρέχει το S_n, τότε και η σ' διατρέχει το S_n, οπότε από την (I) παίρνουμε:

$$\det(B) = \sum_{\sigma' \in S_n} -\operatorname{sgn}(\sigma')\, a_{1\sigma_1} \cdots a_{j\sigma_i} \cdots a_{i\sigma_j} \cdots a_{n\sigma_n}$$

$$= -\sum_{\sigma' \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma')\, a_{1\sigma'_1} \cdots a_{j\sigma'_j} \cdots a_{i\sigma'_i} \cdots a_{n\sigma'_n}$$

$$\Rightarrow \quad \det(B) = -\det(A). \quad \blacksquare$$

Πρόταση 6.3.6

Αν δύο γραμμές (αντ. στήλες) ενός τετραγωνικού πίνακα A είναι ίσες, τότε

$$\det(A) = 0$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η i γραμμή του A είναι ίση με την j γραμμή. Αν αντιμεταθέσουμε τις γραμμές αυτές ο πίνακας παραμένει αμετάβλητος. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.3.5, έχουμε:

$$\det(A) = -\det(A) \Longrightarrow \det(A) = 0. \quad \blacksquare$$

Πρόταση 6.3.7

Αν σε ένα τετραγωνικό πίνακα A μια γραμμή (αντ. στήλη) είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής (αντ. στήλης), τότε

$$\det(A) = 0.$$

Απόδειξη

Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Πρόταση 6.3.8

Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον $n\times n$ πίνακα A αν προσθέσουμε στα στοιχεία μιας γραμμής (αντ. στήλης) τα στοιχεία μιας άλλης γραμμής (αντ. στήλης) πολλαπλασιασμένα με ένα αριθμό λ, τότε

$$\det(B)=\det(A) \tag{8}$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι προσθέτουμε στα στοιχεία της i γραμμής τα στοιχεία της j γραμμής του A πολλαπλασιασμένα με ένα αριθμό λ:

$$A \xrightarrow{r_i \to r_i+\lambda r_j} B$$

Για την ορίζουσα του B έχουμε διαδοχικά:

$$\det(B)=\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1}\cdots(a_{i\sigma_i}+\lambda a_{j\sigma_i})\cdots a_{j\sigma_j}\cdots a_{n\sigma_n}$$

$\Rightarrow$

$$\det(B)=\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1}\cdots a_{i\sigma_i}\cdots a_{j\sigma_j}\cdots a_{n\sigma_n}$$

$$+\lambda\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1}\cdots a_{j\sigma_i}\cdots a_{j\sigma_j}\cdots a_{n\sigma_n} \tag{I}$$

Το πρώτο άθροισμα της (I) είναι η ορίζουσα του πίνακα A, ενώ το δεύτερο άθροισμα είναι η ορίζουσα ενός πίνακα που έχει δύο γραμμές ίσες, τις i και j, άρα (σύμφωνα με την Πρόταση 6.3.6) είναι μηδέν. Έτσι έχουμε:

$$\det(B)=\det(A)+\lambda\cdot 0=\det(A)$$

Στα παραδείγματα που ακολουθούν χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των οριζουσών για την εύρεση της τιμής τους. Στόχος είναι ο μετασχηματισμός της ορίζουσας σε μια άλλη απλούστερη, π.χ. σε μια ορίζουσα που έχει περισσότερα μηδενικά ή είναι τριγωνικής μορφής).

Παράδειγμα 1

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & -14 & 1 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_3 \to r_3 - 2r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_4}{=}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_3 \to r_3 + 6r_2 \\ r_4 \to r_4 + 2r_2}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= - 1 \cdot 1 \cdot 1 (-1) = 1$$

Παράδειγμα 2

Αφού δειχτεί ότι

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3$$

να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας: $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Για την πρώτη ορίζουσα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$$

$(c_1 \to c_1 + c_2 + c_3 + c_4)$.

$$= (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)\ (a-b)^3$$

Για τη δεύτερη ορίζουσα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24 \cdot (2+3)\,(2-1)^3 = 120$$

Πρόταση 6.3.9

Εστω ότι οι $n\times n$ πίνακες A, B και Γ διαφέρουν μόνο στη r γραμμή (αντ. στήλη) και ότι

$$a_{rj} = b_{rj} + \gamma_{rj}\ ,\ j = 1,2,\ldots,n$$

(αντ. $a_{jr} = b_{jr} + \gamma_{jr}\ ,\ j = 1,2,\ldots,n$). Τότε

$$\det(A) = \det(B) + \det(\Gamma) \tag{9}$$

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε την πρόταση για την περίπτωση όπου οι πίνακες A, B και Γ διαφέρουν στη r γραμμή. Από τον ορισμό έχουμε:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1}\cdots a_{r\sigma_r}\cdots a_{n\sigma_n}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1}\cdots (b_{r\sigma_r}+\gamma_{r\sigma_r})\cdots a_{n\sigma_n} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots \beta_{r\sigma_r} \cdots a_{n\sigma_n}$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots \gamma_{r\sigma_r} \cdots a_{n\sigma_n} \qquad (I)$$

Επειδή οι A, B και Γ διαφέρουν μόνο στη r γραμμή:

$$a_{ij} = \beta_{ij} = \gamma_{ij}\ , \quad i = 1, \ldots, n \text{ με } i \neq r \text{ και } j = 1, \ldots, n\ ,$$

Το πρώτο άθροισμα της (I) είναι η $\det(B)$ και το δεύτερο η $\det(\Gamma)$. Εχουμε τελικά

$$\det(A) = \det(B) + \det(\Gamma)\ . \quad \blacksquare$$

<u>Παρατήρηση</u>

Η πρόταση επεκτείνεται εύκολα στην περίπτωση που

$$a_{rj} = \beta_{rj} + \gamma_{rj} + \delta_{rj} + \cdots\ , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Εχουμε τότε

$$\det(A) = \det(B) + \det(\Gamma) + \det(\Delta) + \cdots \qquad (10)$$

<u>Παράδειγμα 1</u>

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}+\gamma_{11} & \beta_{12}+\gamma_{12} & \beta_{13}+\gamma_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Πρόταση 6.3.10

Για τις ορίζουσες των στοιχειωδών πινάκων έχουμε:

$$\det(E_i^a) = \det(\hat{E}_i^a)^T = a, \quad a \neq 0 \tag{11}$$

$$\det(E_{i,j}^a) = \det(\hat{E}_{i,j}^a)^T = 1 \tag{12}$$

$$\det(E_{i,j}) = \det(\hat{E}_{i,j})^T = -1 \tag{13}$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε από το Κεφ. 5 (σελ. 5.45) ότι

$$E_i^a = (\hat{E}_i^a)^T, \quad E_{i,j}^a = (\hat{E}_{i,j}^a)^T \quad \text{και} \quad E_{i,j} = (\hat{E}_{i,j})^T.$$

Ο E_i^a προκύπτει από το μοναδιαίο πίνακα I με τον στοιχειώδη μετασχηματισμό $r_i \to a r_i$. Σύμφωνα με την Πρ. 6.3.4 έχουμε

$$\det(E_i^a) = a\det(I) = a, \quad a \neq 0.$$

Ο $E_{i,j}^a$ προκύπτει από τον I με το μετασχηματισμό $r_i \to r_i + a r_j$. Σύμφωνα με την Πρ. 6.3.8 έχουμε:

$$\det(E_{i,j}^a) = \det(I) = 1.$$

Ο $E_{i,j}$ προκύπτει από τον I με το μετασχηματισμό $r_i \leftrightarrow r_j$. Σύμφωνα με την Πρ. 6.3.5 έχουμε:

$$\det(E_{i,j}) = -\det(I) = -1.$$

Πόρισμα 1

Αν E είναι ένας στοιχειώδης πίνακας, τότε

$$\det(E) \neq 0. \tag{14}$$

Πρόταση 6.3.11

Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας και E ένας στοιχειώδης $n \times n$ πίνακας, τότε

$$\det(AE) = \det(EA) = \det(A)\det(E) \tag{15}$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε μόνο την $\det(EA) = \det(A)\det(E)$.

Σύμφωνα με την Πρ. 5.3.2, ο EA προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας τον στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών που αντιστοιχεί στον E.

Αν $E = E_i^a$, τότε ο $E_i^a A$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας τον στοιχειώδη μετασχηματισμό $r_i \longrightarrow a r_i$. Σύμφωνα με την Πρ. 6.3.4 έχουμε:

$$\det(E_i^a A) = a \det(A) = \det(E_i^a)\det(A).$$

(χρησιμοποιήσαμε την (11)).

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$$\det(E_{i,j}^a A) = 1 \det(A) = \det(E_{i,j}^a)\det(A)$$

και

$$\det(E_{i,j} A) = -1 \cdot \det(A) = \det(E_{i,j})\det(A)$$

Βρίσκουμε έτσι ότι για οποιοδήποτε στοιχειώδη $n \times n$ πίνακα E ισχύει

$$\det(EA) = \det(A)\det(E).$$ ∎

Η πρόταση 6.3.11 γενικεύεται εύκολα ως εξής:

Πρόταση 6.3.12

Αν οι $E_1, E_2, \ldots, E_k$ είναι στοιχειώδεις $n \times n$ πίνακες και ο A είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε

$$\det(AE_1E_2\cdots E_k) = \det(E_1E_2\cdots E_kA) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)\det(A) \qquad (16)$$

Πόρισμα 1

$$\det(E_1E_2\cdots E_k) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k) \qquad (17)$$

Ορισμός 6.3.13

Ενας τετραγωνικός πίνακας λέγεται ομαλός ή μη ιδιάζων αν

$$\det A \neq 0 .$$

Αλλοιώς, αν δηλαδή $\det A = 0$, ο A λέγεται μη ομαλός ή ιδιάζων.

Θεώρημα 6.3.14

Ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι ομαλός.

Απόδειξη

Εστω R ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του A. Σύμφωνα με το Πόρισμα 1 του Θ. 5.3.4, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_k$ έτσι ώστε

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k \, R \qquad (I)$$

Σύμφωνα με την Πρ. 6.3.12 έχουμε:

$$\det(A) = \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_k) \det(R) \qquad (II).$$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $R = I$ και $\det(R) = 1$. Από την (II) παίρνουμε:

$$\det(A) = \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_k) \qquad (III)$$

Επειδή $\det(E_i) \neq 0$ (Πόρισμα 1 της Πρ. 6.3.10), ισχύει

$$\det(A) \neq 0 .$$

Αν τώρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε ο R έχει μία τουλάχιστο μηδενική γραμμή και σύμφωνα με την Πρ. 6.3.2, $\det(R) = 0$. Παίρνουμε έτσι από την (II):

$$\det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) \cdot 0 = 0 .$$

Πόρισμα 1

Ενας τριγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος, όταν και μόνο όταν όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι διαφορετικά από το 0.

Θεώρημα 6.3.15

Αν οι A και B είναι $n \times n$ πίνακες, τότε

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad (18)$$

Απόδειξη

Αν κάποιος από τους A και B δεν είναι αντιστρέψιμος η ορίζουσά του είναι μηδέν οπότε

$$\det(A)\det(B) = 0 .$$

Επίσης ο AB δεν είναι αντιστρέψιμος στην περίπτωση αυτή και έτσι

$$\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B) .$$

Αν τώρα οι A και B είναι αντιστρέψιμοι τότε υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_k$ και $E_1', E_2', \dots, E_\ell'$ τέτοιοι ώστε:

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k \quad \text{και} \quad B = E_1' E_2' \cdots E_\ell' .$$

Έχουμε για τον AB:

$$AB = E_1 E_2 \cdots E_k \, E_1' E_2' \cdots E_\ell' \Longrightarrow$$

$$\det(AB) = \{\det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)\}\{\det(E_1')\det(E_2')\cdots\det(E_\ell')\}$$

(Πόρισμα 1 της Πρ. 6.3.12) $\Longrightarrow$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) . \quad \blacksquare$$

Πόρισμα 1

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \qquad (19)$$

Απόδειξη

Αφήνεται σαν άσκηση. $\square$

Παράδειγμα

Εστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & s & 0 & 0 \\ t^2 & s^2 & r & 0 \\ t^3 & s^3 & r^2 & q \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} q & r^2 & s^3 & t^3 \\ 0 & r & s^2 & t^2 \\ 0 & 0 & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι A και B είναι τριγωνικοί και επομένως

$$\det(AB) = \det(A)\,\det(B) = (1\,s\,r\,q)\cdot(q\,r\,s\,1) = s^2 r^2 q^2 .$$

6.4 ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ

<u>Ορισμός 6.4.1</u>

Εστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Συμβολίζουμε με M_{ij} την ορίζουσα τάξεως $(n-1)$ που προκύπτει από την ορίζουσα $|A|$ αν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη.

Η ορίζουσα M_{ij} ονομάζεται <u>ελάσσονα (minor) ορίζουσα</u> του στοιχείου a_{ij}.

Η προσημασμένη ελάσσονα ορίζουσα

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{1}$$

ονομάζεται <u>αλγεβρικό συμπλήρωμα</u> (cofactor) του στοιχείου a_{ij} του πίνακα A.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Θα υπολογίσουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα των εννέα στοιχείων του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Εχουμε:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\ (8-0) = 8$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1\ (12+1) = -13$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\ (0-2) = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +8$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\ (0-1) = 1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix} = +2$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 1\,(4-3)=1$$

Παράδειγμα 2

Εστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

Θα υπολογίσουμε το αλγεβρικό συμπλήρωμα A_{33}.

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2 & -5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2 & -5\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & -2 & -5\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 2 & -5 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 7 & 3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 2 & -5 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -11\end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 1\,(-11) = -22.$$

Παρατήρηση.

Τα πρόσημα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων εναλλάσσονται όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:

$$\begin{vmatrix}+ & - & + & - & \cdots\\ - & + & - & + & \cdots\\ + & - & + & - & \cdots\\ - & + & - & + & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

Θεώρημα 6.4.2

Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε για κάθε $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ισχύουν τα εξής:

$$\det(A) = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \qquad (2)$$

$$\det(A) = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} \qquad (3)$$

όπου A_{ij} το αλγεβρικό συμπλήρωμα του a_{ij}.

Απόδειξη.

Βλ. Γ. Παντελίδη, Δ. Κραββαρίτη, Β. Νασόπουλου και Π. Τσεκρέκου, "Γραμμική Άλγεβρα", Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 1992 (σελ. 84). $\square$

Οι τύποι (2) και (3) ονομάζονται <u>ανάπτυγμα της ορίζουσας $|A|$ κατά τα στοιχεία της i γραμμής</u> και <u>ανάπτυγμα της ορίζουσας $|A|$ κατά τα στοιχεία της j στήλης</u>, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1

Εστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ του παραδείγματος της σελ. 6.34.

Αναπτύσσοντας την $|A|$ ως προς τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής έχουμε:

$$\det(A) = 3\,A_{21} + 2\,A_{22} - 1\,A_{23}$$
$$= 3(-4) + 2(8) - 1(1) = -12 + 16 - 1 = 3$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης έχουμε:

$$\det(A) = 0 \cdot A_{13} - 1\,A_{23} + 4\,A_{33} = -1(1) + 4(1) = 3$$

Παρατηρούμε ότι η ανάπτυξη της ορίζουσας είναι προτιμότερο να γίνει ως προς τα στοιχεία της γραμμής ή της στήλης που περιέχει τα περισσότερα μηδενικά.

Παράδειγμα 2

Εστω η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

Αναπτύσσουμε ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης.

$$|A| = +(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -(2)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

Αναπτύσσουμε ως προς τα στοιχεία της δεύτερης στήλης.

Αναπτύσσουμε ως προς τα στοιχεία της τρίτης γραμμής

$$|A| = -2\left[5\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right] = -2\left[5\cdot 12 - 2(9-5)\right] \Rightarrow$$

$$|A| = -2\,(60-8) = -104$$

Είναι επίσης φανερό ότι για τον υπολογισμό της τιμής μιας ορίζουσας μπορούμε να συνδυάσουμε την μέθοδο του αναπτύγματος μιας ορίζουσας με τη χρήση των ιδιοτήτων της προηγούμενης παραγράφου.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -3 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 8 & -1 & 6 \\ -7 & -2 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$r_3 \to r_3 + r_1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 8 & -1 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1) \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C_1 \to C_1 + 3C_2$$

$$\Rightarrow \quad |A| = -3\,(26-5) = -63$$

<u>Παράδειγμα 4</u>

Να δειχθεί ότι $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z+x-y-x)$$

$$= (y-x)(z-x)(z-y).$$

<u>Παράδειγμα 5</u> Να λυθεί η εξίσωση $\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 3 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = 0. \quad (I)$

Αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία της δεύτερης στήλης, έχουμε:

$$+x \begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x\,(-2x+x^2-3) = 0 \Rightarrow$$

$x\,(x-3)(x+1) = 0$. Οι λύσεις της I είναι οι: 0, 3 και -1.

Θεώρημα 6.4.3

Αν $A=(a_{ij})$ είναι ένας $n\times n$ πίνακας και A_{ij} το αλγεβρικό συμπλήρωμα του a_{ij}, τότε ισχύουν οι τύποι:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad \text{όταν } i\neq j \qquad (4)$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad \text{όταν } i\neq j \qquad (5)$$

Απόδειξη

Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα A αν αντικαταστήσουμε τα στοιχεία της j γραμμής με τα στοιχεία της i γραμμής. Ο πίνακας B έχει έτσι δύο γραμμές ίσες, Άρα $\det(B)=0$. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $\det(B)$ ως προς τα στοιχεία της j γραμμής έχουμε

$$0=\det(B)=b_{j1}A_{j1}+b_{j2}A_{j2}+\cdots+b_{jn}A_{jn} \Longrightarrow$$

[αφού $B_{jk}=A_{jk}$, $k=1,2,\dots,n$].

$$0=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

Η (5) είναι άμεση συνέπεια του Θ. 6.3.1. ∎

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$

Είδαμε στο παράδειγμα της σελίδας 6.34 ότι:

$$A_{21}=-4,\quad A_{22}=8 \quad \text{και} \quad A_{23}=1.$$

Έχουμε:

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=2(-4)+1(8)+0(1)=0$$

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=3(-4)+2(8)-1(1)=3$$

$$a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}=1(-4)+0(8)+4(1)=0.$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2)-(5) έχουμε:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det(A) , & i=j \\ 0 , & i \neq j \end{cases} \qquad (6)$$

και

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} \det(A) , & i=j \\ 0 , & i \neq j \end{cases} \qquad (7)$$

6.5 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμός 6.5.1

Εστω $A=(a_{ij})$ ένας $n\times n$ πίνακας. Ο ανάστροφος του πίνακα (A_{ij}) των αλγεβρικών συμπληρωμάτων των στοιχείων του A ονομάζεται <u>συμπληρωματικός</u> ή <u>προσαρτημένος</u> (adjoint) του A και συμβολίζεται με $adj(A)$:

$$adj(A) = (A_{ij})^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Παράδειγμα 1

Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ έχουμε:

$$A_{11} = 4 \ , \quad A_{12} = -2 \ , \quad A_{21} = -3 \quad \text{και} \quad A_{22} = 1 \ ,$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο (1) ο συμπληρωματικός του A είναι ο

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Για τον πίνακα $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

έχουμε:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad B_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad B_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad B_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad B_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

οπότε ο συμπληρωματικός του B είναι ο πίνακας:

$$\operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 6.5.2.

Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \qquad (2)$$

Απόδειξη

Θα υπολογίσουμε το γινόμενο

$$B = A \operatorname{adj}(A) = (a_{ij})(A_{ij})^T = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} \right)_{n\times n} \Rightarrow$$

$$B = (b_{ij})_{n\times n} = (a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}) \qquad (I)$$

Από τον τύπο (6) της 6.4 έχουμε:

$$b_{ij} = \begin{cases} \det(A), & \text{όταν } i=j \\ 0, & \text{όταν } i \neq j \end{cases}$$

και έτσι:

$$B = A \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\, I \qquad (II)$$

Εφόσον ο A είναι αντιστρέψιμος, $\det(A) \neq 0$ και από την (II) παίρνουμε

$$A \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = I$$

που σημαίνει ότι ο αντίστροφος του A είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \qquad \blacksquare$$

Σημείωση

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \, A = I .$$

Αυτό σημαίνει ότι οι σχέσεις $AA^{-1} = I$ και $A^{-1}A = I$ είναι ισοδύναμες.

Πρόταση 6.5.3

Αν ο n×n πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\det\{\operatorname{adj}(A)\} = (\det A)^{n-1} \qquad (3)$$

Απόδειξη

Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Παράδειγμα 3

Για τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

των παραδειγμάτων 1 και 2 βρήκαμε ότι:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$\det(A) = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

και

$$\det(B) = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι και μάλιστα:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, adj(A) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

και

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\, adj(B) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4.

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων:

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (β) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

(α) Βρίσκουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της πρώτης γραμμής του A:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα A κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής έχουμε:

$$\det(A) = 1(-7) + 0(-8) + 2(2) = -3 \neq 0.$$

Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος. Βρίσκουμε λοιπόν και τα υπόλοιπα αλγεβρικά συμπληρώματα.

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Ο συμπληρωματικός πίνακας του A είναι ο

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Από τον τύπο (2) προσδιορίζεται ο A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -7 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

16) Βρίσκουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της πρώτης γραμμής του B:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 8 \qquad B_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = +8 \qquad B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 8$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα B ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής έχουμε:

$$\det(B) = 1 \cdot 8 + 2\,(+8) - 3\,(8) = 0$$

Άρα ο πίνακας B δεν είναι αντιστρέψιμος.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η εύρεση του αντίστροφου μέσω του συμπληρωματικού πίνακα καθίσταται επίπονη όταν η τάξη του πίνακα είναι μεγαλύτερη του 3. Είναι τότε προτιμότερη η μέθοδος των στοιχειωδών μετασχηματισμών του κεφαλαίου 5.

<u>Παράδειγμα 5</u>

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ο συμπληρωματικός πίνακας του A είναι ο

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -14 & -7 & 7 \\ -2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την det(A) ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής έχουμε:

$$\det(A) = 1\,A_{11} - A_{12} + 2\,A_{13} = 4 + 14 - 4 = 14$$

Ο αντίστροφος του A είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -14 & -7 & 7 \\ -2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

6.6 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ – Η ΜΕΘΟΔΟΣ CRAMER

Θεώρημα 6.6.1

Έστω το $n \times n$ γραμμικό σύστημα:

$$AX = B. \tag{1}$$

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) Το σύστημα $AX=B$ έχει μία ακριβώς λύση,

(β) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος,

(γ) Ο πίνακας A είναι ομαλός, δηλαδή $\det(A) \neq 0$.

Απόδειξη

Το Θεώρημα προκύπτει άμεσα από τα Θεωρήματα 5.3.5 και 6.3.14. $\blacksquare$

Πόρισμα 1

Το $n \times n$ ομογενές γραμμικό σύστημα

$$AX = 0 \tag{2}$$

έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν

$$\det A = 0$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 0\\
(3-\lambda)x_2 + 3x_3 &= 0\\
-2x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 &= 0
\end{aligned}$$

έχει μη τετριμμένη λύση (δηλ. άπειρες το πλήθος λύσεις).

Πρέπει η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος να είναι μηδέν (Πόρισμα 1) $\Longrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3-\lambda & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)\left[(3-\lambda)(1-\lambda)-3\right] - 2(3-3+\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda-3\lambda+\lambda^2-3) - 2\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda) - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda\left[\lambda-4-\lambda^2+4\lambda-2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda(-\lambda^2+5\lambda-6) = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

Το σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση όταν $\lambda = 0$ ή 2 ή 3.

6.6.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ CRAMER

Εστω το γραμμικό σύστημα

$$Ax = B \quad \text{όπου} \quad A \in M_{n\times n} \qquad (1).$$

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)\,B\,, \qquad (2)$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$x_i = \frac{1}{\det(A)}\left[b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni}\right] \qquad (3)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Εστω A_i ο πίνακας που προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας την i στήλη με το διάνυσμα στήλη B:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Αναπτύσσοντας την $\det(A_i)$ ως προς τα στοιχεία της i στήλης έχουμε:

$$\det(A_i) = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni} \quad (5)$$

Από τις (3) και (5) παίρνουμε:

$$\boxed{x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n} \quad (6)$$

Οι τύποι (6) μας δίνουν τη λύση του συστήματος $AX=B$ και λέγονται <u>τύποι του Cramer</u>.

Η μέθοδος Cramer είναι μια εναλλακτική μέθοδος επίλυσης γραμμικών συστημάτων, Είναι φανερό ότι μπορεί να εφαρμοστεί <u>μόνο όταν ο πίνακας A των συντελεστών είναι τετραγωνικός (n×n)</u>. Επειδή απαιτεί τον υπολογισμό (n+1) οριζουσών τάξεως n, η μέθοδος δεν είναι βολική για την επίλυση συστημάτων με περισσότερες από τρεις εξισώσεις. Είναι τότε προτιμότερη η μέθοδος της απαλοιφής Gauss που εξετάστηκε στο Κεφάλαιο 5.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί με τη μέθοδο Cramer η λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών είναι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 24 + 20 = 44 \neq 0$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 44 + 0 = 44$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -12 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -36 - 8 = -44$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -16 + 60 = 44$$

Η λύση του συστήματος είναι η:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 1 \,, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = -1 \quad \text{και} \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 1 .$$

Παράδειγμα 2

Να λυθεί με τη μέθοδο Cramer το σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -20 \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών είναι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Για την ορίζουσα του A έχουμε:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & -2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

($\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ το σύστημα έχει μία ακριβώς λύση).

Βρίσκουμε τώρα τις $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ και $\det(A_3)$.

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -20 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -20 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -17 & 64 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -20 \\ -17 & 64 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -17 & 64 \end{vmatrix}$$

$$= 20\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -17 & 16 \end{vmatrix} = 20$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & -20 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -20 & 0 \\ 6 & -62 & -2 \end{vmatrix} = 40$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -20 \\ 0 & 15 & -62 \end{vmatrix} = -310+300 = -10$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = -2, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = -4, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 1.$$

<u>Παρατήρηση</u>

Σύμφωνα με το Θ. 6.6.1 το $n \times n$ γραμμικό σύστημα $AX = B$ έχει μία ακριβώς λύση αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$.

Αν τώρα $\det(A) = 0$ υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

(i) Αν

$$\det(A_i) = 0 \quad \text{για όλα τα } i = 1, 2, \ldots, n,$$

τότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(ii) Αν

$$\det(A_i) \neq 0 \quad \text{για κάποιο } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

τότε το σύστημα είναι μη συμβιβαστό.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 6ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

6.1 Να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες

α) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$ γ) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ δ) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

6.2 Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

6.3 Να δειχθεί ότι η τιμή της πιο κάτω ορίζουσας είναι ανεξάρτητη του θ.

$$\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta-\cos\theta & \sin\theta+\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

6.4 Να βρεθούν οι τιμές των παρακάτω οριζουσών, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες:

α) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ γ) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

δ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ε) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ στ) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6.5 Να δειχθεί ότι

α) $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

β) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta+\gamma \\ 1 & \beta & \gamma+\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} = 0$

6.6 Δίνεται ότι $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6.$

Να βρεθούν τα εξής:

α) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$ γ) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ δ) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

6.7 Εστω ότι $\det(A)=-7$, όπου A ένας 3x3 πίνακας. Να βρεθούν α) $\det(3A)$, β) $\det(2A^{-1})$, γ) $\det((2A)^{-1})$ δ) $\det(A^2)$

6.8 Χωρίς να αναπτυχθούν οι ορίζουσες να δειχτεί ότι

α) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^3 \\ 1 & \beta & \beta^3 \\ 1 & \gamma & \gamma^3 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$

β) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2-\beta\gamma \\ 1 & \beta & \beta^2-\gamma\alpha \\ 1 & \gamma & \gamma^2-\alpha\beta \end{vmatrix} = 0$

γ) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+1)(\alpha-1)(\beta-1)$

δ) $\begin{vmatrix} \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

6.9 Εστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Για κάθε στοιχείο του A να βρεθούν

α) η ελάσσων ορίζουσα

β) το αλγεβρικό συμπλήρωμα

Να υπολογιστεί η det(A) αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της

i) πρώτης γραμμής ii) πρώτης στήλης
iii) δεύτερης γραμμής iv) δεύτερης στήλης
v) τρίτης γραμμής vi) τρίτης στήλης

6.10 Να υπολογιστούν με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης οι ορίζουσες.

α) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ γ) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

δ) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ε) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

6.11 Χρησιμοποιώντας τον τύπο $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\, adj(A)$ Να βρεθούν οι αντίστροφοι (αν υπάρχουν) των παρακάτω πινάκων

α) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$

δ) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ε) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ στ) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & -6 & 11 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

6.12 Αν $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ να επιβεβαιωθούν οι παρακάτω ιδιότητες

α) $A\, adj(A) = adj(A)\, A = \det(A)\, I$

β) $\det(adj(A)) = [\det(A)]^2$

6.13 Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

α) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

γ) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ δ) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

6.14 Με τη χρήση του κανόνα του Cramer να λυθούν τα συστήματα

α) $\begin{aligned} 2x+3y-z&=1 \\ 3x+5y+2z&=8 \\ x-2y-3z&=-1 \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} 2x-5y+2z&=7 \\ x+2y-4z&=3 \\ 3x-4y-6z&=5 \end{aligned}$ γ) $\begin{aligned} 2z+10&=y+3x \\ x-3z&=2y+8 \\ 4y+z&=3-2x \end{aligned}$

δ) $\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3-2x_4&=3 \\ 2x_1 \qquad -2x_3-4x_4&=-4 \\ x_1+x_2 \qquad +x_4&=3 \\ 2x_1+5x_2+3x_3+6x_4&=16 \end{aligned}$ ε) $\begin{aligned} x_1-x_2-x_3-x_4&=4 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4&=-1 \\ x_1+3x_2+2x_3+2x_4&=-5 \\ x_1-x_2+x_3-x_4&=2 \end{aligned}$

.15 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3-2x_4&=0 \\ 2x_1 \qquad -2x_3-4x_4&=0 \\ x_1+x_2 \qquad +x_4&=0 \\ 2x_1+5x_2+3x_3+6x_4&=0 \end{aligned}$$

6.16 Να αποδειχθούν οι ιδιότητες 6.3.1 – 6.39 και τα πορίσματά τους για τις οριζουσες τάξεως 2.

6.17 Να αποδειχθεί το Πόρισμα 1 της Πρότασης 6.3.4

6.18 Να αποδειχθεί η Πρόταση 6.3.7

6.19 Να αποδειχθεί το Πόρισμα 1 του Θ. 6.3.15:
Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

6.20 Να βρεθούν οι τιμές των κάτωθι οριζουσών:

(α) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (γ) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

6.21 Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 16-x & -8 & 12 \\ -8 & 4-x & -6 \\ 12 & -6 & 9-x \end{vmatrix} = 0$$

6.22 Να δειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} a & b+c & a^2 \\ b & c+a & b^2 \\ c & a+b & c^2 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

6.23 Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.3.12 να δείξετε ότι για κάθε n×n πίνακα ισχύει

$$\det A^T = \det A$$

6.24 Να βρεθούν οι αντίστροφοι (αν υπάρχουν) των κάτωθι πινάκων:

(α) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (β) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ (γ) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(δ) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ (ε) $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Σημείωση: Να χρησιμοποιηθεί ο τύπος: $A^{-1} = \dfrac{adj(A)}{det(A)}$

6.25 Να βρεθούν με τη μέθοδο Cramer οι λύσεις των πιο κάτω συστημάτων:

(α) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 &= -8 \end{aligned}$ (β) $\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 5 \end{aligned}$

6.26 Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι

$$\det\{adj(A)\} = (\det A)^{n-1}$$

6.27 Αν $S_j = a^j + \beta^j + \gamma^j$, εκφράζοντας την ορίζουσα σαν γινόμενο δύο οριζουσών να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 3 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} = (a-\beta)^2(a-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2$$

Να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 3 & S_1 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_5 \end{vmatrix}$$

6.28 Αν $S_r = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r$, να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} S_r & S_{r+1} & S_{r+2} \\ S_{r+1} & S_{r+2} & S_{r+3} \\ S_{r+2} & S_{r+3} & S_{r+4} \end{vmatrix} = \alpha^r \beta^r \gamma^r (\beta-\gamma)^2 (\gamma-\alpha)^2 (\alpha-\beta)^2.$$

6.29 Εστω οι πίνακες.

$$A = \begin{bmatrix} a+bx+cx^2 & a+by+cy^2 & a+bz+cz^2 \\ c+ax+bx^2 & c+ay+by^2 & c+az+bz^2 \\ b+cx+ax^2 & b+cy+ay^2 & b+cz+az^2 \end{bmatrix}$$

και

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθεί ένας πίνακας C έτσι ώστε

$$A = CB$$

(β) Να δειχθεί ότι

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a+c+b & b+a+c & c+b+a \\ ax+cy+bz & bx+ay+cz & cx+by+az \\ ax^2+cy^2+bz^2 & bx^2+ay^2+cz^2 & cx^2+by^2+az^2 \end{vmatrix}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Κεφάλαιο 7

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

7.1 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Ορισμός 7.1.1

Έστω δύο μη κενά σύνολα A και B και ένας νόμος F που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $x \in A$ σε ακριβώς ένα στοιχείο $y \in B$. Λέμε τότε ότι ο F είναι μια απεικόνιση (mapping ή map ή ακόμα function) από το A στο B και γράφουμε

$$F: A \longrightarrow B$$

για τα σύνολα, ή

$$x \xmapsto{F} y$$

για τα συσχετιζόμενα στοιχεία.

Το σύνολο A καλείται σύνολο αφετηρίας (domain) και το σύνολο B σύνολο άφιξης (co-domain).

Η έκφραση

$$y = F(x)$$

καλείται τύπος της F.

Επίσης, το x καλείται αρχέτυπο ή πρότυπο του y ενώ το y καλείται εικόνα (image) του x μέσω της F ή τιμή (value) της F στο x.

Μια απεικόνιση από το μη κενό σύνολο A στον εαυτό του, $F: A \longrightarrow A$, καλείται τελεστής (operator).

Παρατήρηση

Οι όροι "απεικόνιση" και "συνάρτηση" είναι ισοδύναμοι. Ο δεύτερος χρησιμοποιείται συνήθως όταν $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ ή $A, B \subseteq \mathbb{C}^n$. Για παράδειγμα, η $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ καλείται βαθμωτή συνάρτηση αν $m=1$ και διανυσματική συνάρτηση αν $m>1$. Η $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ είναι η γνωστή μας πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.

Το σύνολο όλων των $x \in A$ που έχουν εικόνα μέσω της $F: A \to B$ καλείται <u>πεδίο ορισμού της F</u> και συμβολίζεται με $D(F)$:

$$D(F) = \{x \in A : \exists\, y \in B \text{ τ.ω. } y = F(x)\} \subseteq A .$$

Στον Ορισμό 7.1.1 θεωρούμε ότι <u>κάθε</u> $x \in A$ έχει εικόνα μέσω της F, δηλαδή θεωρούμε ότι το πεδίο ορισμού συμπίπτει με το σύνολο αφετηρίας:

$$D(F) = A .$$

Σ' ένα γενικότερο ορισμό, $D(F) \subseteq A$ και σε κάποιο $x \in A$ μπορεί ν' αντιστοιχούν περισσότερα από ένα $y \in B$. Τότε όμως δεν έχουμε απεικόνιση αλλ' απλώς <u>αντιστοιχία</u>.

Το σύνολο που απαρτίζεται από όλα τα στοιχεία $y \in B$ τα οποία είναι εικόνες αντίστοιχων $x \in A$ καλείται <u>εικόνα</u> (image) ή <u>πεδίο τιμών</u> (range) της F και συμβολίζεται με $\mathrm{Im}\,F$ ή $R(F)$ ή ακόμα $F(A)$:

$$\mathrm{Im}\,F = R(F) = F(A) = \{y \in B \mid \exists\, x \in A \text{ τ.ω. } y = F(x)\}$$

Είναι φανερό ότι

$$\mathrm{Im}\,F \subseteq B .$$

Όπως θα δούμε σε λίγο, όταν $\mathrm{Im}\,F = B$ η απεικόνιση F καλείται "επί".

Θεωρούμε τώρα δυο απεικονίσεις με κοινά σύνολα αφετηρίας και άφιξης:

$$F : A \longrightarrow B \quad \text{και} \quad G : A \longrightarrow B .$$

Μπορούμε τότε να ορίσουμε την έννοια της ισότητας μεταξύ των F και G. Θα λέμε ότι οι F και G είναι <u>ίσες</u> και θα γράφουμε

$$F = G$$

αν ισχύει $F(x) = G(x) \quad \forall x \in A$.

Σε κάθε μη κενό σύνολο A αντιστοιχεί μια απεικόνιση

$$I_A : A \longrightarrow A$$

με τύπο

$$I_A(x) = x \qquad \forall x \in A .$$

Η εικόνα του x μέσω της I_A είναι ο εαυτός του. Η I_A ονομάζεται <u>ταυτοτική απεικόνιση</u> ή <u>ταυτοτικός τελεστής</u> (identity transformation or mapping ή identity operator).

Μια απεικόνιση $F : A \longrightarrow B$ που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $x \in A$ στο ίδιο στοιχείο y_o του B, που έχει δηλαδή τύπο της μορφής

$$F(x) = y_o \qquad \forall\ x \in A$$

καλείται <u>σταθερή απεικόνιση</u> (constant mapping). Είναι φανερό ότι αν η F είναι σταθερή τότε

$$\operatorname{Im} F = \{ y_o \} .$$

Είδη απεικονίσεων.

Μια απεικόνιση $F: A \to B$ είναι <u>αμφιμονοσήμαντη</u> ή <u>ένα προς ένα</u> (injective ή one-to-one) αν διαφορετικά στοιχεία του A έχουν διαφορετικές εικόνες μέσω της F στο B, δηλ. αν

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 \neq x_2 \implies F(x_1) \neq F(x_2).$$

Μια πιο εύχρηστη μορφή της πιο πάνω συνθήκης είναι η

$$\boxed{F(x_1) = F(x_2) \implies x_1 = x_2 \ , \quad x_1, x_2 \in A}$$

(στοιχεία με ίσες εικόνες είναι αναγκαστικά ίσα).

<u>Παράδειγμα. 1</u>

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντη καθόσον

$$f(-1) = f(1) = 1.$$

Τουναντίον, η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x+1$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Πράγματι αν $g(x_1) = g(x_2) \iff$

$$x_1 + 1 = x_2 + 1 \iff x_1 = x_2.$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Έστω $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ απεικόνιση με τύπο

$$F(x, y) = (x+1, y+2).$$

Η F είναι αμφιμονοσήμαντη. Πράγματι αν $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$ έχουμε:

$$(x_1 + 1, y_1 + 2) = (x_2 + 1, y_2 + 2) \implies (x_1, y_1) = (x_2, y_2).$$

Η F έχει μια πολύ ενδιαφέρουσα γεωμετρική ερμηνεία. Έστω $u = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Ο τύπος της F μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$F(x,y)=(x,y)+u$$

ή ακόμα

$$F(v)=v+u$$

Άρα η F αντιστοιχίζει κάθε διάνυσμα $v\in\mathbb{R}^2$ στο $v+u$ όπου $u=(1,2)\in\mathbb{R}^2$.

Γενικεύοντας τώρα το παράδειγμά μας, θεωρούμε ένα γραμμικό (διανυσματικό) χώρο V και κάποιο σταθερό του στοιχείο $u\in V$. Ορίζουμε την απεικόνιση $T_u: V\to V$ με τύπο

$$T_u(v)=v+u \qquad \forall v\in V$$

Η T_u ονομάζεται <u>μετατόπιση κατά u</u> (translation by u).

Αν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα μέσω της $F: A\to B$ ενός τουλάχιστον στοιχείου του A, αν δηλαδή

$$\forall y\in B \quad \exists\, x\in A \text{ τέτοιο ώστε } y=F(x),$$

θα λέμε ότι η F είναι <u>επί</u> (onto ή surjective).

Από τον ορισμό της εικόνας $\mathrm{Im}F$ της F είναι φανερό ότι η $F: A\to B$ είναι επί αν

$$\boxed{\mathrm{Im}F=B}$$

<u>Παράδειγμα</u>.

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ δεν είναι επί αφού

$$\mathrm{Im}f=\{y\in\mathbb{R}: y\geq 1\}\subset\mathbb{R}.$$

Αντίθετα, η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=x+1$ είναι επί αφού

$$\mathrm{Im}\,g=\mathbb{R}.$$

Συνδυάζοντας τους προηγούμενους ορισμούς, θα λέμε ότι η απεικόνιση $F: A \to B$ είναι <u>αμφιμονοσήμαντη και επί</u> (one-to-one and onto ή bijective) αν είναι ταυτόχρονα αμφιμονοσήμαντη και επί!

<u>Παράδειγμα</u>

Η ταυτοτική απεικόνιση $I_A: A \longrightarrow A$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί (για κάθε σύνολο A).

<u>Σημείωση</u>

Είναι αξιοσημείωτη αλλά και επικίνδυνη η πληθώρα εναλλακτικών όρων που χρησιμοποιούνται, τόσο στα Ελληνικά όσο και στα Αγγλικά, για ν' αποδώσουν τις έννοιες αυτής της παραγράφου:

- ένα προς ένα (one-to-one) ή αμφιμονοσήμαντη ή αμφιμονότιμη ή εφριπτική (injective).
- επί (onto) ή επιρριπτική (surjective)
- ένα προς ένα και επί (one-to-one and onto) ή αμφιμονοσήμαντη και επί ή αμφιμονότιμη και επί ή αμφιρριπτική (bijective).

Σε μερικά ελληνικά βιβλία ο όρος "αμφιμονοσήμαντη" χρησιμοποιείται λανθασμένα για απεικονίσεις που είναι "ένα προς ένα και επί". Έχουν επίσης προταθεί και άλλοι, ευρηματικοί μεν αλλά ατυχείς, όροι όπως "ένεση" (injection), "έφεση" (surjection) και "αμφίεση" (bijection) που παρά την ομοιοκαταληξία τους δεν έχουν ετυμολογική συνέπεια και είναι εντελώς παραπλανητικοί. Δε συμφωνούμε μ' αυτή τη <u>μεταμφίεση</u> της ορολογίας ούτε δίνουμε <u>άφεση</u> αμαρτιών σε όσους την υιοθετούν!

Σύνθεση απεικονίσεων

Θεωρούμε δύο απεικονίσεις τέτοιες ώστε το σύνολο άφιξης της πρώτης να συμπίπτει με το σύνολο αφετηρίας της δεύτερης:

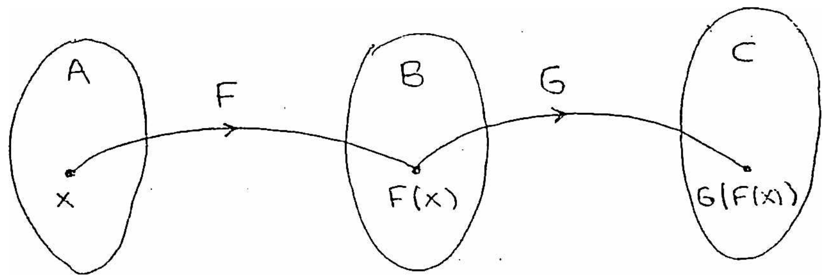
$$F: A \longrightarrow B \quad \text{και} \quad G: B \longrightarrow C.$$

Σε κάθε στοιχείο $x \in A$, η F αντιστοιχίζει ένα μοναδικό στοιχείο

$$y = F(x) \in B.$$

Η G τώρα αντιστοιχίζει αυτό το y σ' ένα μοναδικό στοιχείο

$$z = G(y) = G(F(x)) \in C.$$



Με αυτή τη διαδικασία, σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται ένα μοναδικό στοιχείο $G(F(x))$ του C. Έχουμε έτσι ορίσει μια απεικόνιση από το A στο C που τη συμβολίζουμε με

$$G \circ F : A \longrightarrow C$$

και την ονομάζουμε <u>σύνθεση</u> (composition) <u>των F και G</u>. Σύμφωνα με τα πιο πάνω

$$\boxed{(G \circ F)(x) = G(F(x)) \in C \quad \forall x \in A}$$

Σημείωση

Μερικά βιβλία χρησιμοποιούν το συμβολισμό xF αντί του $F(x)$ για την εικόνα του $x \in A$ μέσω της $F: A \to B$ και το συμβολισμό $F \circ G$ για τη σύνθεση των $F: A \to B$ και $G: B \to C$ αντί του $G \circ F$ που χρησιμοποιούμε εμείς.

Παράδειγμα 1

Έστω οι απεικονίσεις $F: M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$F\left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\right) = (\alpha+\delta, \beta+\gamma)$$

και $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$G(x,y) = x^2+y^2.$$

Για τη σύνθεσή τους $G \circ F: M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(G \circ F)\left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\right) = G\left(F\left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$= G(\alpha+\delta, \beta+\gamma) = (\alpha+\delta)^2+(\beta+\gamma)^2.$$

Παράδειγμα 2

Έστω η απεικόνιση $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$F(x,y) = (x^2+1, x+y).$$

Η σύνθεση $F \circ F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ συμβολίζεται επίσης με F^2. Για τον τύπο της έχουμε:

$$F^2(x,y) = (F \circ F)(x,y) = F(F(x,y))$$

$$= F(x^2+1, x+y) = ((x^2+1)^2+1, x^2+1+x+y)$$

Πρόταση 7.1.2

Έστω οι απεικονίσεις $F: A \to B$ και $G: B \to C$.
Ισχύουν τα εξής:
(i) Αν οι F και G είναι αμφιμονοσήμαντες τότε και η σύνθεση $G \circ F$ είναι αμφιμονοσήμαντη.
(ii) Αν οι F και G είναι επί τότε και η σύνθεση $G \circ F$ είναι επί.

Απόδειξη.
(i) Έστω ότι για κάποια $x_1, x_2 \in A$ ισχύει

$$(G \circ F)(x_1) = (G \circ F)(x_2) \Longrightarrow$$

$$G(F(x_1)) = G(F(x_2)) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{η } G \text{ είναι} \\ \text{αμφιμονοσήμαντη}\end{array}\right)$$

$$F(x_1) = F(x_2) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{η } F \text{ είναι} \\ \text{αμφιμονοσήμαντη}\end{array}\right)$$

$$x_1 = x_2.$$

Άρα η $G \circ F$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

(ii) Έστω $z \in C$. Εφόσον η G είναι επί $\exists\, y \in B$ τέτοιο ώστε $G(y) = z$.
Αφού η F είναι και αυτή επί $\exists\, x \in A$ τέτοιο ώστε $F(x) = y$ ή

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = G(y) = z.$$

Άρα η $G \circ F$ είναι επί. ∎

Αν οι F και G είναι απεικονίσεις από τον A στον εαυτό του,

$$F : A \longrightarrow A \quad \text{και} \quad G : A \longrightarrow A,$$

τότε αμφότερες οι συνθέσεις $G \circ F$ και $F \circ G$ ορίζονται και μάλιστα είναι και αυτές απεικονίσεις από το A στον εαυτό του. Η σύνθεση απεικονίσεων <u>δεν είναι αντιμεταθετική</u> (commutative), δηλαδή η $G \circ F$ δεν είναι γενικά ίση με την $F \circ G$.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω οι απεικονίσεις:

$F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ με τύπο $F(n) = 2n+1$

$G : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ με τύπο $G(n) = n^2 - 1$

Για τις $G \circ F$ και $F \circ G$ έχουμε:

$$(G \circ F)(n) = G(F(n)) = G(2n+1) = (2n+1)^2 - 1 \Longrightarrow$$

$$(G \circ F)(n) = 4n^2 + 4n.$$

$$(F \circ G)(n) = F(G(n)) = F(n^2-1) = 2(n^2-1)+1 \Longrightarrow$$

$$(F \circ G)(n) = 2n^2 - 1.$$

Παρατηρούμε ότι

$$G \circ F \neq F \circ G$$

αφού η σχέση

$$4n^2 + 4n = 2n^2 - 1$$

δεν ισχύει για κανένα ακέραιο.

Η σύνθεση απεικονίσεων είναι <u>προσεταιριστική</u> (associative). Ας πάρουμε τις απεικονίσεις

$$F: A \longrightarrow B, \quad G: B \longrightarrow C \quad \text{και} \quad H: C \longrightarrow D$$

Θα δείξουμε ότι

$$\boxed{(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)}$$

<u>Απόδειξη</u>.

Παρατηρούμε αμέσως ότι τόσο η $(H \circ G) \circ F$ όσο και η $H \circ (G \circ F)$ έχουν σαν σύνολο αφετηρίας το A και σύνολο άφιξης το D.

Για κάθε $x \in A$ έχουμε:

$$[(H \circ G) \circ F](x) = (H \circ G)(F(x)) = H(G(F(x)))$$

και

$$[H \circ (G \circ F)](x) = H\big((G \circ F)(x)\big) = H(G(F(x))).$$

Πράγματι, η προς απόδειξη σχέση ισχύει $\forall x \in A$. $\blacksquare$

Έστω τώρα η απεικόνιση $F: A \longrightarrow B$ και οι ταυτοτικές απεικονίσεις στα σύνολα A και B:

$$I_A: A \longrightarrow A \quad \text{με τύπο} \quad I_A(x) = x, \quad x \in A$$

$$I_B: B \longrightarrow B \quad \text{με τύπο} \quad I_B(x) = x, \quad x \in B.$$

Για κάθε $x \in A$ έχουμε:

$$F(x) = F(I_A(x)) = (F \circ I_A)(x)$$

και

$$F(x) = I_B(F(x)) = (I_B \circ F)(x)$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{F \circ I_A = F = I_B \circ F}$$

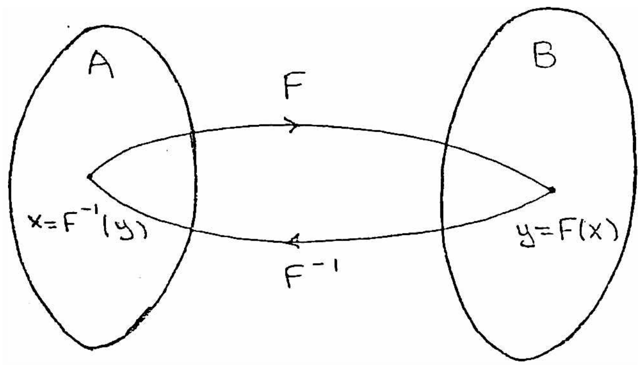
Η αντίστροφη απεικόνιση.

Έστω $F : A \rightarrow B$ μια αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση με τύπο

$$y = F(x) \qquad (1).$$

Σύμφωνα με τον ορισμό (της αμφιμονοσήμαντης και επί απεικόνισης) κάθε στοιχείο $y \in B$ έχει ένα μοναδικό αρχέτυπο $x \in A$. Η απεικόνιση από το B στο A που πραγματοποιεί αυτή την αντιστοίχιση ονομάζεται <u>αντίστροφη απεικόνιση</u> (inverse mapping) και θα τη συμβολίζουμε με F^{-1}:

$$x = F^{-1}(y) \qquad (2)$$



Οι ισότητες (1) και (2) είναι ισοδύναμες. Συνδυάζοντάς τις παίρνουμε τις εξής σημαντικές σχέσεις:

$$\boxed{F^{-1}(F(x)) = x \qquad \forall x \in A} \qquad (3)$$

$$\boxed{F(F^{-1}(y)) = y \qquad \forall y \in B} \qquad (4)$$

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι βασικό.

Θεώρημα 7.1.3

Η απεικόνιση $F: A \to B$ έχει αντίστροφη αν και μόνο αν αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.

Απόδειξη

Θεωρούμε πρώτα ότι η F έχει αντίστροφη. Πρέπει να δείξουμε ότι η F είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Έστω $x_1, x_2 \in A$ τέτοια ώστε

$$F(x_1) = F(x_2) \Longrightarrow$$

$$F^{-1}(F(x_1)) = F^{-1}(F(x_2)) \Longrightarrow \quad [\text{σχέση } (3)]$$

$$x_1 = x_2.$$

Άρα η F είναι αμφιμονοσήμαντη.

Για να δείξουμε ότι η F είναι επί παίρνουμε ένα $y \in B$. Τότε

$$F(F^{-1}(y)) = y \qquad [\text{σχέση } (4)]$$

οπότε $y = F(x^*)$ όπου $x^* = F^{-1}(y)$. Υπάρχει δηλαδή $x^* \in A$ τέτοιο ώστε $y = F(x^*)$. Άρα η F είναι επί.

Θα δείξουμε τώρα το αντίστροφο, ότι δηλ. η F έχει αντίστροφη αν είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Έστω $y \in B$. Εφόσον η F είναι επί $\exists\, x \in A$ τέτοιο ώστε

$$F(x) = y.$$

Επειδή τώρα η F είναι αμφιμονοσήμαντη το x αυτό είναι μοναδικό. Άρα μπορούμε να ορίσουμε μια νέα απεικόνιση G τέτοια ώστε

$$G(y) = x \qquad \forall\, y \in B.$$

Είναι φανερό ότι
$$F(G(y)) = y \quad \text{και} \quad G(F(x)) = x$$
οπότε η G είναι η αντίστροφη της F
$$G = F^{-1}.$$

Παράδειγμα 1.

Έστω $\mathbb{R}_0^+$ το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών:
$$\mathbb{R}_0^+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0 \}.$$
Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ με τύπο
$$f(x) = x^2$$
είναι αμφιμονοσήμαντη και επί, άρα έχει αντίστροφη. Αυτή είναι η $g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ με τύπο
$$g(x) = \sqrt{x}$$

Παράδειγμα 2

Έστω $\mathbb{R}^+$ το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών
$$\mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}.$$

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ με τύπο
$$f(x) = e^x$$
είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Η αντίστροφη συνάρτηση δεν είναι άλλη από το γνωστό μας φυσικό λογάριθμο: $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

Πρόταση 7.1.4

Αν η απεικόνιση $F: A \to B$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί τότε και η αντίστροφή της $F^{-1}: B \to A$ είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη και επί.

Απόδειξη

Το ότι η F έχει αντίστροφη εξασφαλίζεται από το Θ. 7.1.3.

Έστω $y_1, y_2 \in B$ τέτοια ώστε

$$F^{-1}(y_1) = F^{-1}(y_2) \Longrightarrow$$

$$F(F^{-1}(y_1)) = F(F^{-1}(y_1)) \Longrightarrow \quad [\text{σχέση } (4)]$$

$$y_1 = y_2 .$$

Άρα η F^{-1} είναι αμφιμονοσήμαντη.

Εφόσον η F είναι επί, η F^{-1} ορίζεται για κάθε $y \in B$ και $\mathrm{Im}\, F^{-1} = A$. Άρα η F^{-1} είναι επί. ∎

Παρατήρηση:

Στην περίπτωση που η $F: A \to B$ είναι αμφιμονοσήμαντη αλλ' όχι επί, δηλ.

$$\mathrm{Im}\, F \subset B ,$$

η θεωρία που αναπτύξαμε πιο πάνω εφαρμόζεται χωρίς πρόβλημα για την $F: A \to \mathrm{Im}\, F$.

Η F^{-1} είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathrm{Im}\, F$ επί του A.

Εξετάζοντας τις σχέσεις (3) και (4) είναι εύκολο να δούμε ότι στα αριστερά τους μέλη έχουμε τις συνθέσεις $F^{-1} \circ F$ και $F \circ F^{-1}$, αντίστοιχα. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε τις δύο σχέσεις ως εξής:

$$\boxed{F^{-1} \circ F = I_A} \quad (5)$$

$$\boxed{F \circ F^{-1} = I_B} \quad (6)$$

Με βάση τις πιο πάνω σχέσεις μπορούμε να δώσουμε ένα εναλλακτικό ορισμό της αντίστροφης απεικόνισης.

<u>Ορισμός 7.1.5</u>

(α) Η απεικόνιση $F: A \to B$ είναι <u>αντιστρέψιμη</u> ή <u>αντιστρεπτή</u> (invertible) αν υπάρχει απεικόνιση $F^{-1}: B \to A$ τέτοια ώστε

$$F^{-1} \circ F = I_A \quad \text{και} \quad F \circ F^{-1} = I_B$$

όπου I_A, I_B οι ταυτοτικοί τελεστές πάνω στα A και B.

Η F^{-1} καλείται <u>αντίστροφη απεικόνιση</u> (inverse mapping) της F.

(β) Ο τελεστής $F: A \to A$ είναι <u>αντιστρέψιμος</u> αν υπάρχει ο τελεστής $F^{-1}: A \to A$ τέτοιος ώστε

$$F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = I_A .$$

Ο F^{-1} καλείται <u>αντίστροφος τελεστής</u> του F.

<u>Πρόταση 7.1.6</u>

Αν οι απεικονίσεις $F: A \to B$ και $G: B \to C$ είναι αντιστρέψιμες, η σύνθεση $G \circ F: A \to C$ είναι επίσης αντιστρέψιμη και μάλιστα ισχύει

$$\boxed{(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}} \qquad (7)$$

<u>Απόδειξη</u>

Σύμφωνα με το Θ.7.1.3 οι F και G είναι αμφιμονοσήμαντες και επί αφού είναι αντιστρέψιμες. Σύμφωνα τώρα με την Πρ. 7.1.2 και η σύνθεσή τους $G \circ F$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί οπότε και αυτή είναι αντιστρέψιμη.

Θα δείξουμε τώρα ότι η $(G \circ F)^{-1}$ όπως δίνεται από την (7) ικανοποιεί τις δύο συνθήκες του Ορισμού 7.1.5:

$$(F^{-1} \circ G^{-1}) \circ (G \circ F) = F^{-1} \circ [G^{-1} \circ (G \circ F)]$$

$$= F^{-1} \circ [(G^{-1} \circ G) \circ F] = F^{-1} \circ (I_B \circ F)$$

$$= F^{-1} \circ F = I_A$$

(Χρησιμοποιήσαμε την προσεταιριστική ιδιότητα.).

$$(G \circ F) \circ (F^{-1} \circ G^{-1}) = G \circ [F \circ (F^{-1} \circ G^{-1})]$$

$$= G \circ [(F \circ F^{-1}) \circ G^{-1}] = G \circ (I_B \circ G^{-1})$$

$$= G \circ G^{-1} = I_C .$$

Πόρισμα

Αν η $F: A \rightarrow B$ είναι αντιστρέψιμη τότε

$$\boxed{(F^{-1})^{-1} = F} \tag{8}$$

7.2 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Στην προηγούμενη παράγραφο ασχοληθήκαμε με απεικονίσεις της γενικής μορφής

$$F: A \longrightarrow B$$

όπου A και B μη κενά σύνολα. Ορίσαμε επίσης την έννοια της ισότητας μεταξύ δύο απεικονίσεων με κοινά σύνολα αφετηρίας και άφιξης καθώς και τη σύνθεση απεικονίσεων. Δεν αποπειραθήκαμε να ορίσουμε άλλες πράξεις όπως η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός καθόσον αυτό δεν είναι δυνατό για κάθε σύνολο B.

Στην παρούσα παράγραφο θα ασχοληθούμε με απεικονίσεις των οποίων τα σύνολα αφετηρίας και άφιξης είναι γραμμικοί χώροι. Θα σηματοδοτήσουμε αυτή την αλλαγή αντικαθιστώντας το συμβολισμό $F: A \rightarrow B$ με τον

$$T: V_1 \longrightarrow V_2 .$$

Ειδικότερα μας ενδιαφέρουν οι απεικονίσεις που υπακούουν στις δύο πράξεις που χαρακτηρίζουν τη δομή ενός γραμμικού (διανυσματικού) χώρου, δηλαδή την πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Αυτές οι απεικονίσεις καλούνται "γραμμικές" και ορίζονται στον ορισμό που ακολουθεί.

<u>Ορισμός 7.2.1</u>

Έστω V_1, V_2 δύο γραμμικοί χώροι πάνω σε κάποιο σώμα K και μια απεικόνιση $T: V_1 \to V_2$. Αν για κάθε $x, y \in V_1$ και $\lambda \in K$ ισχύουν οι ιδιότητες

(i) $T(x+y) = T(x) + T(y)$ και (1)

(ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ (2)

τότε η T ονομάζεται <u>γραμμική απεικόνιση</u> (linear mapping) <u>από το V_1 στο V_2</u>.

Μια γραμμική απεικόνιση από τον γραμμικό χώρο V στον εαυτό του $(T: V \to V)$ ονομάζεται <u>γραμμικός τελεστής</u> (linear operator) <u>πάνω στο V</u>.

<u>Παρατηρήσεις</u>.

(1) Οι πράξεις στα αριστερά μέλη των (i) και (ii) είναι εκείνες του V_1 και στα δεξιά εκείνες του V_2. Έτσι το σύμβολο + στο αριστερό μέλος της (i) είναι το σύμβολο της πρόσθεσης στο V_1 ενώ το + στο δεξιό μέλος είναι το σύμβολο της πρόσθεσης στο V_2. Εφόσον είναι σαφές ποιου χώρου στοιχεία προσθέτουμε δεν πρέπει να υπάρχει σύγχυση.

(2) Έχουμε και εδώ πληθώρα εναλλακτικών όρων (τόσο στα Ελληνικά όσο και στα Αγγλικά). Για την $T: V_1 \to V_2$:

— <u>γραμμική απεικόνιση</u> (linear mapping)

— <u>γραμμικός μετασχηματισμός</u> (linear transformation)

— <u>ομομορφισμός</u> ή <u>μορφισμός</u> (homomorphism).

Για τον $T: V \rightarrow V$:

- <u>γραμμικός τελεστής</u> (linear operator)
- <u>γραμμικός μετασχηματισμός</u> (linear transformation)
- <u>ενδομορφισμός</u> (endomorphism).

Ακόμα, αν θέλουμε να προσδιορίσουμε το σώμα K, λέμε επίσης ότι η T είναι <u>K-γραμμική</u> (ή <u>K-ομομορφισμός</u>). Επειδή συνήθως αναφερόμαστε σε κάποιο συγκεκριμένο σώμα K παραλείπουμε το πρόθεμα K.

(13) Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε συχνά το σώμα $\mathbb{R}$ αντί του γενικού K για την ευκολότερη κατανόηση των αποδείξεων. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η αλήθεια των προτάσεων δεν περιορίζεται στο $\mathbb{R}$ και επεκτείνεται αμέσως στο άλλο σώμα που μας ενδιαφέρει, δηλαδή το $\mathbb{C}$.

(14) Από την ιδιότητα (ii) βλέπουμε ότι

$$T(0 \cdot x) = 0 \cdot T(x) \Rightarrow$$

$$T(\mathbb{O}) = \mathbb{O} \in V_2, \qquad (3)$$

δηλαδή η εικόνα του $\mathbb{O} \in V_1$ μέσω της T είναι το $\mathbb{O} \in V_2$ (η T στέλλει το $\mathbb{O} \in V_1$ στο $\mathbb{O} \in V_2$). Η (3) μας παρέχει ένα κριτήριο μη γραμμικότητας της $T: V_1 \rightarrow V_2$. Αν

$$T(\mathbb{O}) \neq \mathbb{O}$$

τότε η T <u>δεν είναι γραμμική</u>.

Για να προσδιορίσουμε κατά πόσο μια απεικόνιση είναι γραμμική μπορούμε, εκτός από τον Ορισμό 7.2.1, να χρησιμοποιούμε την πρόταση που ακολουθεί.

<u>Πρόταση 7.2.2</u>

Η απεικόνιση $T: V_1 \to V_2$ είναι γραμμική αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in V_1$ και $\lambda, \mu \in K$ ισχύει

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \qquad (4)$$

<u>Απόδειξη</u>

Αν η T είναι γραμμική, τότε συνδυάζοντας τις ιδιότητες (i) και (ii) του Ορισμού 7.2.1 έχουμε:

$$T(\lambda x + \mu y) = T(\lambda x) + T(\mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

Αντίστροφα, αν η (4) ισχύει για κάθε $x, y \in V_1$ και $\lambda, \mu \in K$ τότε

(α) Θέτοντας $\lambda = \mu = 1$, παίρνουμε

$$T(1x + 1y) = 1 \cdot T(x) + 1\, T(y) \Rightarrow$$
$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \forall x, y \in V_1 \quad \text{και}$$

(β) Θέτοντας $\mu = 0$, παίρνουμε

$$T(\lambda x + 0 y) = \lambda T(x) + 0\, T(y) \Longrightarrow$$
$$T(\lambda x + \mathbb{O}) = \lambda T(x) + \mathbb{O} \Longrightarrow$$
$$T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \forall x \in V_1 \text{ και } \lambda \in K.$$

Συνεπώς, οι ιδιότητες (i) και (ii) ισχύουν και άρα η T είναι γραμμική. ∎

Δίνουμε τώρα μερικά παραδείγματα και αντιπαράδειγμα.

Παράδειγμα 1

Έχουμε ήδη ορίσει την ταυτοτική απεικόνιση $T: V \to V$ με τύπο

$$I(x) = x \quad , \quad x \in V \tag{5}$$

(η εικόνα του $x \in V$ μέσω της I είναι ο εαυτός του).
Αν $x, y \in V$ και $\lambda, \mu \in K$ έχουμε:

$$I(\lambda x + \mu y) = \lambda x + \mu y = \lambda I(x) + \mu I(y).$$

Σύμφωνα με την Πρ. 7.2.2 η I είναι γραμμική.

Παράδειγμα 2

Έστω η απεικόνιση $O: V_1 \to V_2$ με τύπο

$$O(x) = \mathbb{O} \quad , \quad x \in V_1 \tag{6}$$

Η O απεικονίζει κάθε στοιχείο $x \in V_1$ στο μηδενικό στοιχείο του V_2 και ονομάζεται μηδενική απεικόνιση (zero mapping ή zero transformation).

Η $O: V_1 \to V_2$ είναι γραμμική αφού $\forall x, y \in V_1$ και $\lambda, \mu \in K$ ισχύει

$$O(\lambda x + \mu y) = \mathbb{O} = \mathbb{O} + \mathbb{O} = \lambda \cdot \mathbb{O} + \mu \mathbb{O} = \lambda O(x) + \mu O(y).$$

Παράδειγμα 3

Θεωρούμε το γραμμικό χώρο P_n των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού $\leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Η παραγώγιση $D: P_n \to P_{n-1}$ με τύπο

$$D(p) = p' \quad , \quad p \in P_n \tag{7}$$

είναι γραμμική απεικόνιση.

Πράγματι για κάθε $p, q \in P_n$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$D(\lambda p + \mu q) = (\lambda p + \mu q)' = \lambda p' + \mu q' = \lambda D(p) + \mu D(q)$$

[Χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές ιδιότητες των παραγώγων:

$$(f+g)' = f' + g'$$

και $\quad (\lambda f)' = \lambda f' \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$].

Παράδειγμα 4

Έστω η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τον τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 , x_3 - x_4)$$

Η T είναι γραμμική αφού για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^4$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= T\big(\lambda(x_1,x_2,x_3,x_4) + \mu(y_1,y_2,y_3,y_4)\big) \\ &= T(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_4 + \mu y_4) \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 , \lambda x_3 + \mu y_3 - \lambda x_4 - \mu y_4) \\ &= \lambda(x_1 + x_2, x_3 - x_4) + \mu(y_1 + y_2, y_3 - y_4) \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

Παράδειγμα 5

Έστω ο σταθερός πίνακας $A \in M_{m\times n}$. Η απεικόνιση $f: M_{n\times 1} \longrightarrow M_{m\times 1}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$f(X) = AX \quad , \quad X \in M_{n\times 1} \qquad (8)$$

είναι γραμμική.

Πράγματι, για κάθε $X, Y \in M_{n\times 1}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\lambda X + \mu Y) &= A(\lambda X + \mu Y) \\ &= A(\lambda X) + A(\mu Y) \\ &= \lambda(AX) + \mu(AY) \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y).$$

(Χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πινάκων).

Παράδειγμα 6

Ο τελεστής $T: M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2}$ με τύπο

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{21} \\ a_{12}+a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικός.

Πράγματι, για κάθε $A, B \in M_{2\times 2}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$T(\lambda A+\mu B) = T\left(\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} \lambda a_{11}+\mu b_{11} & \lambda a_{12}+\mu b_{12} \\ \lambda a_{21}+\mu b_{21} & \lambda a_{22}+\mu b_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda a_{11}+\mu b_{11} & \lambda a_{12}+\mu b_{12}+\lambda a_{21}+\mu b_{21} \\ \lambda a_{12}+\mu b_{12}+\lambda a_{21}+\mu b_{21} & \lambda a_{22}+\mu b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{21} \\ a_{12}+a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}+b_{21} \\ b_{12}+b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad T(\lambda A+\mu B) = \lambda T(A)+\mu T(B)$$

Αντιπαράδειγμα 7

Η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$T(x_1, x_2) = (x_1,\ x_1+x_2,\ x_1+x_2+1)$$

δεν είναι γραμμική. Πράγματι, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η T δεν ικανοποιεί καμιά από τις δύο ιδιότητες του Ορισμού 7.2.1.

Αν $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε:

$$T(x+y) = T(x_1+y_1, x_2+y_2)$$
$$= (x_1+y_1,\ x_1+y_1+x_2+y_2,\ x_1+y_1+x_2+y_2+1)$$
$$= (x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+1) + (y_1, y_1+y_2, y_1+y_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T(x+y) \neq T(x)+T(y).$$

Αν $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ και $\lambda\in\mathbb{R}$

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_1+\lambda x_2, \lambda x_1+\lambda x_2+1) \Rightarrow$$

$$T(\lambda x) \neq \lambda T(x) = (\lambda x_1, \lambda x_1+\lambda x_2, \lambda x_1+\lambda x_2+\lambda).$$

Θα μπορούσαμε να δούμε εξαρχής ότι η T δεν στέλνει το $\mathbb{O}=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{O}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$:

$$T(\mathbb{O})=T(0,0) = (0,0+0,0+0+1)=(0,0,1)\neq\mathbb{O}.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (i) και (ii) του Ορισμού 7.2.1 είναι εύκολο να δείξουμε ότι για κάθε $x_1,x_2,\dots,x_n\in V_1$ και $\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n\in K$ ισχύει

$$T(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n)=\lambda_1T(x_1)+\lambda_2T(x_2)+\dots+\lambda_nT(x_n)$$

ή

$$T\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i T(x_i) \qquad (9)$$

Η (9) αποτελεί μια γενίκευση της (4).

Θεώρημα 7.2.3

Έστω V γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης $\dim V=n\in\mathbb{N}$ και $A=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ μια βάση του. Αν ο W είναι γραμμικός χώρος και

$$w_1, w_2, \dots, w_n$$

η οποιαδήποτε διανύσματά του, τότε υπάρχει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $T:V\longrightarrow W$ τέτοια ώστε

$$T(u_i)=w_i, \quad i=1,2,\dots,n \qquad (10)$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω κάποιο διάνυσμα $u \in V$. Αυτό γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης A του V:

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

όπου τα $a_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι μοναδικά ορισμένα.
Ορίζουμε την απεικόνιση $T: V \longrightarrow W$ ως εξής:

$$T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \qquad (11)$$

Παρατηρούμε ότι

$$T(u_i) = T(1 u_i) = w_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η T είναι γραμμική και μοναδική.

Έστω $\lambda, \mu \in K$ και $v \in V$. Το v εκφράζεται και αυτό ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης A του V:

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i$$

όπου τα $b_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι μοναδικά ορισμένα.
Έχουμε τότε

$$\begin{aligned} T(\lambda u + \mu v) &= T\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_i u_i\right) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \mu b_i)\, u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \mu b_i)\, w_i \qquad \left[\begin{array}{c}\text{από τον ορισμό} \\ \text{της } T \ (11)\end{array}\right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad T(\lambda u+\mu v) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i w_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i \quad \Rightarrow$$

$$T(\lambda u+\mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$$

Σύμφωνα με την Πρ. 7.2.2, η T είναι γραμμική. Απομένει να δείξουμε ότι η T είναι μοναδική. Έστω $S: V \longrightarrow W$ μια άλλη γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί την

$$S(u_i) = w_i \, , \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Έχουμε τότε

$$S(u) = S\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\Big) = \sum_{i=1} a_i \, S(u_i)$$

(λόγω της γραμμικότητας της S). Άρα

$$S(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = T(u)$$

Άρα $S=T$ το οποίο δείχνει τη μοναδικότητα της T. $\blacksquare$

Το Θ. 7.2.3 είναι στοιχειώδες αλλά και τόσο βασικό που θεωρήσαμε σκόπιμο να το διατυπώσουμε τυπικά. Μας βοηθά να υπογραμμίσουμε ότι οι γραμμικές απεικονίσεις έχουν πολύ ειδικές ιδιότητες.

Παράδειγμα 1

Τα διανύσματα

$$u_1 = (1, 2) \quad \text{και} \quad u_2 = (3, 4)$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και άρα αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^2$. Έστω ακόμα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$:

$$w_1 = (3, 2, 1) \quad \text{και} \quad w_2 = (6, 5, 4).$$

Σύμφωνα με το Θ. 7.2.3, υπάρχει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε:

$$T(u_1) = w_1 = (3, 2, 1) \quad \text{και}$$

$$T(u_2) = w_2 = (6, 5, 4).$$

Ας βρούμε τώρα την T. Έστω $x = (x_1, x_2)$ ένα τυχαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Αυτό μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των u_1 και u_2 (αφού αυτά αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^2$):

$$(x_1, x_2) = \lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_2 \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \implies$$

$$(x_1, x_2) = \lambda_1 (1, 2) + \lambda_2 (3, 4) \implies$$

$$(x_1, x_2) = (\lambda_1 + 3\lambda_2 \, , \, 2\lambda_1 + 4\lambda_2)$$

Υπολογίζουμε τα λ_1, λ_2 επιλύοντας το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 &= x_1 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= x_2 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 &= x_1 \\ -2\lambda_2 &= x_2 - 2x_1 \end{aligned}\right\} \implies$$

$$\lambda_1 = -2x_1 + \tfrac{3}{2} x_2 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = x_1 - \tfrac{1}{2} x_2 .$$

Άρα $\quad (x_1, x_2) = \left(-2x_1 + \tfrac{3}{2} x_2\right) u_1 + \left(x_1 - \tfrac{1}{2} x_2\right) u_2 \implies$

$$T(x_1, x_2) = T\left[\left(-2x_1 + \tfrac{3}{2} x_2\right) u_1 + \left(x_1 - \tfrac{1}{2} x_2\right) u_2\right] \implies$$

$$T(x_1, x_2) = \left(-2x_1 + \tfrac{3}{2} x_2\right) T(u_1) + \left(x_1 - \tfrac{1}{2} x_2\right) T(u_2)$$

$$T(x_1,x_2)=(-6x_1+\frac{9}{2}x_2+6x_1-3x_2, -4x_1+3x_2+5x_1-\frac{5}{2}x_2, -2x_1+\frac{3}{2}x_2+4x_1-2x_2)$$

$\Rightarrow$

$$T(x_1,x_2)=\left(\frac{3}{2}x_2, x_1+\frac{1}{2}x_2, 2x_1-\frac{x_2}{2}\right).$$

Παράδειγμα 2

Έστω $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ μια γραμμική απεικόνιση και έστω

$$w_i=T(e_i) \qquad i=1,2,\dots,n$$

οι εικόνες της συνήθους βάσης $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Το Θ. 7.2.3 μας λέει ότι η T προσδιορίζεται μοναδικά από τα διανύσματα

$$w_i\in\mathbb{R}^m \qquad i=1,2,\dots,n.$$

Αν $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ τότε

$$T(x)=T(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1T(e_1)+x_2T(e_2)+\dots+x_nT(e_n)$$

$\Rightarrow$

$$T(x)=x_1w_1+x_2w_2+\dots+x_nw_n \tag{12}$$

Αν A είναι ο $n\times m$ πίνακας με γραμμές τα $w_1,w_2,\dots,w_n$ τότε η (12) μας λέει ότι

$$T(x)=xA$$

Με διαφορετικά λόγια, αν

$$w_i=(A_{i1},\dots,A_{im})$$

τότε

$$T(x_1,x_2,\dots,x_n)=[x_1 \dots x_n]\begin{bmatrix}A_{11} & \dots & A_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{n1} & \dots & A_{nm}\end{bmatrix} \tag{13}$$

Αυτή είναι μια πολύ άμεση περιγραφή μιας γραμμικής απεικόνισης. Στην παράγραφο 7.6 θα μελετήσουμε σοβαρά τη σχέση μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων.

Το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από το V_1 στο V_2 συμβολίζεται με

$$\mathcal{L}(V_1, V_2)$$

ή

$$\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$$

(από τη λέξη homomorphism – ομομορφισμός). Έχουμε ήδη ορίσει την ισότητα (όχι απαραίτητα γραμμικών) απεικονίσεων. Θα ορίσουμε τώρα πράξεις στο σύνολο $\mathcal{L}(V_1, V_2)$.

<u>Πρόσθεση στο $\mathcal{L}(V_1, V_2)$</u>.

Αν $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, τότε ορίζουμε το άθροισμα $T_1 + T_2$ ως την απεικόνιση από το V_1 στο V_2 που δίνεται από τον τύπο

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x), \quad x \in V_1 \tag{14}$$

Θα δείξουμε ότι η $T_1 + T_2$ είναι γραμμική. Για κάθε $x, y \in V_1$ και $\lambda, \mu \in K$ παίρνουμε:

$$(T_1 + T_2)(\lambda x + \mu y) = T_1(\lambda x + \mu y) + T_2(\lambda x + \mu y)$$

Οι T_1 και T_2 είναι γραμμικές $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(\lambda x + \mu y) &= \lambda T_1(x) + \mu T_1(y) + \lambda T_2(x) + \mu T_2(y) \\ &= \lambda [T_1(x) + T_2(x)] + \mu [T_1(y) + T_2(y)] \Longrightarrow\end{aligned}$$

$$(T_1 + T_2)(\lambda x + \mu y) = \lambda (T_1 + T_2)(x) + \mu (T_1 + T_2)(y)$$

Σύμφωνα με την Πρ. 7.2.2, η $(T_1 + T_2)$ είναι γραμμική. Άρα

$$T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2).$$

και το $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Αν $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ και $\lambda \in K$, ορίζουμε το βαθμωτό πολλαπλάσιο λT ως την απεικόνιση από το V_1 στο V_2 που δίνεται από τον τύπο:

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x), \quad x \in V_1 \tag{15}$$

Θα δείξουμε ότι η λT είναι γραμμική. Για κάθε $x, y \in V_1$ και $a, b \in K$ παίρνουμε:

$$(\lambda T)(ax+by) = \lambda T(ax+by) = \lambda\left[aT(x) + bT(y)\right]$$

(αφού η T είναι γραμμική) $\Longrightarrow$

$$(\lambda T)(ax+by) = a\left[\lambda T(x)\right] + b\left[\lambda T(y)\right] = a(\lambda T)(x) + b(\lambda T)(y)$$

Σύμφωνα με την Πρ. 7.2.2, η λT είναι γραμμική.
Άρα

$$\lambda T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$$

και το $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

Εύκολα μπορεί να αποδείξει κανείς ότι το σύνολο $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ με την πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό που ορίσαμε πιο πάνω είναι ένας γραμμικός χώρος.

Θεώρημα 7.2.4

Το σύνολο $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ με την πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό που ορίζονται στις (14) και (15), αντίστοιχα, είναι ένας γραμμικός χώρος.

Απόδειξη

Αυτή είναι απλή και την αφήνουμε σαν άσκηση. Θα αναφέρουμε μόνο ότι το μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι η μηδενική απεικόνιση

$$O(x) = \mathbb{0}, \quad x \in V_1 \quad \text{και} \quad \mathbb{0} \in V_2. \qquad \square$$

Ο γραμμικός χώρος $\mathcal{L}(V, V)$ των γραμμικών τελεστών πάνω στο V θα συμβολίζεται πιο απλά με $\mathcal{L}(V)$:

$$\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V) = \mathrm{Hom}(V, V) \qquad (16)$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο $\mathcal{L}(V)$ εκτός από τη γραμμική του δομή (Θ. 7.2.4) χαρακτηρίζεται και από αλγεβρική δομή, αφού η σύνθεση $T_1 \circ T_2$ δύο γραμμικών ~~τελεστών~~ αποτελεί μια πράξη "πολλαπλασιασμού" στο $\mathcal{L}(V)$.

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι ιδιαίτερα σημαντικό.

Θεώρημα 7.2.5

Έστω V_1, V_2 πεπερασμενοδιάστατοι γραμμικοί χώροι πάνω στο σώμα K με

$$\dim V_1 = n \quad \text{και} \quad \dim V_2 = m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Τότε

$$\boxed{\dim \mathcal{L}(V_1, V_2) = \dim V_1 \dim V_2 = nm} \qquad (17)$$

Απόδειξη

Έστω ότι τα σύνολα

$$A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad \text{και} \quad B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

είναι βάσεις των V_1 και V_2, αντίστοιχα.

Ορίζουμε την απεικόνιση $T_{ij} : V_1 \to V_2$ έτσι ώστε

$$T_{ij}(u_k)=\delta_{ki}w_j \quad \text{για όλα τα } k=1,2,\dots,n \tag{18}$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker, δηλ.

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι απεικονίσεις T_{ij} είναι γραμμικές:

$$T_{ij}\in \mathcal{L}(V_1,V_2), \quad i=1,2,\dots,n,\quad j=1,2,\dots,m$$

Θα δείξουμε ότι το σύνολο των nm γραμμικών απεικονίσεων T_{ij} αποτελεί μια βάση του $\mathcal{L}(V_1,V_2)$.

Έστω η απεικόνιση $S\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$. Τότε για $k=1,2,\dots,n$ ισχύει

$$S(u_k)=a_{k1}w_1+a_{k2}w_2+\dots+a_{km}w_m$$

(η εικόνα του u_k μέσω της S γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης B του V_2).

Άρα έχουμε

$$S(u_k)=\sum_{j}^{m}a_{kj}w_j=\sum_{j}^{m}a_{kj}\sum_{i}^{n}\delta_{ki}w_j$$

(γιατί;) $\Longrightarrow$

$$S(u_k)=\sum_{j}^{m}\sum_{i}^{n}a_{kj}T_{ij}.$$

Παρατηρούμε ότι η $S(u_k)$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των T_{ij} για $k=1,2,\dots,n$.

Επειδή τώρα κάθε στοιχείο $u\in V_1$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $u_1,u_2,\dots,u_n$ αφού αυτά αποτελούν μια βάση του V_1 αυτό σημαίνει ότι η $S(u)$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $S(u_k)$, $k=1,2,\dots,n$ που όπως δείξαμε πιο πάνω γράφονται και αυτές με τη σειρά τους ως γραμμικοί συνδυασμοί των T_{ij}.

Άρα για κάθε $u \in V_1$ η $S(u)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των T_{ij} και έτσι οι T_{ij} παράγουν τον $\mathcal{L}(V_1, V_2)$.

Μένει να δείξουμε τώρα ότι οι

$$T_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$j = 1, 2, \dots, m$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Έστω ότι

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} T_{ij} = \mathbb{O} .$$

Τότε για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$ παίρνουμε:

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} T_{ij} \right)(u_k) = \mathbb{O} \Longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} T_{ij}(u_k) = \mathbb{O} \Longrightarrow \quad \text{(από τον ορισμό των } T_{ij}\text{)}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \delta_{ki} W_j = \mathbb{O} \Longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_{kj} W_j = \mathbb{O} , \quad k = 1, 2, \dots, n .$$

Επειδή τα $W_1, W_2, \dots, W_m$ αποτελούν μια βάση του V_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και έτσι έχουμε

$$\lambda_{kj} = 0 \quad \text{για όλα τα } k = 1, 2, \dots, n$$
$$\text{και } j = 1, 2, \dots, m$$

Άρα και οι T_{ij} είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και έτσι αυτές αποτελούν μια βάση του $\mathcal{L}(V_1, V_2)$. Αφού η βάση αποτελείται από nm στοιχεία,

$$\dim \mathcal{L}(V_1, V_2) = nm$$

Πόρισμα

Αν ο γραμμικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης $n = \dim V \in \mathbb{N}$, τότε

$$\boxed{\dim \mathcal{L}(V) = n^2} \qquad (19)$$

Τα στοιχεία του χώρου $\mathcal{L}(V, K)$ λέγονται <u>γραμμικά συναρτησιακά</u> ή <u>συναρτησοειδή</u> (linear functionals ή linear forms) πάνω στο V. Η έννοια του γραμμικού συναρτησιακού είναι ιδιαίτερα σημαντική στη μελέτη χώρων πεπερασμένης διάστασης γιατί μας διευκολύνει στην καλύτερη οργάνωση της συζήτησης με θέματα όπως οι υπόχωροι, οι γραμμικές εξισώσεις και οι συντεταγμένες.

Παράδειγμα 1

Η $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ με τύπο

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

όπου $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ γνωστές σταθερές είναι γραμμικό συναρτησιακό. Κάθε στοιχείο του $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ είναι της πιο πάνω μορφής.

Αν e_i, $i = 1, 2, \dots, n$ είναι τα στοιχεία της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^n$, παρατηρούμε ότι

$$F(e_i) = a_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Παράδειγμα 2

Το ίχνος τετραγωνικού πίνακα είναι ένα σημαντικό παράδειγμα γραμμικού συναρτησιακού: $tr \in \mathcal{L}(M_{n\times n}, \mathbb{R})$ όπου

$$tr\, A = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}$$

Η γραμμικότητα του tr αποδεικνύεται εύκολα.

χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού.

Παράδειγμα 3

Δίνουμε τώρα ένα από τα πιο σημαντικά γραμμικά συναρτησιακά στα μαθηματικά. Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό διάστημα στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και $C([a,b])$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο $[a,b]$. Η απεικόνιση $G \in \mathcal{L}(C([a,b]), \mathbb{R})$ με τύπο

$$G(f) = \int_a^b f(t)\, dt$$

είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό. Η γραμμικότητα του G αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

Ο χώρος $\mathcal{L}(V,K)$ καλείται <u>αλγεβρικός δυϊκός χώρος</u> (dual space) του V και συμβολίζεται με V^* ή V':

$$V^* = \mathcal{L}(V,K) \tag{20}$$

7.2.1 ΣΥΝΘΕΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ

Πρόταση 7.2.6

Αν $T_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ και $T_2 \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$ τότε $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_3)$.

Απόδειξη

Η πρόταση μας λέει ότι η σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων είναι επίσης γραμμική. Θα δείξουμε τη γραμμικότητα της $T_2 \circ T_1$ χρησιμοποιώντας την Πρ. 7.2.2.

Για κάθε $x, y \in V_1$ και $\lambda, \mu \in K$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
(T_2 \circ T_1)(\lambda x + \mu y) &= T_2\left[T_1(\lambda x + \mu y)\right] \\
&= T_2\left[\lambda T_1(x) + \mu T_1(y)\right] && \text{(αφού η } T_1 \text{ είναι γραμμική)} \\
&= \lambda T_2(T_1(x)) + \mu T_2(T_1(y)) && \text{(αφού η } T_2 \text{ είναι γραμμική)}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \quad (T_2 \circ T_1)(\lambda x + \mu y) = \lambda (T_2 \circ T_1)(x) + \mu (T_2 \circ T_1)(y).$$

Άρα η $T_2 \circ T_1$ είναι γραμμική. $\blacksquare$

Σύμφωνα με την Πρ. 7.2.6, αν οι T_1, T_2 είναι γραμμικοί τελεστές πάνω στο V, δηλαδή

$$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V),$$

τότε οι $T_2 \circ T_1$ και $T_1 \circ T_2$ είναι επίσης γραμμικοί τελεστές πάνω στο V, δηλαδή

$$T_2 \circ T_1, \; T_1 \circ T_2 \in \mathcal{L}(V).$$

Πρόταση 7.2.7

Αν $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{L}(V)$ και $\lambda \in K$, τότε ισχύουν τα εξής:

(i) $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$ Προσεταιριστική ιδιότητα

(ii) $T_1 \circ (T_2 + T_3) = T_1 \circ T_2 + T_1 \circ T_3$ Επιμεριστική ιδιότητα.

$(T_2 + T_3) \circ T_1 = T_2 \circ T_1 + T_3 \circ T_1$

(iii) $\lambda(T_1 \circ T_2) = (\lambda T_1) \circ T_2 = T_1 \circ (\lambda T_2)$

Απόδειξη

Η (i) έχει αποδειχθεί στην προηγούμενη παράγραφο και μάλιστα ισχύει ακόμα και αν οι T_1, T_2, T_3 δεν είναι γραμμικές.

Η γραμμικότητα των T_1, T_2 και T_3 είναι απαραίτητη για την απόδειξη των (ii) και (iii) που αφήνεται ως άσκηση. □

As θυμηθούμε τώρα τον Ορ. 4.3.7 όπου δώσαμε τον ορισμό της άλγεβρας πάνω σε κάποιο σώμα K ως προς κάποια πράξη πολλαπλασιασμού "·". Από την Πρ. 7.2.7, βλέπουμε ότι ο $\mathcal{L}(V)$ με την πράξη "∘" της σύνθεσης απεικονίσεων ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες του ορισμού, οπότε ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Πρόταση 7.2.8

Ο γραμμικός χώρος $\mathcal{L}(V)$ εφοδιασμένος με την πράξη "∘" της σύνθεσης γραμμικών τελεστών είναι μια άλγεβρα πάνω στο K.

Το μοναδιαίο στοιχείο της άλγεβρας $\mathcal{L}(V)$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση $I \in \mathcal{L}(V)$:

$$T \circ I = I \circ T = T.$$

Εφόσον η σύνθεση απεικονίσεων δεν είναι αντιμεταθετική, η άλγεβρα $\mathcal{L}(V)$ <u>δεν είναι αντιμεταθετική</u>. (commutative).

Ο $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V) = \mathrm{Hom}(V, V)$ αναφέρεται συχνά ως η <u>άλγεβρα των γραμμικών τελεστών πάνω στο V</u> (algebra of linear operators on V).

7.3 ΕΙΚΟΝΑ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ

Για χάρη της αυτονομίας της παραγράφου, επαναλαμβάνουμε τον ορισμό της εικόνας μιας γραμμικής απεικόνισης.

Ορισμός 7.3.1

Καλούμε εικόνα (image space ή range) της $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ και τη συμβολίζουμε με $\operatorname{Im} T$ το σύνολο των εικόνων όλων των $x \in V_1$:

$$\operatorname{Im} T = \{ T(x) : x \in V_1 \} \tag{1}$$

Είναι φανερό ότι $\operatorname{Im} T \subseteq V_2$. Ως γνωστό, στην περίπτωση που είναι $\operatorname{Im} T = V_2$, λέμε ότι η T είναι επί.

Πρόταση 7.3.2

Αν $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, τότε η $\operatorname{Im} T$ είναι υπόχωρος του V_2.

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες του Θ.2.2.2.

(i) Για κάθε $x \in V_1$, $T(0 \cdot x) = 0 \cdot T(x) = \mathbb{O} \Rightarrow \mathbb{O} \in \operatorname{Im}(T)$.

(ii) Αν $u, v \in \operatorname{Im} T$, τότε υπάρχουν $x, y \in V_1$ τέτοια ώστε $T(x) = u$ και $T(y) = v$. Λόγω της γραμμικότητας της T,
$u + v = T(x) + T(y) = T(x+y) \in \operatorname{Im} T$ αφού $x + y \in V_1$.
(κλειστότητα ως προς την πρόσθεση).

(iii) Αν $u \in \operatorname{Im} T$, τότε υπάρχει $x \in V_1$ τέτοιο ώστε $T(x) = u$. Για κάθε $\lambda \in K$, έχουμε
$\lambda u = \lambda T(x) = T(\lambda x) \in \operatorname{Im} T$ αφού $\lambda x \in V_1$.
(κλειστότητα ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό).

Οι τρεις συνθήκες του Θ.2.2.2 ικανοποιούνται.
Άρα η $\operatorname{Im} T$ είναι υπόχωρος του V_2. ∎

Πρόταση 7.3.3

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Αν ο χώρος V_1 είναι διαστάσεως $n \in \mathbb{N}$ με βάση την

$$A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \tag{2}$$

τότε το σύνολο

$$B = \{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)\} \tag{3}$$

παράγει τον υπόχωρο $Im(T)$.

Απόδειξη

Αν W η γραμμική θήκη του B πρέπει να δείξουμε ότι $Im(T) = W$.

Έστω $v \in Im(T)$. Τότε υπάρχει στοιχείο

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \in V_1, \quad a_i \in K$$

με την ιδιότητα

$$v = T(u) = T(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) \Rightarrow$$

$$v = a_1 T(u_1) + \dots + a_n T(u_n)$$

που σημαίνει ότι

$$Im(T) \subseteq W \tag{I}$$

Επειδή τώρα τα στοιχεία του B είναι στοιχεία του $Im(T)$, ισχύει:

$$W \subseteq Im(T) \tag{II}$$

Από τις (I) και (II) συμπεραίνουμε ότι

$$Im(T) = W \quad \blacksquare$$

Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η γραμμική απεικόνιση T καθορίζεται πλήρως από τις εικόνες των στοιχείων της βάσεως A του V_1. Έτσι για το

$$w = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n \in V_1, \quad b_i \in K \tag{4}$$

γνωρίζουμε ότι

$$T(w) = b_1 T(u_1) + b_2 T(u_2) + \dots + b_n T(u_n) \tag{5}$$

Παράδειγμα

Για τη γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ γνωρίζουμε απλώς ότι αν e_1, e_2 είναι τα στοιχεία της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^2$ ισχύουν οι:

$$T(e_1) = T(1,0) = (0,1,2) \quad \text{και}$$
$$T(e_2) = T(0,1) = (1,0,1).$$

Να βρεθεί η εικόνα στον $\mathbb{R}^3$ κάθε στοιχείου $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Λύση:

Επειδή $(x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$.

έχουμε

$$T(x_1,x_2) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2).$$
$$= x_1 (0,1,2) + x_2 (1,0,1) \Rightarrow$$
$$T(x_1,x_2) = (x_2, x_1, 2x_1 + x_2).$$

Ορισμός 7.3.4

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Το σύνολο όλων των $x \in V_1$ που απεικονίζεται μέσω της T στο $\mathbb{O} \in V_2$ ονομάζεται πυρήνας (kernel) ή μηδενικός-χώρος (null space) της T και συμβολίζεται με $Ker(T)$, δηλ.

$$Ker(T) = \{ x \in V_1 : T(x) = \mathbb{O} \} \qquad (6)$$

Παρατήρηση.

Ο πυρήνας μιας γραμμικής απεικονίσεως T δεν μπορεί να είναι το κενό σύνολο γιατί $\mathbb{O} \in Ker(T)$, αφού

$$T(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$$

Παράδειγμα 1

Για τη μηδενική απεικόνιση $O: V_1 \to V_2$, όπου

$$O(x) = \mathbb{O}, \quad x \in V_1$$

έχουμε:

$$Im(O) = \{ O(x) : x \in V_1 \} = \{ \mathbb{O} \}$$
$$Ker(O) = \{ x \in V_1 : O(x) = \mathbb{O} \} = V_1$$

Παράδειγμα 2

Για την ταυτοτική απεικόνιση $I: V_1 \to V_1$,

$$I(x) = x \,, \quad x \in V_1$$

έχουμε:

$$\mathrm{Im}(I) = \{ I(x) : x \in V_1 \} = \{ x \in V_1 \} = V_1$$

$$\mathrm{Ker}(I) = \{ x \in V_1 : I(x) = \mathbb{0} \} = \{ \mathbb{0} \}$$

Παράδειγμα 3

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$T((x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, x_1)$$

Έχουμε για τον πυρήνα της T:

$$\mathrm{Ker}(T) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : T((x_1, x_2)) = \mathbb{0} \}$$

Αν $(x_1 - x_2, x_1) = \mathbb{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$. Άρα $\mathrm{Ker}(T) = \{ \mathbb{0} \}$.

Πρόταση 7.3.5

Ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(T)$ μιας γραμμικής απεικόνισης $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι υπόχωρος του V_1.

Απόδειξη.

(α) Επειδή $T(\mathbb{0}) = \mathbb{0} \Rightarrow \mathbb{0} \in \mathrm{Ker}(T)$.

(β) Έστω ότι $x, y \in \mathrm{Ker}(T)$ οπότε $T(x) = T(y) = \mathbb{0}$.

Έχουμε

$$T(x) + T(y) = \mathbb{0} \Rightarrow T(x+y) = \mathbb{0} \Rightarrow x + y \in \mathrm{Ker}(T).$$

(κλειστότητα ως προς την πρόσθεση).

(γ) Έστω ότι $x \in \mathrm{Ker}(T)$ οπότε $T(x) = \mathbb{0}$. Για $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$T(x) = \mathbb{0} \Rightarrow \lambda T(x) = \lambda \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0} \Rightarrow T(\lambda x) = \mathbb{0} \Rightarrow$$

$\lambda x \in \mathrm{Ker}(T)$ (κλειστότητα ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό). Οι τρεις συνθήκες του Θ. 2.2.2 ικανοποιούνται. Άρα ο $\mathrm{Ker}(T)$ είναι υπόχωρος του V_1. ■

Θα δούμε τώρα πότε ο πυρήνας $Ker(T)$ είναι ο μηδενικός υπόχωρος $\{\mathbb{O}\}$ του V_1.

Θεώρημα 7.3.6

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Ισχύει

$$Ker(T) = \{\mathbb{O}\} \tag{7}$$

αν και μόνο αν η T είναι αμφιμονοσήμαντη.

Απόδειξη

Υπενθυμίζουμε ότι η T είναι αμφιμονοσήμαντη όταν και μόνο όταν ισχύει η συνεπαγωγή:

$$T(x) = T(y) \Longrightarrow x = y, \quad x, y \in V_1 \tag{I}$$

Αν είναι $Ker(T) = \{\mathbb{O}\}$ και $T(x) = T(y)$, τότε λόγω της γραμμικότητας της T έχουμε:

$$T(x) - T(y) = \mathbb{O} \Longrightarrow T(x-y) = \mathbb{O}. \text{ Άρα } x - y \in Ker(T) = \{\mathbb{O}\}$$

$\Longrightarrow x - y = \mathbb{O}$, δηλ. $x = y$. Άρα η T είναι αμφιμονοσήμαντη.

Αντίστροφα, αν η T είναι αμφιμονοσήμαντη και

$$T(x) = \mathbb{O}, \quad x \in V_1,$$

τότε αφού

$$T(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$$

έχουμε $T(x) = T(\mathbb{O}) \Longrightarrow x = \mathbb{O}$, δηλ. $Ker(T) = \{\mathbb{O}\}$. ∎

Με τη βοήθεια της παρακάτω πρότασης, μπορούμε με κατάλληλες προϋποθέσεις να βρίσκουμε αμέσως μια βάση του υπόχωρου $Im(T)$.

Πρόταση 7.3.7

Αν η γραμμική απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και ο χώρος V_1 είναι πεπερασμένης διαστάσεως $n \in \mathbb{N}$, με βάση το σύνολο

$$A = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

τότε το σύνολο

$$B = \{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$$

είναι μια βάση του υπόχωρου $Im(T)$.

Απόδειξη

Από την Πρ. 7.3.3 γνωρίζουμε ότι το σύνολο B παράγει το χώρο $Im(T)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι τα στοιχεία του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αν ισχύει η

$$\lambda_1 T(u_1)+\lambda_2 T(u_2)+\cdots+\lambda_n T(u_n)=\mathbb{O}$$

τότε επειδή η T είναι γραμμική έχουμε:

$$T(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_n u_n)=\mathbb{O}$$

Άρα

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_n u_n \in Ker(T).$$

Αφού όμως η T είναι αμφιμονοσήμαντη, σύμφωνα με το Θ. 7.3.6 $Ker(T)=\{\mathbb{O}\}$, άρα

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_n u_n=\mathbb{O}.$$

Επειδή όμως τα στοιχεία της βάσης A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0.$$

Έτσι, τα στοιχεία του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. ■

Είδαμε προηγουμένως ότι για κάθε γραμμική απεικόνιση $T\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$ έχουμε:

$$Im(T) \text{ υπόχωρος του } V_2 \qquad (8)$$

και

$$Ker(T) \text{ υπόχωρος του } V_1 \qquad (9)$$

Στην περίπτωση που ο V_1 είναι πεπερασμένης διαστάσεως υπάρχει τύπος που συνδέει τη διάσταση αυτή με τις διαστάσεις των $Im(T)$ και $Ker(T)$. Το θεώρημα που ακολουθεί κατέχει σπουδαία θέση στη θεωρία της Γραμμικής Άλγεβρας.

Θεώρημα 7.3.8 (Θεώρημα τάξης και μηδενικότητας).
Εστω η γραμμική απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ όπου ο χώρος V_1 είναι πεπερασμένης διαστάσεως $n \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύει

$$n = \dim V_1 = \dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) \tag{10}$$

Απόδειξη

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$

Τότε $\dim \operatorname{Ker}(T) = 0$,

και η T είναι αμφιμονοσήμαντη. Σύμφωνα με την Πρ. 7.3.7 αν το σύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ είναι μια βάση του V_1, τότε το $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$ είναι μια βάση του $\operatorname{Im}(T)$. Άρα

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \dim(V_1) = n$$

και η (10) ισχύει.

(β) $\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\}$.

Θέτουμε

$$m = \dim \operatorname{Ker}(T) \tag{I}$$

και επειδή $\operatorname{Ker}(T) \subseteq V_1$ έχουμε:

$$0 < m \leq n \tag{II}$$

Αν $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ είναι μια βάση του $\operatorname{Ker}(T)$, τότε αυτή μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του V_1 (Θ. 3.3.6). Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το σύνολο

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n\} \tag{III}$$

είναι μια βάση του V_1. Για να αποδείξουμε την (10), αρκεί να δείξουμε ότι το παρακάτω υποσύνολο του V_2

$$\{T(u_{m+1}), \ldots, T(u_n)\} \tag{IV}$$

που περιέχει $n-m$ στοιχεία είναι μια βάση του $\operatorname{Im}(T)$.

Δείχνουμε πρώτα ότι τα στοιχεία του συνόλου (IV) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αν είναι

$$\lambda_1 T(u_{m+1}) + \lambda_2 T(u_{m+2}) + \cdots + \lambda_{n-m} T(u_n) = \mathbb{O},$$

τότε λόγω της γραμμικότητας της T θα είναι

$$T(\lambda_1 u_{m+1} + \lambda_2 u_{m+2} + \cdots + \lambda_{n-m} u_n) = \mathbb{O}$$

οπότε το

$$\lambda_1 u_{m+1} + \lambda_2 u_{m+2} + \cdots + \lambda_{n-m} u_n \in Ker(T)$$

και άρα θα γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του συνόλου $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ που είναι βάση του $Ker(T)$:

$$\lambda_1 u_{m+1} + \lambda_2 u_{m+2} + \cdots + \lambda_{n-m} u_n = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_m u_m$$

$\Longrightarrow$

$$-\mu_1 u_1 - \mu_2 u_2 - \cdots - \mu_m u_m + \lambda_1 u_{m+1} + \lambda_2 u_{m+2} + \cdots + \lambda_{n-m} u_n = \mathbb{O}$$

Επειδή τα στοιχεία του συνόλου (III) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (αφού αποτελούν μια βάση του V_1), η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο όταν

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_m = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-m} = 0.$$

Άρα τα στοιχεία του συνόλου (IV) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Θα δείξουμε τώρα ότι το σύνολο (IV) παράγει τον υπόχωρο $Im(T)$. Επειδή το σύνολο (III) είναι μια βάση του V_1, σύμφωνα με την Πρ. 7.3.3, το σύνολο

$$\{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_m), T(u_{m+1}), \dots, T(u_n)\} \quad \text{(V)}$$

παράγει τον υπόχωρο $Im(T)$. Αφού όμως τα $u_1, u_2, \dots, u_m$ ανήκουν στον πυρήνα της T, έχουμε.

$$T(u_1) = T(u_2) = \cdots = T(u_m) = \mathbb{O}$$

και άρα τα σύνολα (IV) και (V) παράγουν τον ίδιο χώρο, δηλ. το σύνολο (IV) παράγει τον υπόχωρο $Im(T)$.

Έτσι δείξαμε ότι το σύνολο

$$\{T(u_{m+1}), \dots, T(u_n)\}$$

είναι μια βάση του $Im(T)$, άρα

$$\dim Im(T) = n - m = n - \dim Ker(T)$$

και άρα ισχύει η (10). ∎

Παράδειγμα

Εστω η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με
$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, \; x_2 + x_3).$$
(α) Να δειχθεί ότι η T είναι γραμμική
(β) Να βρεθεί ο Ker(T) και η dim Ker(T).
(γ) Να βρεθεί η dim Im(T).
(δ) Με τι ισούται ο Im(T);

(α) Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ έχουμε:
$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= T(\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3)) \\ &= T(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1 - \lambda x_3 - \mu y_3, \; \lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3) \\ &= \lambda(x_1 - x_3, \; x_2 + x_3) + \mu(y_1 - y_3, y_2 + y_3) \Longrightarrow \end{aligned}$$
$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$
Σύμφωνα με την Πρ. 7.2.2 η T είναι γραμμική.

(β) Ο Ker(T) αποτελείται από όλα τα $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα
$$T(x) = \mathbb{O},$$
δηλ.
$$(x_1 - x_3, \; x_2 + x_3) = (0, 0) \quad \text{ή} \quad \left.\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Επιλύοντας το τελευταίο σύστημα ως προς x_1 και x_2, βρίσκουμε
$$x_1 = x_3$$
$$x_2 = -x_3$$
οπότε $x = (x_3, -x_3, x_3) = x_3(1, -1, 1)$

Αρα ο Ker(T) είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ με σύνολο γεννητόρων το $\{(1, -1, 1)\}$.
Εχουμε προφανώς $\dim Ker(T) = 1$.

(γ) Από την (10) έχουμε
$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim Ker(T) + \dim Im(T) \Longrightarrow$$
$$3 = 1 + \dim Im(T) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \dim Im(T) = 3-1 = 2.$

(δ) Επειδή η $Im T$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ και

$$\dim Im T = 2$$

συμπεραίνουμε ότι $Im T = \mathbb{R}^2$. Άρα η T είναι επί.

Δίνουμε τώρα μερικούς συμπληρωματικούς ορισμούς. Έστω η γραμμική απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ όπου οι οι V_1, V_2 είναι πεπερασμενοδιάστατοι. Οι $Ker T$ και $Im T$ είναι επίσης πεπερασμενοδιάστατοι, ως υπόχωροι των V_1 και V_2, αντίστοιχα.

Η διάσταση της εικόνας $Im(T)$ καλείται τάξη ή βαθμός (rank) της T και συμβολίζεται με rank(T):

$$\boxed{\text{rank}(T) = \dim Im T} \tag{11}$$

Η διάσταση του πυρήνα $Ker(T)$ καλείται μηδενικότητα (nullity) της T και συμβολίζεται με nullity(T):

$$\boxed{\text{nullity}(T) = \dim Ker T} \tag{12}$$

Οι ανωτέρω ορισμοί επεξηγούν το όνομα του Θεωρήματος τάξης και μηδενικότητας. Μια εναλλακτική μορφή της (10) είναι:

$$\boxed{n = \dim V_1 = \text{rank}(T) + \text{nullity}(T)} \tag{13}$$

Σημείωση: Σε μερικά βιβλία, η μηδενικότητα αναφέρεται ως έλλειμμα (deficit) και συμβολίζεται με def(T).

7.4 Η ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ $f(X)=AX$

Είδαμε προηγουμένως ότι η απεικόνιση $f: M_{n\times1} \to M_{m\times1}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$f(X)=AX, \quad X\in M_{n\times1}, \tag{1}$$

όπου $A\in M_{m\times n}$ σταθερός πίνακας, είναι γραμμική (Παράδειγμα 5, σελ. 7.24). Αντί της $f: M_{n\times1} \longrightarrow M_{m\times1}$ μπορούμε ισοδύναμα να γράφουμε

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Έχουμε δηλ. μια γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$.

Ο πυρήνας της f είναι το σύνολο

$$\operatorname{Ker}(f)=\{X\in\mathbb{R}^n : AX=0\}, \tag{2}$$

ενώ η εικόνα της f είναι το σύνολο

$$\operatorname{Im}(f)=\{y=AX\in\mathbb{R}^m : X\in\mathbb{R}^n\} \tag{3}$$

Ορισμός 7.4.1

(α) Καλούμε μηδενικό χώρο (null space) ή πυρήνα (kernel) του $m\times n$ πίνακα A και τον συμβολίζουμε με $N(A)$ το σύνολο

$$N(A)=\operatorname{Ker}(f)=\{X\in\mathbb{R}^n : AX=0\} \tag{4}$$

(β) Καλούμε εικόνα (image) του $m\times n$ πίνακα A, το σύνολο

$$R(A)=\operatorname{Im}(f)=\{y=AX\in\mathbb{R}^m : X\in\mathbb{R}^n\} \tag{5}$$

Είναι φανερό ότι ο πυρήνας $N(A)$ του A είναι το σύνολο των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος

$$AX=0 \tag{6}$$

Από τη θεωρία των προηγούμενων παραγράφων συναγάγουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα.

(1) Ο πυρήνας $N(A)$ του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ (Πρ. 7.3.5):

(7)

(2) Η εικόνα $R(A)$ ενός $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ (Πρ. 7.3.2):

(8)

(3) Θεωρούμε τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$:

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \tag{9}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 7.3.3, το σύνολο

$$B = \{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\} \tag{10}$$

παράγει την εικόνα $R(A)$ του A.

Ομως

$$f(e_i) = A e_i = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1i} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2i} \cdots a_{2n} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mi} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$f(e_i) = C_i(A), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

όπου $C_i(A)$ είναι οι στήλες του A. Συνεπώς, το σύνολο

$$B = \{C_1(A), C_2(A), \ldots, C_n(A)\} \tag{12}$$

παράγει την εικόνα $R(A)$ του A. Με διαφορετικά λόγια, η εικόνα $R(A)$ του A είναι ο γραμμικός χώρος στηλών του A που ορίσαμε στην παράγραφο 5.5:

$$R(A) = V_c(A) \tag{13}$$

Στην ίδια παράγραφο ορίσαμε επίσης το βαθμό πίνακα ως τη κοινή διάσταση των γραμμικών χώρων γραμμών και στηλών του A. Άρα

$$\mathrm{rank}(A) = \dim V_c(A) = \dim R(A) \tag{14}$$

Έχουμε έτσι ένα εναλλακτικό ορισμό για τον βαθμό πίνακα.

<u>Ορισμός 7.4.2</u>

Εστω A ένας mxn πίνακας και N(A) και R(A) ο πυρήνας του και η εικόνα του αντίστοιχα.

(α) Καλούμε <u>βαθμό</u> (rank) του A και τον συμβολίζουμε με rank(A) τη διάσταση της εικόνας R(A) του A:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim R(A) \tag{15}$$

(β) Καλούμε <u>μηδενικότητα</u> (nullity) του A και τη συμβολίζουμε με nullity(A), τη διάσταση του πυρήνα N(A) του A:

$$\mathrm{nullity}(A) = \dim N(A) \tag{16}$$

---

14) Από το θεώρημα τάξης και μηδενικότητας (Θ. 7.3.8) έχουμε για την απεικόνιση f:

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow$$

$$n = \dim N(A) + \dim R(A) \Longrightarrow$$

$$\boxed{n = \mathrm{nullity}(A) + \mathrm{rank}(A)} \tag{17}$$

Θεώρημα 7.4.3

Εστω ο $m \times n$ πίνακας A. Οι λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος

$$AX = 0 \tag{18}$$

αποτελούν ένα διανυσματικό χώρο με διάσταση

$$\mathrm{nullity}(A) = n - \mathrm{rank}(A). \tag{19}$$

Απόδειξη

Είναι προφανής από τα προηγούμενα: Το σύνολο των λύσεων του γραμμικού συστήματος (18) είναι εξ ορισμού ο πυρήνας $N(A)$ του A, ο οποίος είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Από την (17) έχουμε:

$$\dim N(A) = \mathrm{nullity}(A) = n - \mathrm{rank}(A). \qquad \blacksquare$$

Παρατήρηση.

(α) Αν

$$n = \mathrm{rank}(A), \tag{20}$$

τότε

$$\mathrm{nullity}(A) = 0,$$

οπότε

$$N(A) = \{\mathbb{O}\}.$$

Η τετριμμένη λύση είναι η μοναδική λύση του $AX=0$.

(β) Το σύστημα $AX = 0$ έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν

$$n > \mathrm{rank}(A) \tag{21}$$

Παράδειγμα 1

Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθεί ο rank(A)

(β) Να βρεθεί η nullity(A)

(γ) Να βρεθεί μια βάση του N(A).

(α) Ο ανηγμένος κλιμακωτός του A είναι ο

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(βλ. παράδειγμα της σ. 5.82).

Ο R έχει 3 μη μηδενικές γραμμές $\Rightarrow$

$$\operatorname{rank}(A) = 3$$

(β) $\operatorname{nullity}(A) = n - \operatorname{rank}(A) = 5 - 3 = 2$

(n είναι ο αριθμός των στηλών του A).

(γ) Γνωρίζουμε ότι:

$$N(A) = \{ X \in \mathbb{R}^5 : AX = 0 \}$$

Το γραμμικό σύστημα

$$AX = 0$$

είναι ισοδύναμο με το

$$RX = 0 \implies$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ x_2 - 2x_3 \qquad &= 0 \\ x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Εχουμε άπειρες το πλήθος λύσεις με 2 ελεύθερες μεταβλητές.

Θέτοντας $x_3 = \lambda$ και $x_5 = \mu$ έχουμε τη γενική λύση:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\lambda \\ \lambda \\ -3\mu \\ \mu \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Τα διανύσματα $[0\ 2\ 1\ 0\ 0]^T$ και $[0\ 0\ 0\ -3\ 1]^T$ αποτελούν μια βάση του $N(A)$

<u>Παρατήρηση</u>

Ο αριθμός των ελεύθερων μεταβλητών στη γενική λύση του ομογενούς γραμμικού συστήματος $AX=0$, είναι ίσος με τη nullity(A).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 7

1. Έστω $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση

$$F(x, y) = (2x, 2y).$$

Περιγράψτε την εικόνα των σημείων που ανήκουν στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ μέσω της F.

2. Έστω $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{4}\right).$$

Ποια είναι η εικόνα της έλλειψης

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

μέσω της F;

3. Έστω η απεικόνιση $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$F(x, y, z) = (x + 2y - 4z,\ 2x + 3y + z,\ x + z).$$

(α) Να δειχθεί ότι η F είναι αμφιμονοσήμαντη.
(β) Να δειχθεί ότι η F είναι επί.
(γ) Να βρεθεί η $F^{-1}(3, 4, 5)$.

4. Έστω οι απεικονίσεις $F : A \longrightarrow B$ και $G : B \longrightarrow C$. Να δειχθούν οι προτάσεις:
(α) Αν η $G \circ F$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε και η F είναι αμφιμονοσήμαντη.
(α) Αν η $G \circ F$ είναι επί, τότε και η G είναι επί.

5. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x - 3$.
(α) Να δειχθεί ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.
(β) Να βρεθεί η f^{-1}.

6. Δείξτε ότι οι παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές:
(α) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ 2x_1)$.
(β) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ 3x_2)$.
(γ) $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + 2x_3 - x_4,\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4)$.
(δ) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_2,\ x_2 + x_3)$.

7. Δείξτε ότι οι παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές:
(α) $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $T(A) = trA$.
(β) $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathcal{M}_{3\times 3}$ με

$$T\left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{21} \end{bmatrix}$$

8. Δείξτε ότι η απεικόνιση $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $T(A) = \det(A)$ <u>δεν είναι</u> γραμμική.

9. Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Αν είναι $T(1, 0) = (1, 1, 0)$ και $T(0, 1) = (1, -1, 3)$, να βρεθεί ο τύπος της T.

10. Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Αν είναι $T(1, 1, 0) = (3, 2, 1)$, $T(1, 0, 1) = (2, 1, 1)$ και $T(0, 1, 1) = (3, 1, 2)$, να βρεθεί ο τύπος της T ως προς τη βάση

$$\{e_1 = (1, 1, 0),\ e_2 = (1, 0, 1),\ e_3 = (0, 1, 1)\}$$

του $\mathbb{R}^3$.

11. Έστω ο τελεστής $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_2,\ x_2 + x_3).$$

(α) Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός.
(β) Να βρεθούν ο $Ker(T)$ και η $dimKer(T)$.
(γ) Να βρεθεί μια βάση του $Ker(T)$.
(δ) Να βρεθεί η $dimIm(T)$.

12. Έστω ο τελεστής $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ -2x_1 + x_2 + x_3).$$

(α) Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός.
(β) Να βρεθεί μια βάση του $Ker(T)$.
(γ) Να βρεθεί μια βάση της $Im(T)$.

13. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθεί ο $rank(A)$.
(β) Να βρεθεί η $nullity(A)$.
(γ) Να βρεθεί μια βάση του $N(A)$.

14. Να επαναληφθεί η άσκηση 13 όταν
(i)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

(iii)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

15. Έστω ο $m \times n$ πίνακας A.
(α) Δείξτε ότι ο πυρήνας $N(A)$ του A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
(α) Δείξτε ότι η εικόνα $R(A)$ του A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.
Σημείωση: Να μην χρησιμοποιηθούν οι Προτάσεις 7.3.5 και 7.3.2.

9 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

9.1 ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

Ορισμός 9.1.1

Έστω ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$. Ο αριθμός $\lambda \in K$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) ή **χαρακτηριστική τιμή** του T αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $u \in V$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$T(u) = \lambda\, u\,. \tag{1}$$

Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα που ικανοποιεί την (1) ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) ή **χαρακτηριστικό διάνυσμα** του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $T \in \mathcal{L}(V)$, αν υπάρχουν, ονομάζονται **χαρακτηριστικά μεγέθη** ή **ιδιοποσά** του T.

Παρατήρηση

Αν το $u \in V$, $u \neq \mathbf{0}$, είναι ιδιοδιάνυσμα του $T \in \mathcal{L}(V)$, τότε η εικόνα του u μέσω του T ανήκει στη γραμμική του θήκη,

$$T(u) \in [u]\,. \tag{2}$$

Έστω, για παράδειγμα, ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathbf{R}^2$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(x_1, x_2) \;=\; (2x_2,\, 3x_1 - x_2)\,.$$

Για τα στοιχεία u_1=(1,1) και u_2=(-2,3) έχουμε:

$$T(u_1) = T(1,1) = (2,2) = 2\,(1,1) = 2u_1$$

και

$$T(u_2) = T(-2,3) = (6,-9) = -3\,(-2,3) = -3u_2\,.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 9.1.1, οι αριθμοί λ_1=2 και λ_2=-3 είναι ιδιοτιμές του T. Τα διανύσματα u_1=(1,1) και u_2=(-2,3) είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Από τις ισότητες

$$T(u_1) = 2u_1 \quad \text{και} \quad T(u_2) = -3u_2\,,$$

βλέπουμε ότι ο τελεστής T άφησε αμετάβλητες τις κατευθύνσεις των στοιχείων u_1 και u_2 (το $T(u_1)$ ειναι συγγραμμικό με το u_1 ενώ το $T(u_2)$ ειναι συγγραμμικό με το u_2) και επομένως και τις γραμμικές τους θήχες, δηλαδή

$$T([u_1]) = [u_1] \quad \text{και} \quad T([u_2]) = [u_2]\,.$$

Ο προσδιορισμός των υπόχωρων ενός γραμμικού χώρου V οι οποίοι παραμένουν αμετάβλητοι κατά την εφαρμογή του γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$, αποτελεί αντικείμενο μιας υποπεριοχής της Γραμμικής Άλγεβρας που ονομάζεται **Φασματική Ανάλυση**. Στη γενική περίπτωση, το πρόβλημα που μελετά κανείς είναι η εύρεση των $u \in V$ που ικανοποιούν τη (2).

Ορισμός 9.1.2

Το σύνολο E_λ των διανυσμάτων $u \in V$ που ικανοποιούν την (1) για μια δοσμένη ιδιοτιμή λ του γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$,

$$E_\lambda = \{u \in V \;:\; T(u) = \lambda u\}\,, \tag{3}$$

καλείται **ιδιόχωρος** (eigenspace) του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Σημείωση: Είναι φανερό ότι ο ιδιόχωρος E_λ αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ και το μηδενικό διάνυσμα.

Πρόταση 9.1.3

Ο ιδιόχωρος E_λ του $T \in \mathcal{L}(V)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του T είναι υπόχωρος του V.

Απόδειξη

Αφήνεται ως άσκηση. □

Παραδείγματα

1. Έστω ο ταυτοτικός τελεστής $I \in \mathcal{L}(V)$. Για κάθε $u \in V$ ισχύει

$$I(u) = u = 1\,u\,.$$

Συμπεραίνουμε ότι ο λ=1 είναι ιδιοτιμή του I και ο ιδιόχωρος E_1 ταυτίζεται με το γραμμικό χώρο V. Είναι επίσης φανερό ότι κάθε διάνυσμα $u \in V - \{0\}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του I που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.

2. Έστω ο διαφορικός τελεστής $D \equiv \frac{d}{dx} \in \mathcal{L}(C^\infty)$, όπου C^∞ ο χώρος των απείρως παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επειδή

$$D(e^{\lambda x}) = \lambda\, e^{\lambda x}\,,$$

συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\lambda \in K$ είναι ιδιοτιμή του D και η συνάρτηση $e^{\lambda x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

3. Έστω ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$. Αν v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε και το διάνυσμα av, όπου $a \in K$ και $a \neq 0$, είναι ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στην λ. Πραγματικά,

$$T(av) = a\,T(v) = a\,\lambda v = \lambda\,(av)\,.$$

Η σχέση (1) είναι ισοδύναμη με την

$$(T - \lambda I)\,(u) = \mathbf{0}\,, \tag{4}$$

όπου I ο ταυτοτικός τελεστής $I \in \mathcal{L}(V)$. Κάθε διάνυσμα $u \in V$ που ικανοποιεί την (4) ανήκει στον πυρήνα του γραμμικού τελεστή $T - \lambda I$ και επομένως το $u \in V$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ αν

$$u \neq \mathbf{0} \quad \text{και} \quad u \in Ker(T - \lambda I)\,.$$

Έτσι, το $\lambda \in K$ είναι ιδιοτιμή του T όταν

$$Ker(T - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}\,,$$

δηλαδή όταν ο $T - \lambda I$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντος τελεστής. Η πρόταση που ακολουθεί μας λέει ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 9.1.4
Έστω ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$. Ο $\lambda \in K$ είναι ιδιοτιμή του T όταν και μόνο όταν ο $T - \lambda I$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντος.

Απόδειξη
Αφήνεται ως άσκηση. □

Ορισμός 9.1.5
Το σύνολο $\sigma(T)$ των ιδιοτιμών του γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$,

$$\sigma(T) = \{\lambda \in K \,:\, Ker(T - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}\}\,, \tag{5}$$

ονομάζεται *φάσμα* (spectrum) του T.

Πόρισμα 9.1.6
Ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι αμφιμονοσήματος όταν και μόνο όταν το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του T.

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 9.1.7
Έστω ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές του T και για κάθε i το X_i είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, τότε τα διανύσματα $X_1, X_2, \cdots, X_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη
Χρησιμοποιούμε την αρχή της τέλειας επαγωγής. Για $n=1$, το θεώρημα ισχύει, αφού ένα ιδιοδιάνυσμα X_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1, είναι εξ ορισμού μη μηδενικό.
Υποθέτουμε τώρα ότι το θεώρημα ισχύει για $n=k$. Θα δείξουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα X_1, X_2, $\cdots$, X_{k+1} που αντιστοιχούν στις διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_{k+1} είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Έστω λοιπόν ότι

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_{k+1}X_{k+1} = 0\,, \quad a_i \in K,\ i = 1, 2, \cdots, k+1\,. \qquad (i)$$

Εφαρμόζουμε το γραμμικό τελεστή T στα δύο μέλη της (i) και έχουμε διαδοχικά:

$$T(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_{k+1}X_{k+1}) = T(0) = 0 \Rightarrow$$

$$a_1\,T(X_1) + a_2\,T(X_2) + \cdots + a_{k+1}\,T(X_{k+1}) = 0 \Rightarrow$$

$$a_1\,\lambda_1X_1 + a_2\,\lambda_2X_2 + \cdots + a_{k+1}\,\lambda_{k+1}X_{k+1} = 0\,. \qquad (ii)$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (i) με λ_{k+1} έχουμε

$$a_1\,\lambda_{k+1}X_1 + a_2\,\lambda_{k+1}X_2 + \cdots + a_{k+1}\,\lambda_{k+1}X_{k+1} = 0\,. \qquad (iii)$$

Αφαιρώντας την (iii) από τη (ii) βρίσκουμε ότι

$$a_1\,(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\,X_1 + a_2\,(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\,X_2 + \cdots + a_k\,(\lambda_k - \lambda_{k+1})\,X_k = 0\,.$$

Επειδή τα ιδιοδιανύσματα X_1, X_2, $\cdots$, X_k είναι γραμμικώς ανεξάρτητα,

$$a_i\,(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0\,, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

και επειδή

$$\lambda_i \neq \lambda_{k+1}\,, \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad \Rightarrow$$

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0\,. \qquad (iv)$$

Από την (i) παίρνουμε τότε

$$a_{k+1}\,X_{k+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{k+1} = 0\,,$$

αφού το X_{k+1} είναι εξ ορισμού μη μηδενικό. Άρα τα X_1, X_2, $\cdots$, X_{k+1} είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έτσι το θεώρημα αποδείχθηκε. □

Πόρισμα 9.1.8
Αν $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου $dimV{=}n \in \mathrm{N}$, και ο T έχει n διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές, τότε υπάρχει μια βάση του V που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T.

Σημείωση: Όπως θα δούμε στη συνέχεια, δεν είναι απαραίτητο ο $T \in \mathcal{L}(V)$ να έχει n διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές για να έχει ο V μια βάση από ιδιοδιανύσματα του T.

Παράδειγμα

Έστω ο διαφορικός τελεστής $D \in \mathcal{L}(C^{\infty})$ και $a_1, a_2, \cdots, a_m \in K$ διακεκριμένοι αριθμοί. Οι συναρτήσεις

$$e^{a_1 x}, \cdots, e^{a_m x}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του D, που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $a_1, a_2, \cdots, a_m$, και συνεπώς είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Έστω τώρα ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου ο V είναι πεπερασμένης διάστασης $dim V = n \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με τη θεωρία του Κεφαλαίου 7, για μια δοσμένη βάση του V, στον T αντιστοιχεί ένας μονοσήμαντα ορισμένος πίνακας $A \in M_{n\times n}$, έτσι ώστε η

$$T(u) = v\,, \quad u, v \in V\,,$$

να είναι ισοδύναμη με τη

$$A\,X_u = Y_v\,,$$

όπου $X_u, Y_v \in K^n$ τα διανύσματα στήλης των u και v ως προς τη δοσμένη βάση του V. Λόγω της αλγεβρικής ισομορφίας των γραμμικών χώρων $\mathcal{L}(V)$ και $M_{n\times n}$, στις επόμενες παραγράφους θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην εύρεση και τη μελέτη των χαρακτηριστικών μεγεθών ενός τετραγωνικού πίνακα.

Παράδειγμα

Έστω ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathbf{R}^2$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2,\, 3x_1 + 2x_2)\,.$$

Θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του T.

Αν λ μια ιδιοτιμή του T, τότε εξ ορισμού ισχύει

$$T(x_1, x_2) = \lambda\,(x_1,\, x_2)\,.$$

Από την πιο πάνω σχέση και τον τύπο του T, βρίσκουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + 2\,x_2 &= \lambda\,x_1 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 &= \lambda\,x_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rl} (1-\lambda)\,x_1 + \quad 2\,x_2 &= 0 \\ 3\,x_1 + (2-\lambda)\,x_2 &= 0 \end{array}\right\}. \qquad (i)$$

Το σύστημα (i) πρέπει να έχει μη τετριμμένη λύση αφού εξ ορισμού τα ιδιοδιανύσματα είναι μη μηδενικά. Άρα

$$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \qquad (ii)$$

$$(1-\lambda)\,(2-\lambda) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-4)\,(\lambda+1) = 0\,.$$

Ο T έχει λοιπόν δύο ιδιοτιμές, τις $\lambda_1=4$ και $\lambda_2=-1$.

Ας βρούμε τώρα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Για $\lambda_1=4$, το σύστημα (i) γίνεται

$$\left.\begin{array}{rl} -3\,x_1 + 2\,x_2 &= 0 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 &= 0 \end{array}\right\}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη λ_1 είναι της μορφής

$$X_1 = a\,(2,\,3)\,, \qquad a \in \mathbf{R},\ a \neq 0$$

και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος ειναι ο

$$E_{\lambda_1} = \{u \in \mathbf{R}^2 \,:\, u = a\,(2,\,3),\quad a \in \mathbf{R}\,\}\,.$$

Για λ_2=-1, το σύστημα (i) γίνεται

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\,x_1 + \ 2\,x_2 & = & 0 \\ 3\,x_1 + \ 3\,x_2 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη λ_2 είναι της μορφής

$$X_2 = a\,(1,\,1)\,, \qquad a \in \mathbf{R},\ a \neq 0$$

και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος ειναι ο

$$E_{\lambda_2} = \{u \in \mathbf{R}^2 \,:\, u = a\,(1,\,1),\quad a \in \mathbf{R}\,\}\,.$$

Ας βρούμε τώρα τον πίνακα A του T ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbf{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η (ii) είναι ισοδύναμη με τη

$$det(A - \lambda I) = 0\,. \qquad (iii)$$

Η (iii) μας λέει ότι θα μπορούσαμε να εργαστούμε απευθείας με τον πίνακα A προκειμένου να βρούμε τα **ιδιοποσά** (δηλ. τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα) του T. Με αυτό τον τρόπο η εύρεση των χαρακτηριστικών μεγεθών του T απλοποιείται αρκετά.

9.2 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Θα λέμε ότι ο αριθμός $\lambda \in K$ (όπου K=R ή C) είναι μια ιδιοτιμή (eigenvalue) ή χαρακτηριστική τιμή του A όταν ισχύει

$$AX = \lambda X \,, \tag{1}$$

όπου $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbf{R}^n$. Κάθε διάνυσμα $X \neq \mathbf{0}$ για το οποίο ισχύει η (1) λέμε ότι είναι ένα **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) ή **χαρακτηριστικό διάνυσμα** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Για να βρούμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε ο αριθμός λ να είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, γράφουμε την (1) στη μορφή:

$$(A - \lambda I)\, X = 0 \tag{2}$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας.

Η εξίσωση (2) παριστάνει ένα γραμμικό ομογενές σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, τις συνιστώσες του διανύσματος X, και καλείται **χαρακτηριστικό σύστημα** του A. Ο πίνακας $(A - \lambda I)$ λέγεται **χαρακτηριστικός πίνακας** του A.

Ως γνωστό, το σύστημα (2) έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν

$$det(A - \lambda I) \;=\; 0\,. \tag{3}$$

Η ορίζουσα $det(A - \lambda I)$ είναι ένα πολυώνυμο του λ βαθμού n και καλείται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A. Η εξίσωση (3) καλείται **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A.

Έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 9.2.1
Έστω ο $n \times n$ πίνακας A. Ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του A όταν ισχύει

$$det(A - \lambda I) \;=\; \begin{vmatrix} a_{11-\lambda} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \cdots & a_{nn-\lambda} \end{vmatrix} \;=\; 0\,. \tag{4}$$

Απόδειξη
Είναι προφανής από τα πιο πάνω. □

Θεώρημα 9.2.2
Ένας $n \times n$ πίνακας A έχει ακριβώς n ιδιοτιμές (λαμβάνοντας υπόψη την πολλαπλότητά τους).

Απόδειξη

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4). Η $det(A-\lambda I)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n. Σύμφωνα με το *Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας*, η $det(A-\lambda I)$ έχει ακριβώς n ρίζες. Άρα ο πίνακας A έχει ακριβώς n ιδιοτιμές. □

Παρατήρηση

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ οι ιδιοτιμές ενός $n \times n$ πίνακα A. Αν υπάρχουν $k \leq n$ ιδιοτιμές ίσες με λ_1 τότε λέμε ότι η ιδιοτιμή λ_1 έχει **αλγεβρική πολλαπλότητα** (algebraic multiplicity) ίση με k, συμβολικά:

$$\pi(\lambda_1) = k \tag{5}$$

Έτσι, αν η λ_1 είναι **απλή** ιδιοτιμή έχουμε $\pi(\lambda_1) = 1$, ενώ αν η λ_1 είναι τριπλή ιδιοτιμή, έχουμε $\pi(\lambda_1) = 3$.

Παράδειγμα 1

Έστω ο 2×2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$|A-\lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda)+2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-2)(\lambda-3) = 0\,.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 2$ με $\pi(\lambda_1) = 1$ και $\lambda_2 = 3$ με $\pi(\lambda_2) = 1$. (Οι δύο ιδιοτιμές είναι απλές.)

Παράδειγμα 2

Έστω ο 3×3 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$. Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$|A-\lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 3 \\ 2+\lambda & -2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -(\lambda+2)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda+2)^2(\lambda-4-3+3) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\lambda+2)^2(\lambda-4) = 0\,.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = -2$ με $\pi(\lambda_1) = 2$ (διπλή ιδιοτιμή) και $\lambda_2 = 4$ με $\pi(\lambda_2) = 1$ (απλή ιδιοτιμή).

Παράδειγμα 3
Έστω ο άνω τριγωνικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda) = 0\,.$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 2$ με $\pi(\lambda_1) = 2$, $\lambda_2 = 3$ με $\pi(\lambda_2) = 1$, και $\lambda_3 = 1$ με $\pi(\lambda_3) = 1$.

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίσες με τα διαγώνιά του στοιχεία (βλ. Πρόβλημα 9.2). Είναι επίσης προφανές ότι αν ο $n \times n$ πίνακας A έχει $k \le n$ διακεκριμένες (δηλ. διαφορετικές) ιδιοτιμές, τότε ισχύει

$$\sum_{i=1}^{k} \pi(\lambda_i) = n\,. \tag{6}$$

Θεώρημα 9.2.3
Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Οι πίνακες A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη
Έχουμε

$$det(A - \lambda I) = det(A - \lambda I)^T = det(A^T - \lambda I^T) = det(A^T - \lambda I)\,.$$

Οι πίνακες A και A^T έχουν την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση, άρα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. □

Θεώρημα 9.2.4
Ο $n \times n$ πίνακας A είναι μη αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η $\lambda = 0$ είναι μια ιδιοτιμή του.

Απόδειξη
Ο A είναι μη αντιστρέψιμος αν και μόνο αν

$$det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det(A - 0I) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

η $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A. □

Θεώρημα 9.2.5

Αν $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του $n \times n$ πίνακα A, τότε

$$detA = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \tag{7}$$

και

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n \, . \tag{8}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \dots \tag{i}$$

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A έχουμε επίσης:

$$det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)...(\lambda_n - \lambda) \quad \Rightarrow$$

$$det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \, . \tag{ii}$$

(α) Για $\lambda = 0$, παίρνουμε από την (ii):

$$detA = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n \, .$$

(β) Από τις (i) και (ii) παίρνουμε,

$$a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \quad \Rightarrow \quad trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

□

Για την εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε μια ιδιοτιμή λ του $n \times n$ πίνακα A επιλύουμε το χαρακτηριστικό σύστημα του A:

$$(A - \lambda I)\, X = 0 \, .$$

Η επίλυση του συστήματος μπορεί να γίνει με τη μέθοδο της αναγωγής του $(A - \lambda I)$ σε ανηγμένο κλιμακωτό. Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα δίνουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 9.2.6

Αν τα $X_1, X_2, \dots, X_k$ είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μια ιδιοτιμή λ του $n \times n$ πίνακα A , τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός τους,

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_k X_k \, , \tag{9}$$

όπου οι αριθμοί $c_i, i = 1, 2, \cdots, k$ δεν είναι όλοι ίσοι με μηδέν, είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Απόδειξη
Αφού τα $X_1, X_2, \ldots, X_k$ είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ, έχουμε:

$$(A - \lambda I)\, X_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k \quad \Rightarrow$$
$$(A - \lambda I)\, c_i X_i = 0, \quad c_i \in K, \quad i = 1, 2, \ldots, k \quad \Rightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{k} (A - \lambda I)\, c_i X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I) \sum_{i=1}^{k} c_i X_i = 0 \, .$$

Άρα ο γραμμικός συνδυασμός (9) είναι λύση του χαρακτηριστικού συστήματος του A, είναι δηλ. ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. □

Πόρισμα 1
Αν X είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του $n \times n$ πίνακα A, τότε το aX, όπου $a \in K$, $a \neq 0$, είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην λ.

Παράδειγμα 1
Έστω ο άνω τριγωνικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$(1 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \, .$$

Έχουμε έτσι 3 απλές ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 1, \ \ \lambda_2 = 2 \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 3 \, .$$

Θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή επιλύοντας σε κάθε περίπτωση το αντίστοιχο χαρακτηριστικό σύστημα,

$$(A - \lambda_i I)\, X = 0 \, .$$

$\lambda_1 = 1$

$$(A - 1I)X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{rcl} 2x_2 & = & 0 \\ 2x_2 + 5x_3 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right\} .$$

Άρα $x_2 = x_3 = 0$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη λ_1 είναι της μορφής

$$X_1 = (a, 0, 0) = a(1, 0, 0), \qquad a \in \mathbf{R}, a \neq 0 \, .$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$

$$(A-2I)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} -x_1 + 2x_2 & = 0 \\ x_2 + 5x_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array}\right\}$$

Άρα $x_1 = 2x_2$ και $x_3 = -\frac{1}{5}x_2$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_2 = 2$ είναι της μορφής:

$$X_2 = (2a', a', -\frac{1}{5}a') = a(10, 5, -1), \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0\,.$$

$\underline{\lambda_3 = 3}$

$$(A-3I)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} -2x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 5x_3 & = 0 \\ -x_3 & = 0 \end{array}\right\}$$

Άρα $x_1 = x_2$ και $x_3 = 0$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_3 = 3$ είναι της μορφής

$$X_3 = (a, a, 0) = a(1, 1, 0), \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0\,.$$

Παράδειγμα 2

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του.
(β) Να βρεθούν και να κανονικοποιηθούν τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

(α) Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(\lambda+2)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(\lambda+2)\left[(\lambda+2)^2 - 1\right] + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow -(\lambda+2)[(\lambda+2)^2 - 2] = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda+2)\,(\lambda+2+\sqrt{2})\,(\lambda+2-\sqrt{2}) = 0\,.$$

Ο πίνακας A έχει τρεις απλές ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -2 - \sqrt{2} \text{ και } \lambda_3 = -2 + \sqrt{2}$$

(β) Για την $\lambda_1 = -2$ έχουμε

$$(A+2I)X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} x_2 & = 0 \\ x_1 + x_3 & = 0 \end{array}\right\} .$$

Συνεπώς, $x_3 = -x_1$ και $x_2 = 0$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_1 = -2$ είναι της μορφής

$$X_1 = (a, 0, -a) = a(1, 0, -1), \qquad a \in \mathbf{R}, a \neq 0 .$$

Για την $\lambda_2 = -2 - \sqrt{2}$ έχουμε:

$$[A + (2+\sqrt{2})I]\, X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} \sqrt{2}x_1 & + & x_2 & & & = 0 \\ x_1 & + & \sqrt{2}x_2 & + & x_3 & = 0 \\ & & x_2 & + & \sqrt{2}x_3 & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} x_1 & = -x_2/\sqrt{2} \\ x_1 + x_3 & = -\sqrt{2}\, x_2 \\ x_3 & = -x_2/\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x_1 = x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, x_2 .$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_2 = -2 - \sqrt{2}$ είναι της μορφής:

$$X_2 = a' \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = a\,(1, -\sqrt{2}, 1), \quad a \in \mathbf{R},\ a \neq 0 .$$

Για την $\lambda_3 = -2 + \sqrt{2}$ έχουμε:

$$[A + (2-\sqrt{2})I]\, X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & - & \sqrt{2}x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & \sqrt{2}x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_1 = x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, x_2 .$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_3 = -2 + \sqrt{2}$ είναι της μορφής:

$$X_3 = a' \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = a\,(1, \sqrt{2}, 1), \quad a \in \mathbf{R},\ a \neq 0 .$$

Τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα είναι τα

$$X_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \; X_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{και} \quad X_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Πρόταση 9.2.7

Έστω ότι ο $n \times n$ πίνακας A έχει απλές (διακεκριμένες) ιδιοτιμές. Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις n ιδιοτιμές, τότε τα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A:

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{i}$$

Για τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ισχύουν εξ ορισμού οι σχέσεις:

$$A\, X_i = \lambda_i X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{ii}$$

Υπενθυμίζουμε στο σημείο αυτό ότι εξ ορισμού για κάθε ιδιοδιάνυσμα ισχύει

$$X_i \neq \mathbf{0}. \tag{iii}$$

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι μόνο τα m πρώτα ιδιοδιανύσματα ($1 \leq m < n$) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε τα ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, \ldots, X_{m+1}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Άρα υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_{m+1}$, που δεν είναι όλες μηδέν, τέτοιες ώστε να ισχύει

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_m X_m + c_{m+1} X_{m+1} = \mathbf{0}. \tag{iv}$$

Επιπλέον για την τελευταία σταθερά έχουμε

$$c_{m+1} \neq 0. \tag{v}$$

Πράγματι, αν $c_{m+1} = 0$, τότε η (iv) μας δίνει

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_m X_m = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0,$$

λόγω του ότι τα $X_1, X_2, \ldots, X_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αυτό είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι οι $c_1, c_2, \ldots, c_{m+1}$ δεν είναι όλες μηδέν.

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την (iv) με A έχουμε:

$$c_1 A X_1 + c_2 A X_2 + \ldots + c_m A X_m + c_{m+1} A X_{m+1} = \mathbf{0}.$$

Αντικαθιστώντας τις (ii) παίρνουμε

$$c_1 \lambda_1 X_1 + c_2 \lambda_2 X_2 + \ldots + c_m \lambda_m X_m + c_{m+1} \lambda_{m+1} X_{m+1} = \mathbf{0}. \tag{vi}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda_{m+1} \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας την (iv) με λ_{m+1} παίρνουμε:

$$c_1 \lambda_{m+1} X_1 + c_2 \lambda_{m+1} X_2 + \ldots + c_m \lambda_{m+1} X_m + c_{m+1} \lambda_{m+1} X_{m+1} = 0. \tag{vii}$$

Αφαιρώντας την (vi) από την (vii), βρίσκουμε ότι:

$$c_1\,(\lambda_{m+1}-\lambda_1)X_1 + c_2\,(\lambda_{m+1}-\lambda_2)X_2 + \ldots + c_m\,(\lambda_{m+1}-\lambda_m)X_m = 0\,.$$

Εφόσον τα $X_1, X_2, \ldots, X_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα,

$$c_1(\lambda_{m+1}-\lambda_1) = c_2(\lambda_{m+1}-\lambda_2) = \ldots = c_m(\lambda_{m+1}-\lambda_m) = 0\,.$$

Επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι διακεκριμένες,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0\,.$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και στην περίπτωση που λ_{m+1}=0. Πράγματι, αν λ_{m+1}=0, τότε από την (vi) έχουμε

$$c_1\lambda_1 X_1 + c_2\lambda_2 X_2 + \ldots + c_m\lambda_m X_m = 0\,.$$

Εφόσον τα $x_1, x_2, \cdots, x_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα,

$$c_1\lambda_1 = c_2\lambda_2 = \cdots = c_m\lambda_m = 0\,.$$

Επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι διακεκριμένες,

$$\lambda_i \neq 0 \quad \text{για} \quad i \neq m+1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0\,.$$

Επομένως, από την (ii) έχουμε

$$c_{m+1}X_{m+1} = 0$$

και επειδή $c_{m+1} \neq 0$ έχουμε αναγκαστικά $X_{m+1} = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί το X_{m+1} είναι ιδιοδιάνυσμα. Άρα τα ιδιοδιανύσματα του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. □

Πόρισμα 1

Αν ο πραγματικός $n \times n$ πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, τότε το σύνολο $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, όπου X_i ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, είναι μια βάση του $\mathbf{R}^n$.

Παράδειγμα

Είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι ο 3×3 πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

έχει απλές ιδιοτιμές: λ_1=-2, λ_2=-2 $-\sqrt{2}$ και λ_3=-2+ $\sqrt{2}$ με ιδιοδιανύσματα τα $X_1 = (1, 0, -1)$, $X_2 = (1, -\sqrt{2}, 1)$ και $X_3 = (1, \sqrt{2}, 1)$, αντίστοιχα. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.2.7, τα X_1, X_2, X_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει αυτό το συμπέρασμα. Είναι επίσης φανερό ότι το σύνολο $\{X_2, X_2, X_3\}$ αποτελεί μια βάση του $\mathbf{R}^3$.

Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, αν μια ιδιοτιμή λ_i του $n \times n$ πίνακα A δεν είναι απλή, δηλ. $\pi(\lambda_i) = m > 1$, τότε σε αυτή μπορεί να αντιστοιχούν λιγότερα από m γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Άρα, αν οι ιδιοτιμές του A δεν είναι απλές, ο A μπορεί να έχει λιγότερα από n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Η περίπτωση αυτή θα διερευνηθεί στην επόμενη παράγραφο.

Αν ο $n \times n$ πίνακας A έχει $k \leq n$ απλές ιδιοτιμές, μπορούμε να δείξουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, ..., X_k$, που αντιστοιχούν στις διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συνεπώς, η πρόταση 9.2.7 μπορεί να επεκταθεί ως ακολούθως:

Πρόταση 9.2.8

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, με $k \leq n$, κάποιες (όχι απαραίτητα όλες) από τις απλές ιδιοτιμές του. Αν $X_1, X_2, ..., X_k$ είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, τότε τα $X_1, X_2, ..., X_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη

Παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 9.2.7. □

9.3 ΙΔΙΟΧΩΡΟΙ

Είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι μια ιδιοτιμή του 3×3 πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι η $\lambda_1 = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\pi(\lambda_1) = 1$. Στην ιδιοτιμή αυτή αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα της μορφής

$$X_1 = a\,(1, 0, 0), \qquad a \neq 0\,.$$

Τα ιδιοδιανύσματα αυτά ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση

$$(A - \lambda_1 I)\, X_1 \;=\; \mathbf{0} \tag{1}$$

και μαζί με την τετριμμένη λύση $X = \mathbf{0}$ αποτελούν ένα διανυσματικό χώρο (πιο συγκεκριμένα, ένα υπόχωρο του $\mathbf{R}^3$). Είναι φανερό από τη θεωρία του κεφαλαίου 7 ότι τα ιδιοδιανύσματα X_1 μαζί με το μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}$ αποτελούν τον πυρήνα $N(A - \lambda_1 I)$ του χαρακτηριστικού πίνακα $(A - \lambda_1 I)$. Έχουμε έτσι τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 9.3.1

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A και λ_0 μια ιδιοτιμή του. Ο πυρήνας $N(A - \lambda_0 I)$ του χαρακτηριστικού πίνακα $(A - \lambda_0 I)$ καλείται ιδιόχωρος (eigenspace) της ιδιοτιμής λ_0 και συμβολίζεται με E_{λ_0}:

$$E_{\lambda_0} = N(A - \lambda_0 I) = \{X \in \mathbf{R}^n : (A - \lambda_0 I)X = \mathbf{0}\}\,. \tag{2}$$

Η διάσταση του ιδιοχώρου E_{λ_0} ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα (geometric multiplicity) της λ_0 και θα τη συμβολίζουμε με $\gamma(\lambda_0)$:

$$\gamma(\lambda_0) = dim E_{\lambda_0} = dim N(A - \lambda_0 I)\,. \tag{3}$$

Παρατηρήσεις

1. Ο ιδιόχωρος E_{λ_0} είναι προφανώς ο υπόχωρος του $\mathbf{R}^n$ που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_0.

2. Από το θεώρημα τάξεως και μηδενικότητας έχουμε για τη γεωμετική πολλαπλότητα της λ_0:
$$\gamma(\lambda_0) = dim E_{\lambda_0} = n - rank(A - \lambda_0 I)\,. \tag{4}$$

3. Εξ ορισμού, κάθε ιδιοδιάνυσμα X είναι μη μηδενικό, και έτσι $E_{\lambda_0} \neq \{\mathbf{0}\}$. Συνεπώς
$$\gamma(\lambda_0) = dim E_{\lambda_0} \geq 1\,. \tag{5}$$

Θεώρημα 9.3.2
Έστω λ_0 μια ιδιοτιμή του πίνακα $A \in M_{n\times n}(K)$ και E_{λ_0} ο αντίστοιχος ιδιόχωρος. Ισχύει τότε

$$\gamma(\lambda_0) \leq \pi(\lambda_0)\,, \tag{6}$$

όπου $\gamma(\lambda_0)$ και $\pi(\lambda_0)$ η γεωμετρική και η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_0, αντίστοιχα.

Απόδειξη
Στην απόδειξη αυτή χάνουμε χρήση της θεωρίας της επόμενης παραγράφου. Έστω ότι

$$dim E_{\lambda_0} = k \quad \text{οπου} \quad 1 \leq k \leq n\,,$$

και έστω $T \in \mathcal{L}(K^n)$ ο τελεστής που ορίζεται από τον πίνακα A (ως προς τη συνήθη βάση του K^n). Τότε το λ_0 είναι ιδιοτιμή του T και ο ιδιόχωρος του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή αυτή ταυτίζεται με τον E_{λ_0}.

Έστω $B' = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ μια βάση του E_{λ_0}, όπου τα $u_1, u_2, \cdots, u_k$ είναι προφανώς ιδιοδιανύσματα του T που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_0. Επεχτείνουμε τη βάση B' σε μια βάση

$$B = \{u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_k,\, u_{k+1},\, \cdots,\, u_n\}$$

του K^n. Ο πίνακας A_T του τελεστή T ως προς τη βάση B του K^n θα έχει τη μορφή:

$$A_T = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1,n-k} \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & \beta_{21} & \cdots & \beta_{2,n-k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & \beta_{k1} & \cdots & \beta_{k,n-k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{k+1,1} & \cdots & \beta_{k+1,n-k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{n1} & \cdots & \beta_{n,n-k} \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες A και A_T ως όμοιοι (βλέπε Θ. 7.7.6), έχουν ίδιες ιδιοτιμές και μάλιστα η χαρακτηριστική εξίσωση του A_T είναι η

$$\begin{vmatrix} \lambda_0-\lambda & 0 & \cdots & 0 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1,n-k} \\ 0 & \lambda_0-\lambda & \cdots & 0 & \beta_{21} & \cdots & \beta_{2,n-k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0-\lambda & \beta_{k1} & \cdots & \beta_{k,n-k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{k+1,1}-\lambda & \cdots & \beta_{k+1,n-k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{n1} & \cdots & \beta_{n,n-k}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ή

$$(\lambda_0 - \lambda)^k\, q(\lambda) = 0\,,$$

όπου $q(\lambda)$ ένα πολυώνυμο του λ βαθμού $degq{=}n{-}k$. Από τη μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης του A_T συμπεραίνουμε ότι η ιδιοτιμή λ_0 έχει πολλαπλότητα τουλάχιστον k, δηλαδή

$$\gamma(\lambda_0) = dim E_{\lambda_0} \leq \pi(\lambda_0)\,.$$

Συνδυάζοντας τις (5) και (6) παίρνουμε

$$1 \leq \gamma(\lambda_0) \leq \pi(\lambda_0)\,. \tag{7}$$

Η πιο πάνω σχέση μας λέει ότι ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_0 είναι $\pi(\lambda_0)$ και ο ελάχιστος 1. Παρατηρούμε επίσης ότι αν η $\pi(\lambda_0) = 1$, αν δηλ. η ιδιοτιμή λ_0 είναι απλή, τότε

$$\gamma(\lambda_0) = dim E_{\lambda_0} = 1\,.$$

Με διαφορετικά λόγια, σε κάθε απλή ιδιοτιμή έχουμε μόνο ένα γραμμικώς ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα. Αυτό το διαπιστώσαμε σε όλα τα σχετικά παραδείγματα της παραγράφου 9.2.

Στη συνέχεια θα δώσουμε παραδείγματα με πίνακες των οποίων οι ιδιοτιμές δεν είναι όλες απλές. Για να βρούμε πόσα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν σε μια ιδιοτιμή λ_i με $\pi(\lambda_i) > 1$, χρησιμοποιούμε το θεώρημα τάξης και μηδενικότητας [εξίσωση (4)].

Παράδειγμα 1

Έστω ο 2×2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A.
(β) Να οριστούν οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι και να βρεθούν οι διαστάσεις τους (δηλ. οι γεωμετρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών).

(α) Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A είναι η

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -(4-\lambda)\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)^2 = 0\,.$$

Έχουμε μια διπλή ιδιοτιμή, $\lambda = 2$ με $\pi(\lambda) = 2$.

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda = 2$ είναι οι λύσεις του χαρακτηριστικού συστήματος:

$$(A - \lambda I)X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2\,.$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda = 2$ είναι της μορφής

$$X = a(1,1), \quad a \in \mathrm{R}, a \neq 0\,.$$

(β) Ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda = 2$ είναι ο

$$E_\lambda = \{X \in \mathrm{R}^2 : X = a(1,1),\ a \in \mathrm{R}\}\,.$$

Ο E_λ παράγεται από μόνο ένα (γραμμικώς ανεξάρτητο) ιδιοδιάνυσμα, το (1,1), οπότε

$$\gamma(\lambda) = dim E_\lambda = 1 .$$

Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το σχέση (4). Βρίσκουμε πρώτα το βαθμό του χαρακτηριστικού πίνακα:

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός του $(A - \lambda I)$ έχει μόνο μία μη μηδενική γραμμή. Άρα $rank(A - \lambda I)$=1 και από την (4) βρίσκουμε ότι

$$\gamma(\lambda) = dim E_\lambda = 2 - rank(A - \lambda I) = 1 .$$

Παράδειγμα 2

Έστω ο 3×3 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A.
(β) Να βρεθούν οι γεωμετρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών του A.
(γ) Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του A και να οριστούν οι σχετικοί ιδιόχωροι.

(α) Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & -2+\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$0 = (\lambda - 2)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$(\lambda - 2)\, 1 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)\,[(3-\lambda)(5-\lambda) - 3] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\lambda - 2)\,(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)^2\,(\lambda - 6) = 0 .$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 2$ με $\pi(\lambda_1) = 2$ και $\lambda_2 = 6$ με $\pi(\lambda_2) = 1$.

(β) Για να βρούμε την $\gamma(\lambda_1)$, χρησιμοποιούμε το θεώρημα τάξης και μηδενικότητας:

$$\gamma(\lambda_1) = 3 - rank(A - \lambda_1 I) = 3 - rank(A - 2I) .$$

Κλιμακοποιούμε τον πίνακα $(A - 2I)$:

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Βλέπουμε ότι ο κλιμακωτός έχει μόνο μια μη μηδενική γραμμή. Άρα $rank(A-2I)$=1 και $\gamma(\lambda_1)$=3-1=2.

Επειδή η ιδιοτιμή λ_2 είναι απλή, $\gamma(\lambda_2)$=1.

(γ)
λ_1=2
Έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα

$$(A-\lambda_1 I)X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0\,.$$

Έχουμε άπειρο πλήθος λύσεων με 2 ελεύθερες μεταβλητές. Έστω $x_1 = a$ και $x_3 = b$ οπότε $x_2 = -(a+b)$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_1 = 2$ είναι της μορφής

$$X_1 = (a, -(a+b), b) = a\,(1,-1,0) + b\,(0,-1,1), \qquad a, b \in \mathbf{R}, a^2+b^2 \neq 0\,.$$

Παρατηρούμε ότι στην $\lambda_1 = 2$ αντιστοιχούν 2 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα

$$X_1^a = (1,-1,0) \quad \text{και} \quad X_1^\beta = (0,-1,1)\,.$$

Αυτό βέβαια αναμενόταν αφού στο (β) βρήκαμε ότι $\gamma(\lambda_1)$=2. Ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο

$$E_{\lambda_1} = \{x \in \mathbf{R}^3 : X = a\,(1,-1,0) + b\,(0,-1,1), \quad a, b \in \mathbf{R}\}\,.$$

λ_2=6
Έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$(A-\lambda_2 I)\,X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Κλιμακοποιούμε τον χαρακτηριστικό πίνακα:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Θέτοντας $x_3 = a$, παίρνουμε τη γενική μορφή των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στη λ_2:

$$X_2 = (a, 2a, a) = a\,(1,2,1), \qquad a \in \mathbf{R}, a \neq 0\,.$$

Συνεπώς,

$$E_{\lambda_2} = \{X \in \mathbf{R}^3 : X = a\,(1,2,1), \quad a \in \mathbf{R}\}\,.$$

9.4 ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ορισμός 9.4.1

Οι $n\times n$ πίνακες A και B είναι όμοιοι (similar) αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε να ισχύει

$$B = S^{-1} A\, S\,. \tag{1}$$

Είναι φανερό ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την

$$A = S\, B S^{-1}\,. \tag{2}$$

Για όμοιους πίνακες ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 9.4.2

Όμοιοι πίνακες έχουν ίδιες χαρακτηριστικές εξισώσεις και επομένως ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη

Έστω A και B δύο όμοιοι πίνακες. Άρα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S, τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$B = S^{-1}AS \quad\Rightarrow\quad B-\lambda I = S^{-1}AS-\lambda I \quad\Rightarrow$$

$$|B-\lambda I| = |S^{-1}AS-\lambda I| = |S^{-1}AS - S^{-1}\lambda I S| \quad\Rightarrow$$

$$|B-\lambda I| = |S^{-1}(A-\lambda I)S| = |S^{-1}|\;|A-\lambda I|\;|S|\,.$$

Επειδή $|S^{-1}|\;|S| = |S^{-1}S| = |I| = 1$, παίρνουμε

$$|B-\lambda I| = |A-\lambda I|\,.$$

Έτσι οι πίνακες A και B έχουν τις ίδιες χαρακτηριστικές εξισώσεις και άρα ίδιες ιδιοτιμές. □

Παρατήρηση

Έστω A και B δύο όμοιοι πίνακες και λ μια ιδιοτιμή τους. Έστω X ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, οπότε ισχύει:

$$AX = \lambda X \quad\Longrightarrow\quad S^{-1}AX = \lambda\, S^{-1}X \quad\Longrightarrow$$

$$S^{-1}ASS^{-1}X = \lambda\, S^{-1}X \quad\Longrightarrow\quad BS^{-1}X = \lambda\, S^{-1}X \quad\Longrightarrow$$

$$B\,Y = \lambda\, Y \quad \text{οπου} \quad Y = S^{-1}X\,. \tag{3}$$

Βρήκαμε έτσι ότι τα ιδιοδιανύσματα του B που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ δίνονται από την (3).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου ένας $n \times n$ πίνακας A είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα D. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.4.2, οι A και D έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Τα διαγώνια στοιχεία του D είναι οι κοινές ιδιοτιμές των δύο πινάκων:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Όπως θα δούμε σε λίγο ο πίνακας S στη σχέση $S^{-1}AS = D$ έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Ορισμός 9.4.3

Ο $n \times n$ πίνακας A είναι **διαγωνοποιήσιμος** (diagonalizable) αν είναι όμοιος με ένα διαγώνιο $n \times n$ πίνακα D, αν δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S, τέτοιος ώστε

$$S^{-1}AS = D \iff A = SDS^{-1}. \tag{5}$$

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι πολύ σημαντικό.

Θεώρημα 9.4.4

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία από το σώμα K. Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος όταν και μόνον όταν ο A έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Στην περίπτωση αυτή, αν D είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο τις ιδιοτιμές του A, τότε ο πίνακας S στην σχέση (5) έχει ως στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A.

Απόδειξη

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ οι όχι κατ' ανάγκη διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του A. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο A έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα

$$X_1, X_2, \cdots, X_n.$$

Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε ιδιοτιμή λ_i μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το ιδιοδιάνυσμα X_i, έτσι ώστε

$$AX_i = \lambda_i X_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{i}$$

(Για παράδειγμα, αν $\pi(\lambda_1)=2$ και $\lambda_1=\lambda_5$, τότε στην λ_1 αντιστοιχούν ακριβώς δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, αφού στην αντίθετη περίπτωση, ο A θα είχε λιγότερα από n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Αυτά τα συμβολίζουμε με X_1 και X_5, οπότε πράγματι $AX_1 = \lambda_1 X_1$ και $AX_5 = \lambda_5 X_5$).
Ορίζουμε τώρα τους πίνακες S και D:

$$S = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n] \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Για τα γινόμενα AS και SD έχουμε

$$AS = [AX_1 \ AX_2 \ \cdots \ AX_n] \tag{ii}$$

και

$$SD = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 X_1 \ \lambda_2 X_2 \ \cdots \ \lambda_n X_n] \tag{iii}$$

Λόγω της (i), έχουμε:

$$AS = [AX_1 \ AX_2 \ \cdots \ AX_n] = [\lambda_1 X_1 \ \lambda_2 X_2 \ \cdots \ \lambda_n X_n] \ \Rightarrow \ AS = SD\,. \tag{iv}$$

Αφού τα $X_1, X_2, \cdots, X_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, $rank(S)=n$ και άρα ο S είναι αντιστρέψιμος. Από την (iv) παίρνουμε

$$S^{-1}AS = S^{-1}SD = D\,, \tag{v}$$

που σημαίνει ότι ο A είναι όμοιος με το διαγώνιο πίνακα D και άρα είναι διαγωνοποιήσιμος.

Αντίστροφα, αν ο A είναι όμοιος με το διαγώνιο πίνακα D, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε να ισχύει η (v). Έστω ότι

$$S = [Y_1 \ Y_2 \ \cdots \ Y_n]\,.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι τα Y_1, Y_2, $\cdots Y_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A. Εφόσον ο S είναι αντιστρέψιμος, $rank(S)=n$ και άρα τα Y_1, Y_2, $\cdots Y_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Από την (v), έχουμε διαδοχικά:

$$S^{-1}AS = D \quad \Rightarrow \quad SS^{-1}AS = SD \quad \Rightarrow \quad AS = SD \quad \Rightarrow$$

$$A\,[Y_1 \ Y_2 \ \cdots \ Y_n] = [Y_1 \ Y_2 \ \cdots \ Y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[AY_1 \ AY_2 \ \cdots \ AY_n] = [\lambda_1 Y_1 \ \lambda_2 Y_2 \ \cdots \ \lambda_n Y_n] \quad \Rightarrow$$

$$AY_i = \lambda_i Y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n\,. \tag{vi}$$

Πράγματι, τα $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ είναι (γραμμικώς ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. □

Όπως αναφέραμε στην πιο πάνω απόδειξη, για να έχει ένας $n \times n$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα πρέπει σε μια ιδιοτιμή λ_i να αντιστοιχούν αχριβώς $\pi(\lambda_i)$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή να ισχύει

$$\gamma(\lambda_i) = \pi(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \cdots, k\,, \tag{6}$$

όπου k το πλήθος των διακεκριμένων ιδιοτιμών του πίνακα. Πράγματι, το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα είναι

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma(\lambda_i)\,.$$

Επειδή $1 \leq \gamma(\lambda_i) \leq \pi(\lambda_i)$,

$$k \leq \sum_{i=1}^{k} \gamma(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \pi\lambda_i = n\,.$$

Βλέπουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma(\lambda_i) = n$$

αν και μόνο αν ισχύει η (6).

Ορισμός 9.4.5

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A. Αν για κάθε διακεκριμένη ιδιοτιμή λ_i του A ισχύει

$$\gamma(\lambda_i) = \pi(\lambda_i)\,, \tag{7}$$

τότε ο A λέγεται μη ελλιπής (non-defective).
Αν για κάποια ιδιοτιμή λ_i του A ισχύει

$$\gamma(\lambda_i) < \pi(\lambda_i)\,, \tag{8}$$

τότε ο πίνακας A λέγεται ελλιπής (defective).

Παρατηρήσεις

1. Αν ενας $n \times n$ πίνακας έχει μόνο απλές ιδιοτιμές, τότε είναι μη ελλιπής.
2. Είναι φανερό από τα προηγούμενα ότι ένας $n \times n$ πίνακας είναι μη ελλιπής αν και μόνο αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Έτσι το Θεώρημα 9.4.4 μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής.

Θεώρημα 9.4.6

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία από το σώμα K. Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν είναι μη ελλιπής.

Απόδειξη

Σύμφωνα με τη θεωρία της παρούσας παραγράφου, η διαγωνοποίηση ενός $n \times n$ πίνακα A γίνεται χάνοντας τα εξής βήματα:

1. Βρίσχουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A. Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, \cdots, X_n$ (δηλ. αν ο A είναι μη ελλιπής $\Leftrightarrow \gamma(\lambda_i) = \pi(\lambda_i)$).

2. Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, κατασκευάζουμε τους πίνακες S και D:

$$S = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n] \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

3. Βρίσχουμε τον αντίστροφο S^{-1} του S και υπολογίζουμε τον A:

$$A = SDS^{-1}.$$

□

Πόρισμα 9.4.7

Αν ο πίναχας $A \in M_{n\times n}(K)$ έχει n διαχεχριμένες ιδιοτιμές, τότε είναι διαγωνοποιήσιμος.

Παράδειγμα 1

Έστω ο πίναχας $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, που μελετήσαμε σε προηγούμενο παράδειγμα.
Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 2$ με $\pi(\lambda_1) = 2$ και $\lambda_2 = 6$ με $\pi(\lambda_2) = 1$.

Στη διπλή ιδιοτιμή λ_1=2 αντιστοιχούν δύο γραμμιχώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα X_1=(1, -1, 0) και X_2=(0,1, -1), ενώ στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 6$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα X_3=(1,2,1). Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αφού έχει 3 γραμμιχώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Έστω οι πίναχες

$$S = [X_1 \ X_2 \ X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0. & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ο αντίστροφος S^{-1} του S μπορεί να βρεθεί με μια από τις γνωστές μεθόδους:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Άρα μια διαγωνοποίηση του A είναι η:

$$A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Μια άλλη διαγωνοποίηση του A προκύπτει αν θέσουμε:

$$S = [X_2 \; X_3 \; X_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε τότε ότι

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

οπότε έχουμε την παρακάτω διαγωνοποίηση του A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 2

Να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Βρίσκουμε πρώτα τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A. Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ -2 & \lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$0 = \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2-\lambda & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$0 = \lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad -\lambda\,(2-\lambda)\,(3-\lambda) = 0\,. \qquad (i)$$

(Η χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί να βρεθεί και με πολλούς άλλους τρόπους, για παράδειγμα, αναπτύσσοντας την αρχική ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης). Από την (i) βλέπουμε ότι ο A έχει τρεις απλές ιδιοτιμές: λ_1=0, λ_2=2 και λ_3=3. Άρα ο A έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και είναι διαγωνοποιήσιμος.

Για $\lambda_1=0$, έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$(A-0I)\,X=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Κλιμακοποιούμε τον πίνακα του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2+x_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Παίρνοντας το x_3 ως ελεύθερη μεταβλητή, βρίσκουμε τη γενική μορφή των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στην $\lambda_1=0$:

$$(0,-a,a)=a\,(0,-1,1), \qquad a\in\mathbf{R}, a\neq 0\,.$$

Έστω λοιπόν ότι

$$X_1=(0,-1,1)\,.$$

Για $\lambda_2=2$, έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$(A-2I)\,X=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Κλιμακοποιούμε, όπως και προηγουμένως, τον πίνακα του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1+2x_3 & = & 0 \\ x_2+x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Η γενική μορφή των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στην $\lambda_2=2$ είναι:

$$(-2a,-3a,a)=a\,(-2,-3,1), \qquad a\in\mathbf{R}, a\neq 0\,.$$

Έστω λοιπόν ότι

$$X_2=(-2,-3,1)\,.$$

Για $\lambda_3 = 3$, έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$(A - 3I)\,X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Κλιμακοποιούμε τον πίνακα του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Η γενική μορφή των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στην λ_3=3 είναι:

$$(a, 2a, 0) = a\,(1, 2, 0), \qquad a \in \mathbf{R}, a \neq 0\,.$$

Έστω λοιπόν ότι

$$X_3 = (1, 2, 0)\,.$$

Συνοψίζουμε στο σημείο αυτό τα μέχρι στιγμής αποτελέσματα. Ο πίνακας A έχει τρεις απλές ιδιοτιμές, τις λ_1=0, λ_2=2, και λ_3=3 στις οποίες αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα

$$X_1 = (0, -1, 1), \quad X_2 = (-2, -3, 1) \quad \text{και} \quad X_3 = (1, 2, 0)\,.$$

Τα X_1, X_2 και X_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (Πρόταση 9.2.7) και συνεπώς ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Έστω λοιπόν ότι

$$S = [X_1 \; X_2 \; X_3] = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Απομένει να βρούμε τον αντίστροφο S^{-1} του S. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο αναγωγής σε ανηγμένο κλιμακωτό. ($[S|I] \sim [I|S^{-1}]$):

$$\begin{aligned}
[S|I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$[S|I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εχουμε τελικά την εξής διαγωνοποίηση του A:

$$A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός δυνάμεων ενός διαγωνοποιήσιμου πίνακα καθίσταται ευκολότερος μετά τη διαγωνοποίησή του. Πραγματικά, αν

$$A = SDS^{-1},$$

τότε

$$A^2 = AA = SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^2S^{-1}.$$

Επαγωγικά βρίσκουμε ότι

$$A^k = SD^kS^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Η πιο πάνω σχέση ισχύει και για $k = 0$ (γιατί;). Ο D^k υπολογίζεται εύκολα, αφού

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}. \tag{10}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

του προηγούμενου παραδείγματος. Βρήκαμε ότι μια διαγωνοποίηση του A είναι η εξής:

$$A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με την (9), για τον A^6 έχουμε:

$$A^6 = SD^6S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^6 & 0 \\ 0 & 0 & 3^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Στην περίπτωση που ο A είναι αντιστρέψιμος, όλες οι ιδιοτιμές του είναι διάφορες του 0 και ο D (που έχει τις ίδιες ιδιοτιμές) είναι αντιστρέψιμος. Η (9) επεκτείνεται τότε και για αρνητικά k. Πράγματι από την

$$A = SDS^{-1}$$

παίρνουμε:

$$A^{-1} = \left(SDS^{-1}\right)^{-1} = \left(S^{-1}\right)^{-1} D^{-1}S^{-1} = SD^{-1}S^{-1},$$

όπου

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Για τον A^{-2} έχουμε:

$$A^{-2} = A^{-1}A^{-1} = SD^{-2}S^{-1}.$$

Επαγωγικά βρίσκουμε ότι για αντιστρέψιμο πίνακα A ισχύει

$$A^{-k} = SD^{-k}S^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Εφόσον οι A^k και D^k είναι όμοιοι μπορούμε εύχολα να παρατηρήσουμε ότι αν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A, τότε οι ιδιοτιμές του A^k είναι οι $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$. Ακόμα, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε οι ιδιοτιμές του A^{-1} είναι οι $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_k}$.

Θεώρημα 9.4.8

Έστω λ μια ιδιοτιμή του $n \times n$ πίνακα A και X ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη λ.

(α) Ο πίνακας A^k με $k = 2, 3, \cdots$ έχει ιδιοτιμή τη λ^k και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το X.

(β) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, ο A^{-1} έχει ιδιοτιμή την $\frac{1}{\lambda}$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το X.

Απόδειξη

(α)

$$AX = \lambda X \quad \Rightarrow \quad A^2X = \lambda AX = \lambda(\lambda X) \quad \Rightarrow \quad A^2X = \lambda^2 X.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά βρίσκουμε ότι

$$A^kX = \lambda^k X, \quad k = 2, 3, \cdots$$

άρα η πρόταση ισχύει.
(Σημείωση: Η πρόταση ισχύει και για $k = 0$. Ισχύει ακόμα για αρνητικά k αν ο A είναι αντιστρέψιμος).

(β) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $\lambda \neq 0$. Εχουμε διαδοχικά:

$$AX = \lambda X \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = \lambda\, A^{-1}X \quad \Rightarrow \quad X = \lambda\, A^{-1}X \quad \Rightarrow \quad A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}\, X\,.$$

Άρα η $\frac{1}{\lambda}$ είναι μια ιδιοτιμή του A^{-1} και το X ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. □

Οι έννοιες αυτής της παραγράφου ορίζονται φυσικά και για γραμμικούς τελεστές στο $\mathcal{L}(V)$, όπου ο V είναι πεπερασμένης διάστασης. Παραθέτουμε σχετικές προτάσεις και ένα ορισμό του Κεφαλαίου 7, καθώς και κάποια χρήσιμα πορίσματα.

Θεώρημα 7.7.6
Έστω οι πίνακες $A, B \in M_{n\times n}$. Οι A και B είναι **όμοιοι** αν και μόνο αν αυτοί αντιστοιχούν στον ίδιο γραμμικό τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου ο γραμμικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης n.

Ορισμός 7.7.7
Ένας γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου ο γραμμικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης n, λέγεται **διαγωνοποιήσιμος** αν υπάρχει μια βάση B του V τέτοια ώστε ο $(A_T)_B$ να είναι διαγώνιος.

Σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό, ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου $dimV = n \in \mathbb{N}$, είναι διαγωνοποιήσιμος αν υπάρχει μια βάση $B=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ του V τέτοια ώστε να ισχύει

$$T(u_i) = \lambda_i\, u_i\,, \quad \lambda_i \in K\,, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

ή ισοδύναμα αν υπάρχει βάση B του V που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T. Στην περίπτωση αυτή, τα διαγώνια στοιχεία του $(A_T)_B$ είναι οι ιδιοτιμές του T:

$$(A_T)_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Πόρισμα 9.4.9
Έστω ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου $dimV=n \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχει μια βάση του V η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T, τότε ο T είναι διαγωνοποιήσιμος.

Πόρισμα 9.4.10
Έστω ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου $dimV=n \in \mathbb{N}$. Αν ο T έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο T είναι διαγωνοποιήσιμος.

Πρόταση 7.7.8

Ένας τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου $dimV=n \in \mathbb{N}$, είναι διαγωνοποιήσιμος όταν και μόνον όταν υπάρχει μια βάση B του V και ένας αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε ο πίνακας

$$P^{-1}\,(A_T)_B\,P$$

να είναι διαγώνιος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 9

1. Να αποδειχθεί η Πρόταση 9.1.3.
2. Να αποδειχθεί η Πρόταση 9.1.4.
3. Αν ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι μηδενοδύναμος να δειχθεί ότι η μόνη ιδιοτιμή του T είναι το μηδέν.
4. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του γραμμικού τελεστή $T \in L(\mathbf{R}^2)$ που ορίζεται από τη σχέση
$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2,\ 4x_1 + 3x_2).$$
5. Αν ο λ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$, να δειχθεί ότι ο λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του T^{-1}.
6. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές των κάτωθι πινάκων:

(α) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

7. Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές ενός τριγωνικού πίνακα (άνω ή κάτω) είναι ίσες με τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα.
8. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω πινάκων:

(α) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

9. Έστω ο 3×3 πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$
(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A.
(β) Να βρεθούν και να κανονικοποιηθούν τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.
10. Δίνεται ο 3×3 πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
(α) Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$ με $\pi(\lambda_1) = 1$ και $\lambda_2 = 2$ με $\pi(\lambda_2) = 2$.
(β) Να βρεθούν οι $\gamma(\lambda_1) = dim E\lambda_1$ και $\gamma(\lambda_2) = dim E\lambda_2$.
(γ) Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 και να ορισθούν οι ιδιόχωροι $E\lambda_1$ και $E\lambda_2$.

11. Να διαγωνοποιηθούν οι πιο χάτω πίναχες:

(α) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

12. Δείξτε ότι ο πίναχας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

διαγωνοποιείται και γράψτε μια διαγωνοποίησή του.

13. Έστω λ μια ιδιοτιμή του $n \times n$ πίνακα A και X ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Να δειχθεί ότι ο πίνακας $(A + aI)$, όπου a σταθερά, έχει ιδιοτιμή τη $\lambda + a$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το X.

14. Έστω ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ για τον οποίο ισχύει

$$T^2 = T$$

(ένας τέτοιος τελεστής χαλείται **προβολή** (projection)). Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του T.

15. Έστω ο τελεστής $T \in L(\mathbf{R}^3)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(x, y, z) = (0,\ x,\ y)\,.$$

Να βρεθούν τα χαραχτηριστιχά πολυώνυμα των T, T^2 χαι T^3.

16. Έστω ο τελεστής $T \in L(\mathbf{R}^3)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(x, y, z) = (x - 2z,\ 0,\ -2x + 4z)\,.$$

Να βρεθεί μια βάση B του $\mathbf{R}^3$ έτσι ώστε ο $(A_T)_B$ να είναι διαγώνιος.

17. Έστω ο τελεστής $T \in L(\mathbf{R}^4)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(x, y, z, w) = (x,\ 2x + 5y + 6z + 7w,\ 3x + 8z + 9w,\ 4x + 10w)\,.$$

Να βρεθεί μια βάση B του $\mathbf{R}^4$ έτσι ώστε ο $(A_T)_B$ να είναι διαγώνιος.

18. Έστω ο τελεστής $S \in L(\mathbf{C}^3)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(u, v, w) = (-u,\ -w,\ v)\,.$$

Να βρεθεί μια βάση B του $\mathbf{C}^3$ έτσι ώστε ο $(A_T)_B$ να είναι διαγώνιος.

19. Έστω $f(x)$ ένα πολυώνυμο και A ένας $n \times n$ πίναχας.
(α) Να δειχθεί ότι αν λ, X είναι αντίστοιχα ιδιοποσά του πίνακα A, τότε τα $f(\lambda), X$ είναι αντίστοιχα ιδιοποσά του πίνακα $f(A)$.
(β) Αν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A, να δειχθεί ότι

$$det[f(A)] = f(\lambda_1)\, f(\lambda_2)\, \cdots\, f(\lambda_n)\,.$$

20. Αν ο $n \times n$ πίναχας A έχει μόνο μια ιδιοτιμή διάφορη του μηδενός, δείξτε ότι

$$det(I + A) = 1 + trA\,.$$

21. Να βρεθούν τα ελάχιστα πολυώνυμα των κάτωθι πινάκων:

$$\text{(i)}\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(iv)}\quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Να βρεθούν το ελάχιστο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίναχα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Έστω τώρα ένα πολυώνυμο $f(x)$. Να βρεθεί ένας $n \times n$ πίναχας που έχει ελάχιστο πολυώνυμο το $f(x)$.

23. Υπολογίζοντας το ελάχιστο πολυώνυμο, χαθορίστε ποιοι από τους κάτωθι πίναχες είναι διαγωνοποιήσιμοι.

$$\text{(i)}\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

24. Δείξτε ότι αν $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$, τότε οι πίναχες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. S. Lang, Linear Algebra, Springer-Verlag, New York, 1991.
2. L. Smith, Linear Algebra, Springer-Verlag, New York, 1985.
3. A.O. Morris, Μια Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα (μετάφραση Δ.Ι. Δεριζιώτη), Εκδοση Γ.Α. Πνευματικού, Αθήνα, 1980.
4. Γ. Παντελίδης, Δ. Κραββαρίτης, Β. Νασόπουλου και Π. Τσεχρέχου, Γραμμική Αλγεβρα, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1992.
5. H. Eves, Elementary Matrix Algebra, Dover Publications, New York, 1980.
6. S. Lipschutz, Linear Algebra, Schaum's Series, MacGraw Hill, 1989.
7. Θ. Χρυσάκης, Γραμμική Αλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Αθήνα, 1992.
8. Δ.Γ. Δασκαλόπουλος, Εφηρμοσμένη Γραμμική Αλγεβρα, Αθήνα 1979.
9. Κ.Γ. Λασκαρίδης, Σημειώσεις Γραμμικής Αλγεβρας, Αθήνα, 1983.
10. G. Strang, Linear Algebra and its Applications, Academic Press, 1980.
11. Π.Κ. Ρόκος, Γραμμική Αλγεβρα, Αθήνα 1979.
12. Σ.Μ. Μποζαπαλίδης, Γραμμική Αλγεβρα, Θεσσαλονίκη, 1984.
13. Ι.Θ. Χαΐνης, Μαθήματα Ανώτερων Μαθηματικών, Τόμος Α΄, Γ΄ Εκδοση, Αθήνα, 1978.
14. L. Brand, Μαθηματική Ανάλυση, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 1984.
15. Κ. Λάκκη, Γραμμική Άλγεβρα, Θεσσαλονίκη, 1984.
16. Σ.Α. Ανδρεαδάκη, Γραμμική Άλγεβρα, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1991.

οἶον το γλυχύμαλον ἐρεύθεται ἄχρωι ἐπ’ ὔσδωι
ἄχρον ἐπ΄ ἀχροτάτωι λελάθοντο δὲ μαλοδρόπηες
οὐ μὰν ἐχλελάθοντ΄ ἀλλ΄ οὐχ ἐδύναντ΄ ἐπίχεσθαι

Σαπφώ